

群馬大学 工学部 電気電子工学科
「集積回路システム工学」 講義資料 (2)

アナログ集積回路の基礎

担当 小林春夫

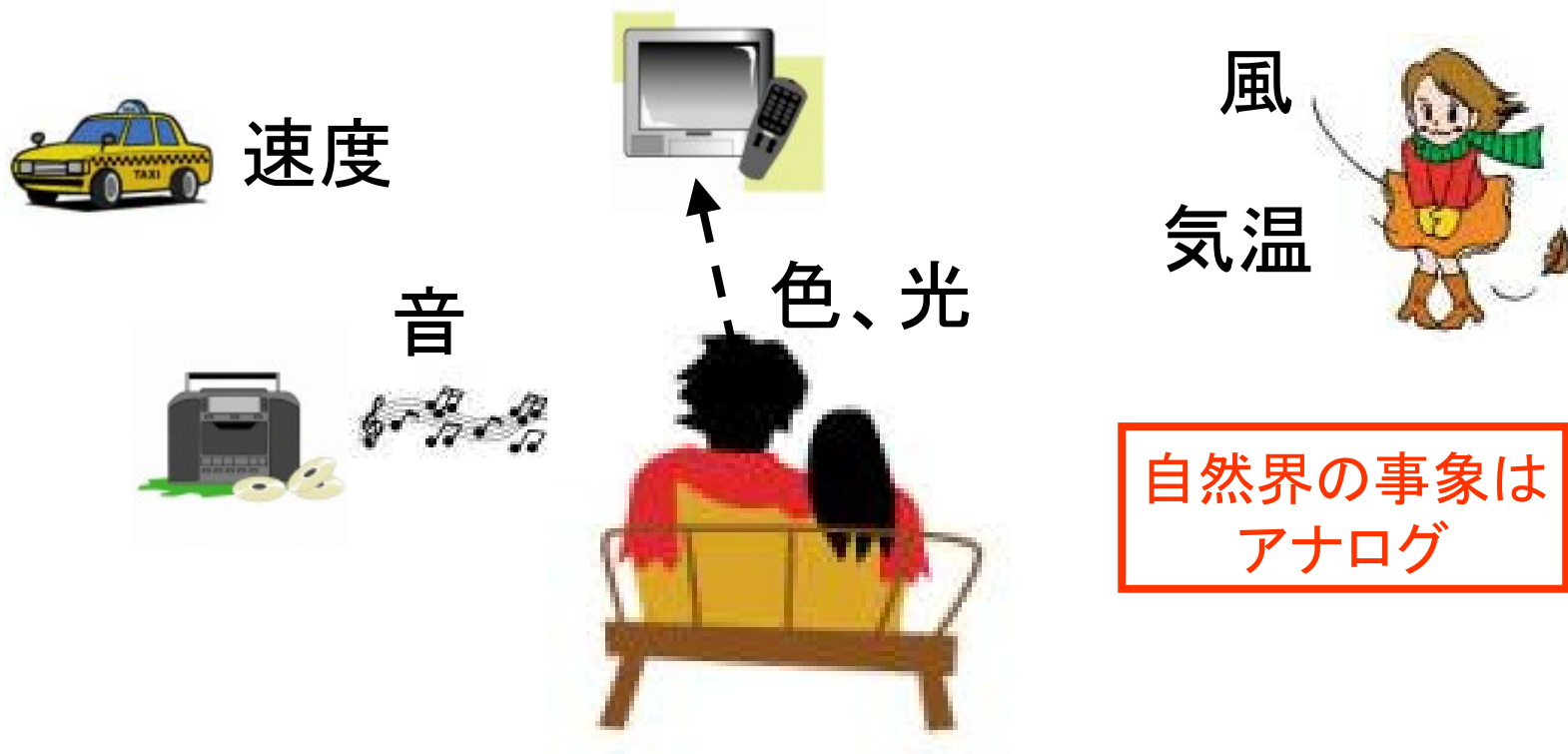
この資料はATN 麻殖生健二氏および
小林研究室学生の協力のもと作成された



1. アナログICの動向および最近の状況
2. 電子回路 線形と非線形
3. 電子回路で扱う主要部品および基本的な性質
4. 電子回路によく出てくる信号
5. 伝達関数と周波数特性
6. インパルス応答、ステップ応答
7. 伝達関数の基本的な性質
8. 付録 フーリエ変換とラプラス変換



アナログとは？ デジタルとは？



自然界 — 連続量
アナログの世界
例) 音、光、温度、圧力

計算、メモリの世界 — 離散量
デジタルの世界
例) パソコン、CD、DVD、デジカメ

アナログとは？ デジタルとは？

温度、圧力、音、光 自然界の現象は全てアナログである。これに対し、人工の計算機やメモリ等はデジタルである。

アナログ回路がデジタル回路と大きく異なる点は、取り扱う信号がアナログでは連続量に対し、デジタルでは“1” “0”の離散量であるという本質的な違いのほか、右に示した取り扱うパラメータの多さである。

アナログ回路設計では、特性が用途に適合するように右記パラメータを設定し、設計する必要がある。

アナログ回路の適用例

アナログ回路は、世の中の大部分の機器に適用されている。携帯端末もその代表例である。アンテナからの微弱なアナログ信号を増幅する増幅回路、高周波電波信号を低周波データに変換する周波数変換回路や変調/復調回路、スピーカーを鳴らすための増幅回路等、種々のアナログ回路が使われている。

1990年以降、これらアナログ回路とCPUやメモリ等のデジタル回路を1チップに実装したSoC(システム オン チップ)が多くなってきた。

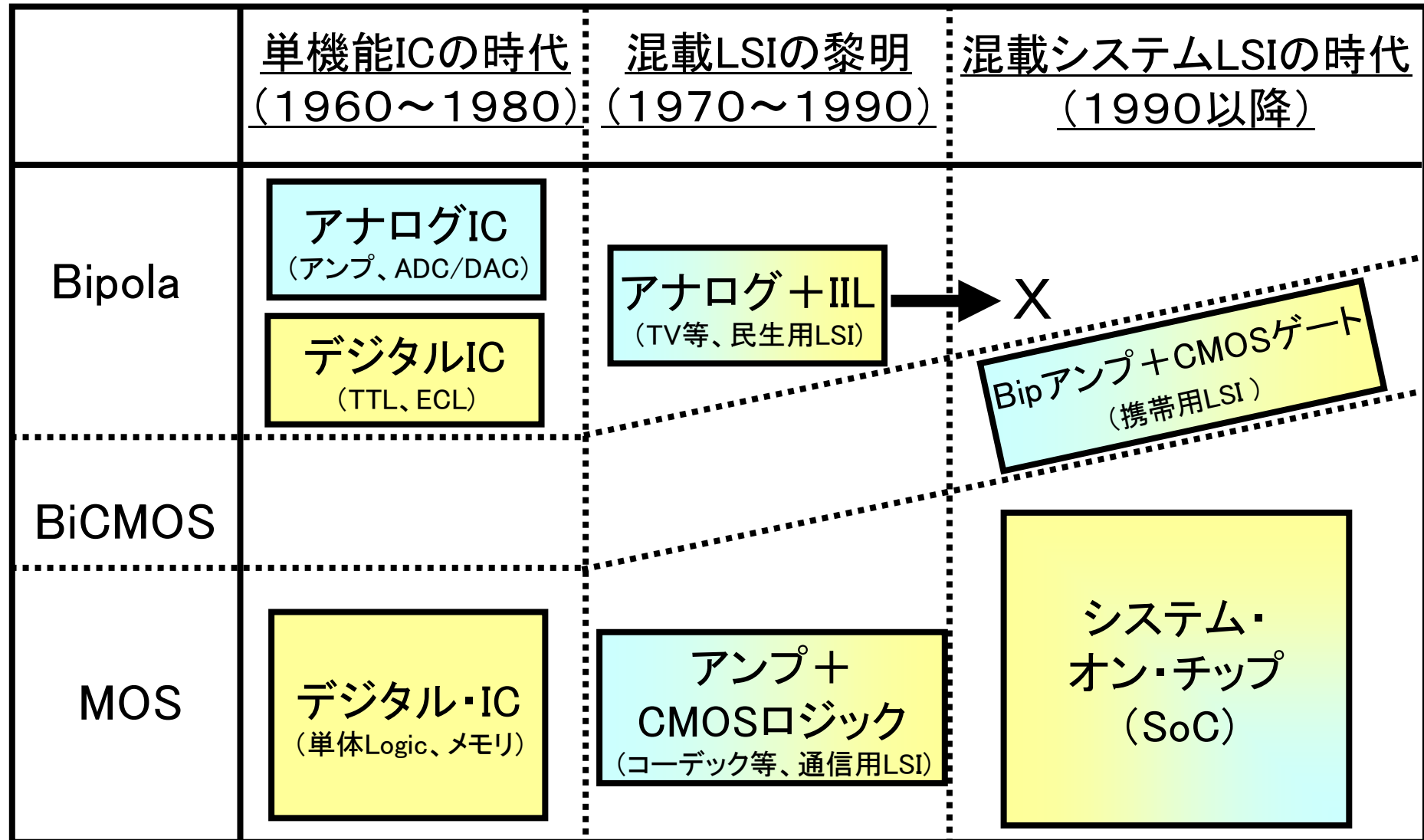
DVD用SoCはその代表例である。PRML用のAD変換器やサーボ制御用のアナログ回路のほか、CPUや16Mbit DRAM を搭載している。

最近ではGHz帯の超高周波ICもCMOSで実現できるようになってきた。

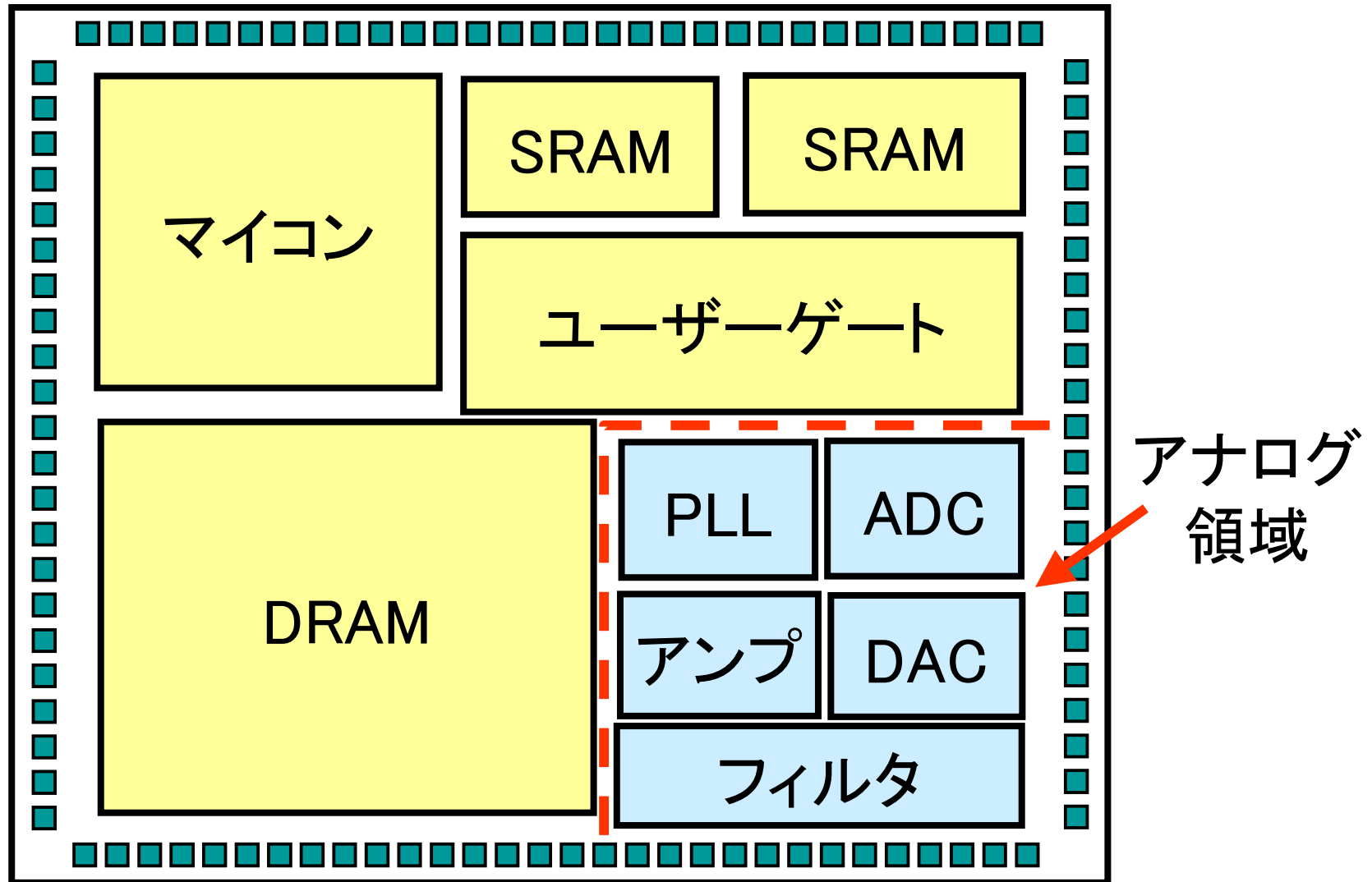
アナログ設計はいろんなパラメータに配慮要！
パラメータどうしのトレードオフに注意！

1. デジタル回路設計で考慮する主パラメータ⇒少ない
 - ・ 遅延
 - ・ ドライバビリティ(I_{ds} , 倍力)
 - ・ しきい電圧
 - ・ 回路構成は固定
2. アナログ回路設計で考慮する主パラメータ⇒非常に多い
 - ・ ゲイン
 - ・ 周波数特性
 - ・ 入出力インピーダンス
 - ・ 出力電流(ドライバビリティ)
 - ・ オフセット電圧
 - ・ ノイズ
 - ・ 信号振幅(ダイナミックレンジ)
 - ・ 電源/温度変動依存性(ドリフト)
 - ・ 消費電力
 - ・ 回路構成
 - ・ その他

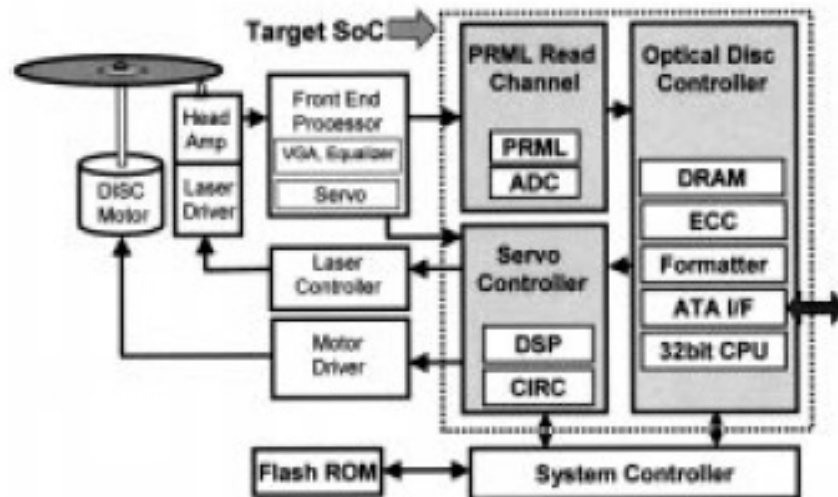
アナログ・デジタル混載LSIの歴史



アナログ・デジタル混載システムLSI

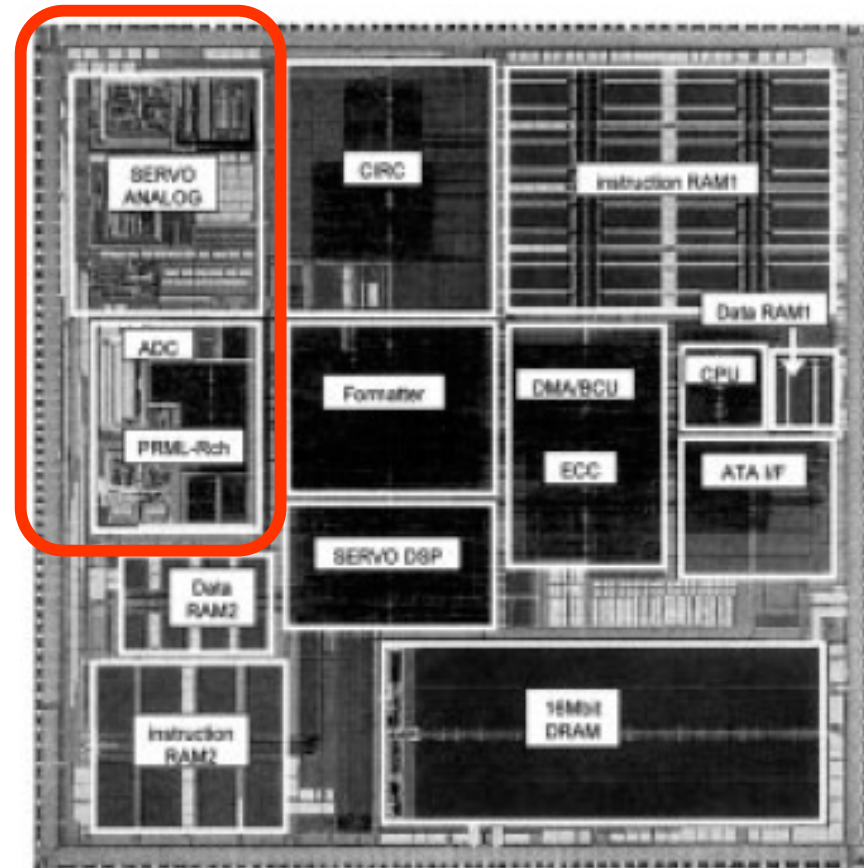


アナログ・デジタル混載システムLSI例 (DVDシステム)



Read Channel Maximum Operating speed	432Mps (DVD 16x playback)
Package	208 pin LQFP
Process technology	0.18um triple-metal CMOS
Power supply	5.0V $\pm$ 0.5V (ATA IF) 3.3V $\pm$ 0.3V (Analog) 1.8V $\pm$ 0.15V (Digital)
Built-in DRAM (read/write buffer)	16Mbit
Die size	144mm ² (12.0mm x 12.0mm)
Number of transistors	24M
Power Dissipation	1.2 W@432Mps (DVD 16x playback)

アナログ領域



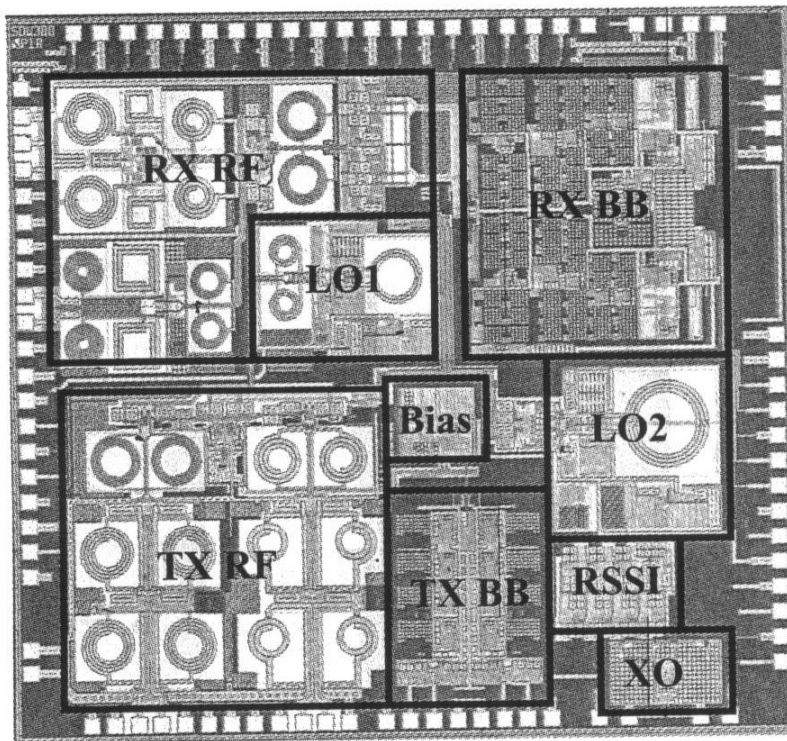
出典: T.Yamamoto, et al (松下電産)

“A Mixed-Signal 0.18um CMOS SoC for DVD Systems with 432Mps PRML Read-channel and 16Mb Embedded DRAM”
IEEE, JSSC Vol.36, No11, 2001, pp1785-1794

アナログ・システムLSI 例 (WLAN トランシーバ)

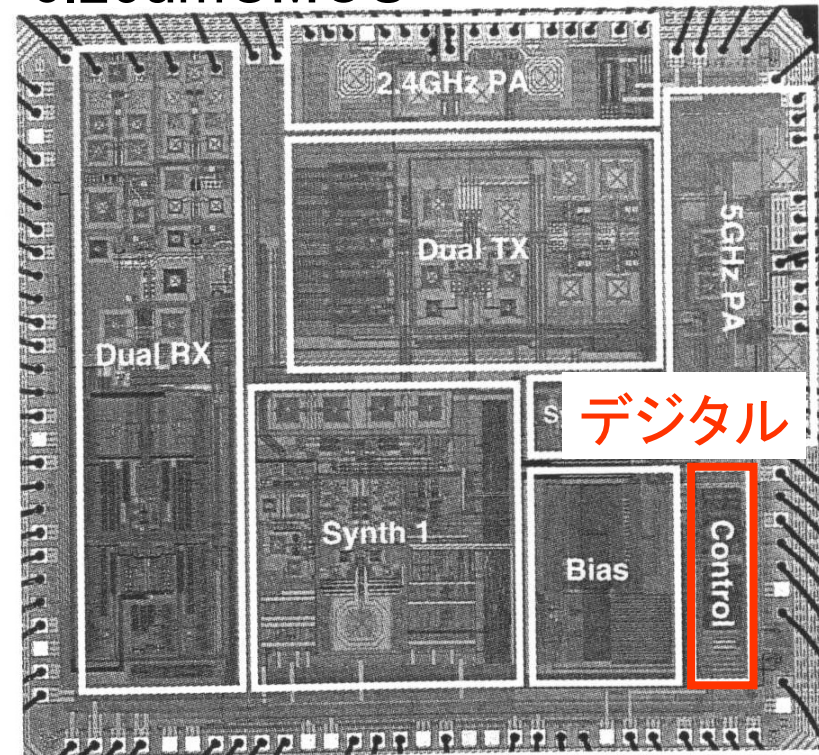
GHz帯の超高周波用アナログLSIもCMOSで実現

0.18 μ m CMOS



出典: R.Ahola, et al (Spirea, Finland)
“A Single-Chip CMOS Transceiver for 802.11a/b/g WLANs”
ISSCC2004, 5-2, pp92-93 (2004.2)

0.25 μ m CMOS



出典: M.Zargan, et al (Atheros, USA)
“A Single-Chip Dual Band Tri-Mode CMOS Transceiver for IEEE
802.11a/b/g WLAN” ISSCC2004, 5-4, pp96-97 (2004.2)

アナログ信号とデジタル信号

アナログ信号

連続的な信号

例：自然界の信号（音声、電波）、アナログ時計
「坂道」

デジタル信号

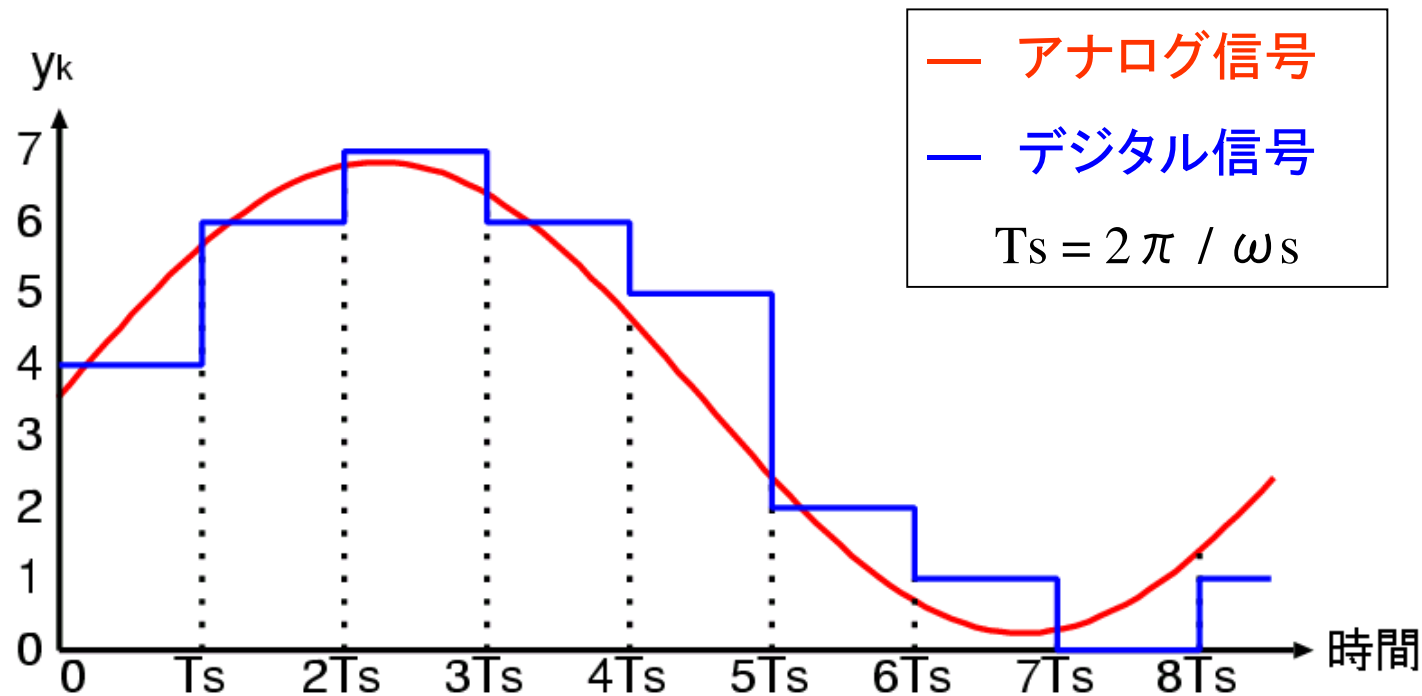
離散的・数値で表現された信号

例：コンピュータ内での2進数で表現された信号
デジタル時計
「階段」



デジタル信号の特徴(1)

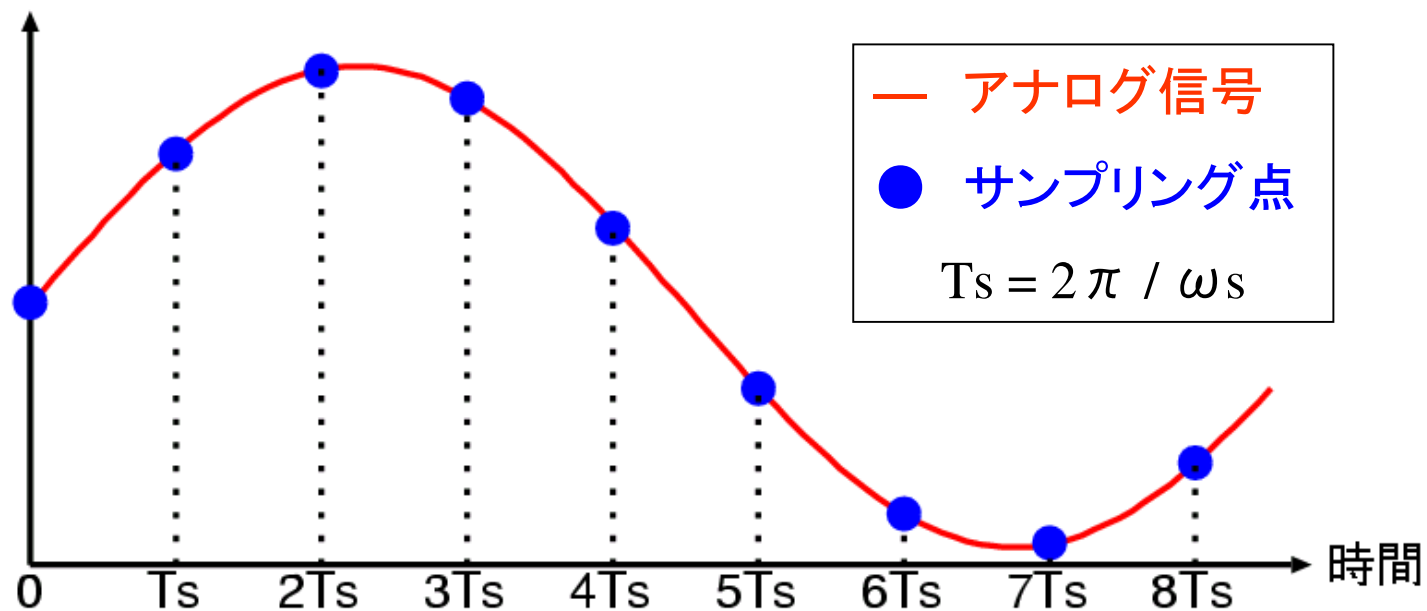
空間の量子化 (信号レベルの数値化)



デジタル信号はアナログ信号レベルを
四捨五入(または切り捨て)

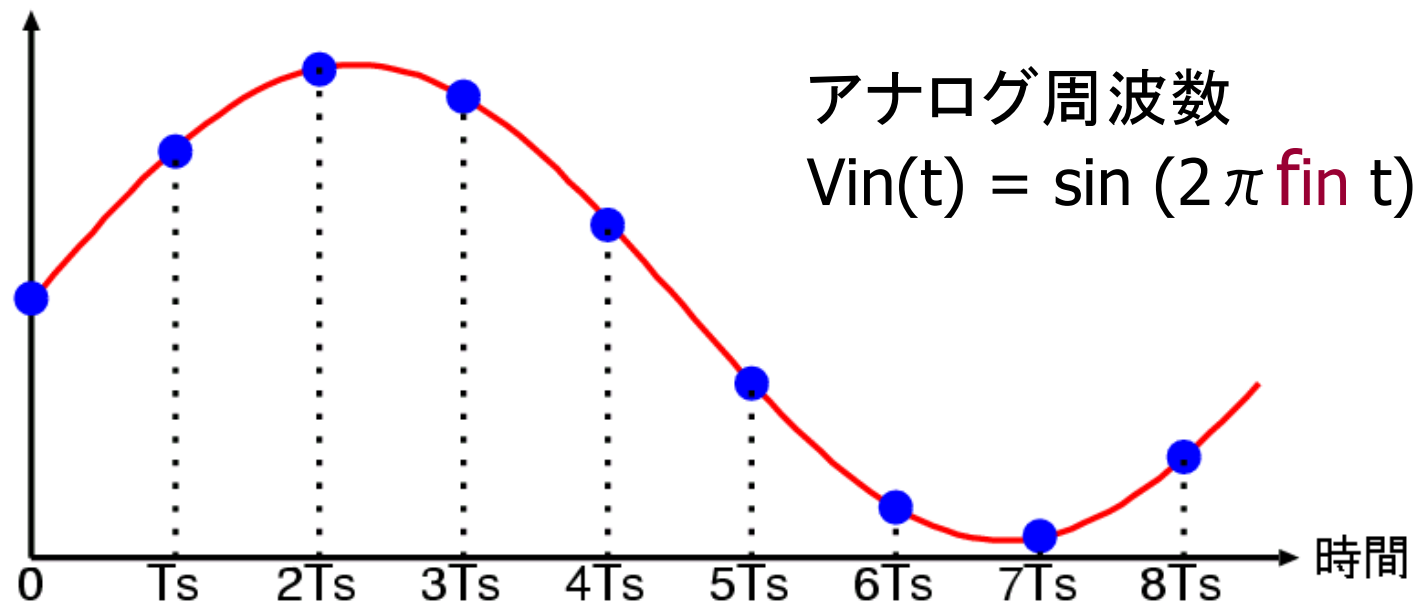
デジタル信号の特徴(1)

時間の量子化 (サンプリング)



一定時間間隔のデータを取り、間のデータは捨ててしまう。

サンプリング定理



サンプリング周波数 $f_s = 1/T_s$

$f_s > 2 f_{in}$ ならば サンプリングされたデータ(●)から
アナログデータ(—)が復元できる。

デジタル信号処理システムと AD/DA変換回路



アナログ デジタル デジタル アナログ

AD変換器: アナログ・デジタル変換回路

DA変換器: デジタル・アナログ変換回路

(重要) 自然界の信号は全てアナログ

ex. 音声、電波、電圧、電流、

アナログ回路が不要になることはない！！

1. アナログICの動向および最近の状況
2. 電子回路 線形と非線形
3. 電子回路で扱う主要部品および基本的な性質
4. 電子回路によく出てくる信号
5. 伝達関数と周波数特性
6. インパルス応答、ステップ応答
7. 伝達関数の基本的な性質
8. 付録 フーリエ変換とラプラス変換

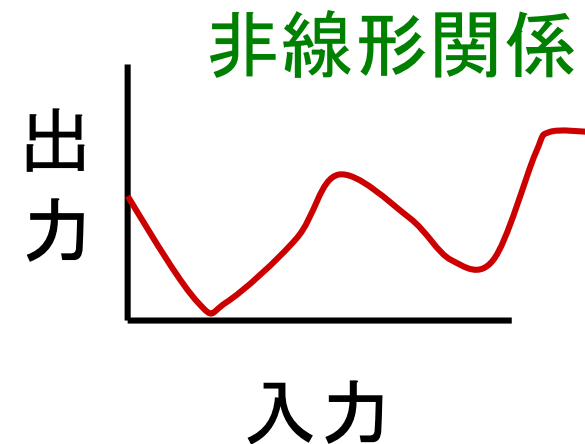
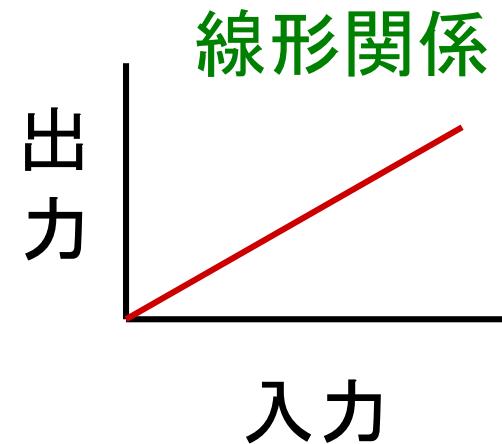


線形と非線形

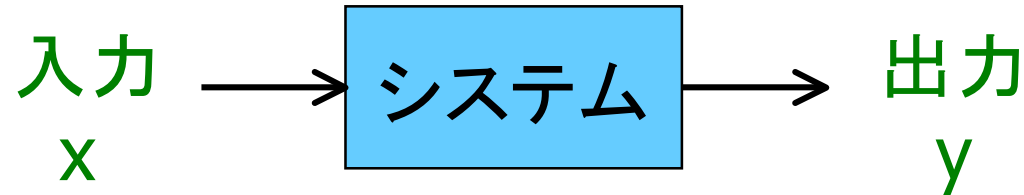
線形： 真っ直ぐ

線形 = 直線、比例

非線形： 曲がっている



重ね合わせの原理



線形システム とは

重ね合わせの原理 が成立するシステム

入力 x_1 $\rightarrow$ 出力 y_1

入力 x_2 $\rightarrow$ 出力 y_2



任意定数 a_1, a_2

入力 $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$ $\rightarrow$ 出力 $a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2$

線形システムの例(比例)



入力 x_1 → 出力 $y_1 = k \cdot x_1$

入力 x_2 → 出力 $y_2 = k \cdot x_2$

積分システム、微分システムも
線形

任意定数 a_1, a_2

入力 $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$

出力 $y = k (a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2)$
 $= a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2$

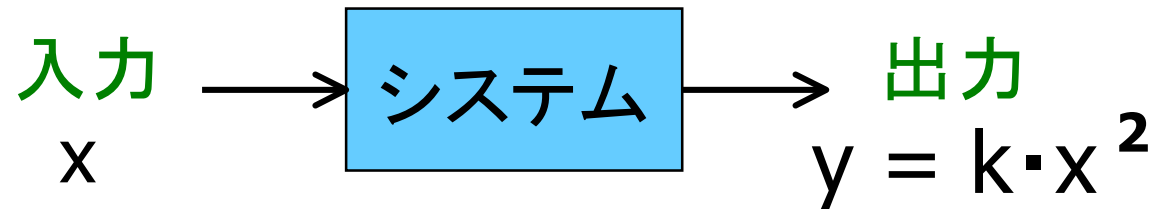
$$y(t) = \int^t x(p) dp$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$



システムは線形である。

線形システムでない例



入力 x_1 $\rightarrow$ 出力 $y_1 = k \cdot x_1^2$

入力 x_2 $\rightarrow$ 出力 $y_2 = k \cdot x_2^2$

任意定数 a_1, a_2

入力 $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2$

出力 $y = k (a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2)^2$

$\neq a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2$

$\Rightarrow$ システムは線形でない(非線形である)。

アナログ乗算器

ー ギルバート乗算器 ー

Barrie Gilbert:

アナログ・デバイセズ社の
ベテラン技術者(アナログの神様)

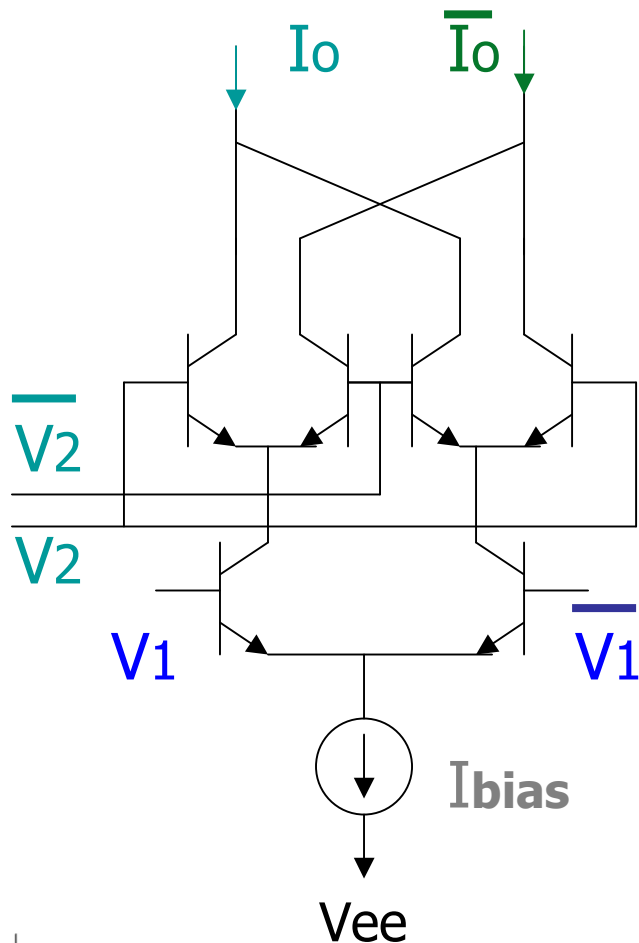
デジタル回路で用いるとき: EXOR回路

アナログ回路で用いるとき: 乗算回路

$$Y = X^2$$

乗算回路は非線形回路

ギルバート・アナログ乗算回路 (Gilbert Multiplier)

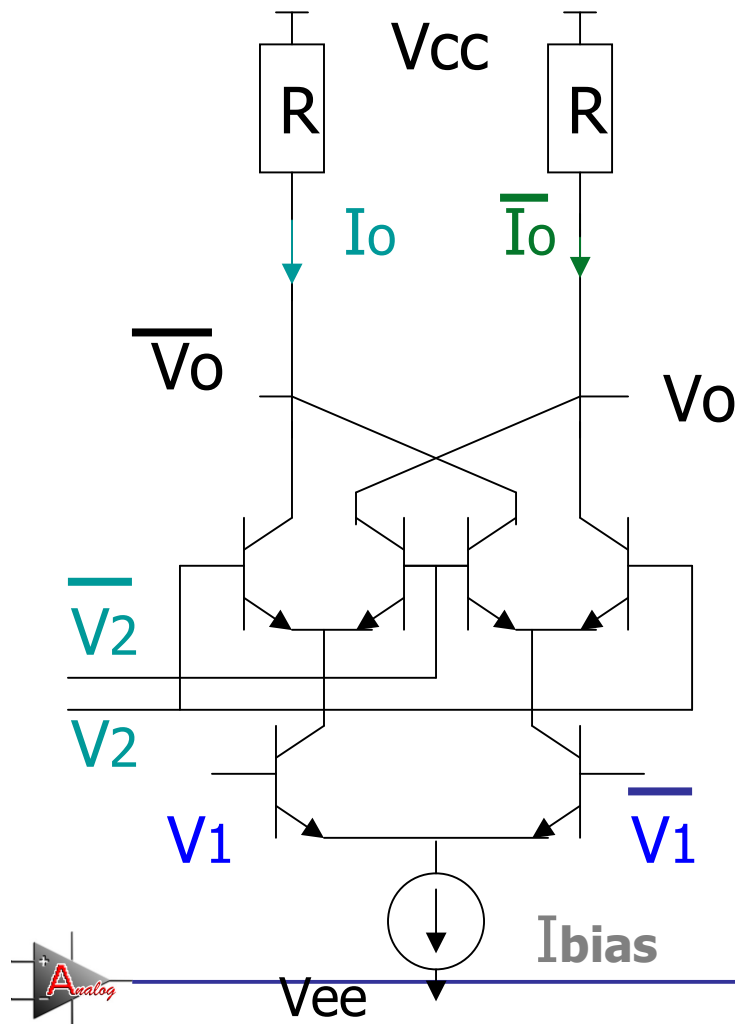


$$I_o - \bar{I}_o = I_{bias} \times \tanh \left[\frac{(V_1 - \bar{V}_1)}{(2V_T)} \right] \times \tanh \left[\frac{(V_2 - \bar{V}_2)}{(2V_T)} \right]$$

$V_1 \doteq \bar{V}_1, V_2 \doteq \bar{V}_2$ のとき

$$I_o - \bar{I}_o = I_{bias} (V_1 - \bar{V}_1) (V_2 - \bar{V}_2) / (2V_T)^2$$

ギルバート・アナログ乗算回路 電圧出力



$$V_O = V_{CC} - R \overline{I_O}$$

$$\overline{V}_O = V_{CC} - R I_O$$

$$V_O - \overline{V}_O = R (I_O - \overline{I_O})$$

$$R \cdot I_{bias} \times$$

$$\tanh [(V_1 - \overline{V}_1) / (2V_T)] \times$$

$$\tanh [(V_2 - \overline{V}_2) / (2V_T)]$$

トランジスタを用いた アナログ電子回路設計とは何か

トランジスタ: 信号の増幅機能、**非**線形特性

R, C, L: 受動素子、線形特性

アナログ回路: (多くのものは)線形特性、リニアIC:

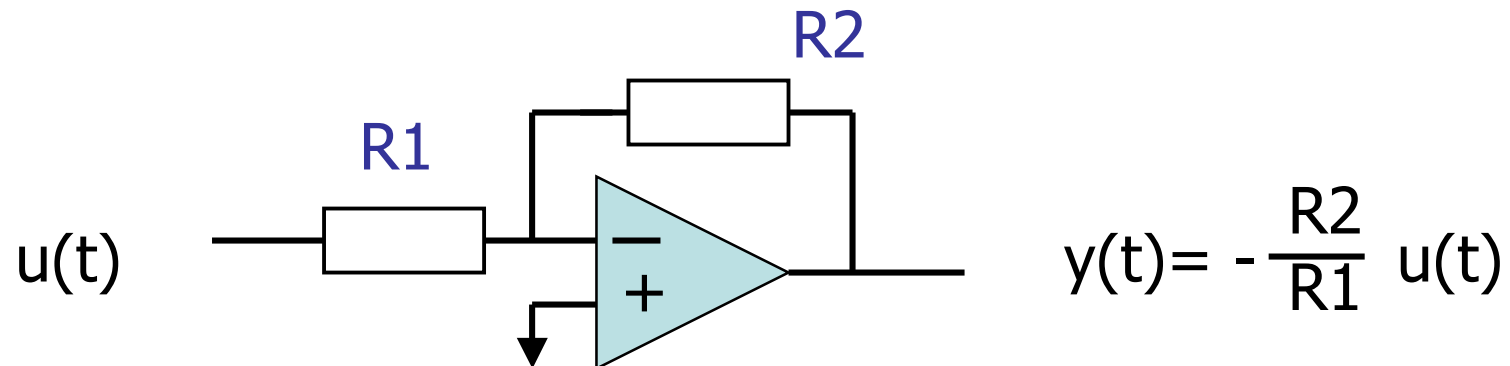
「信号増幅機能をもつ**非**線形素子(トランジスタ)と

増幅機能をもたない線形素子(R,C,L)

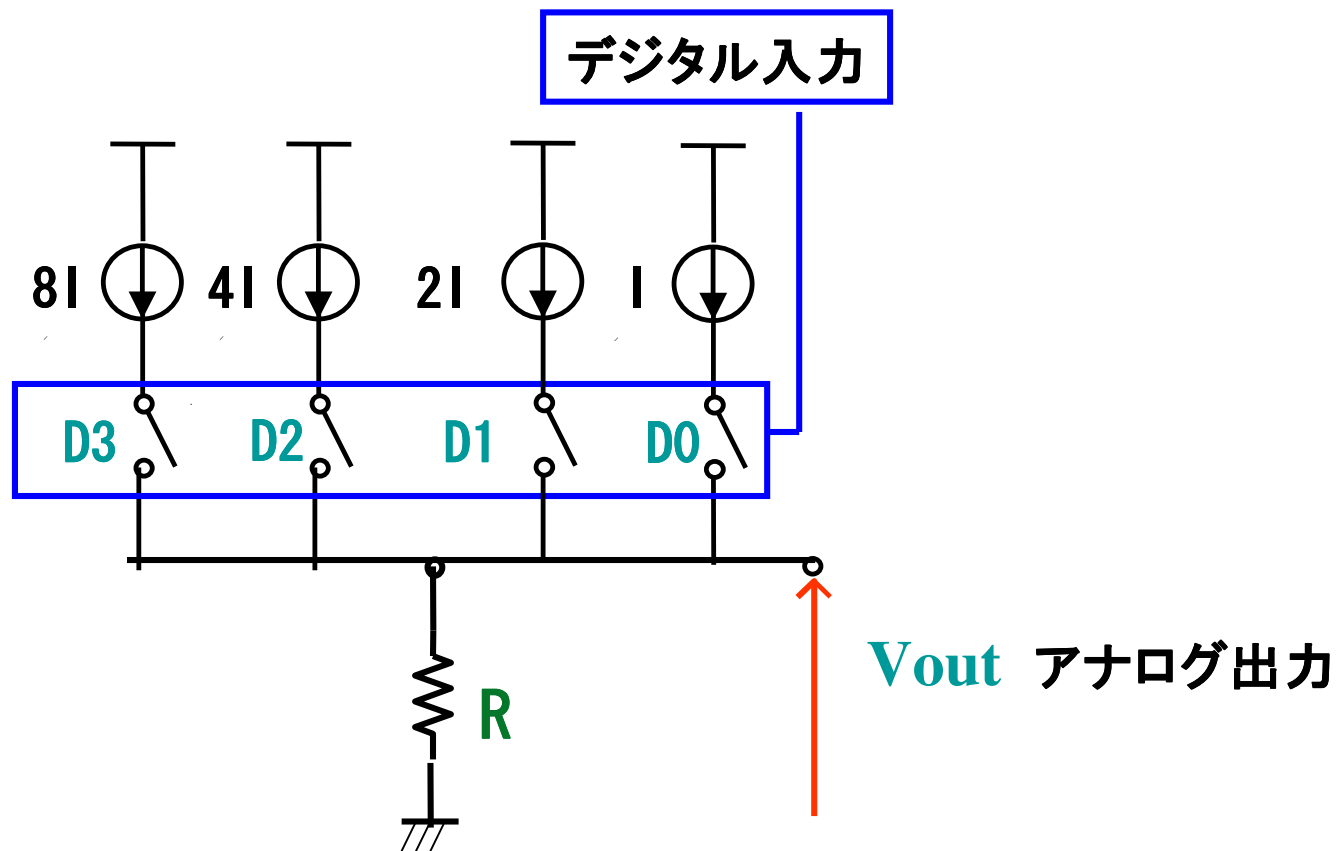
を組み合わせ

信号増幅機能をもつ線形なシステム(電子回路、アンプ)

を設計すること」

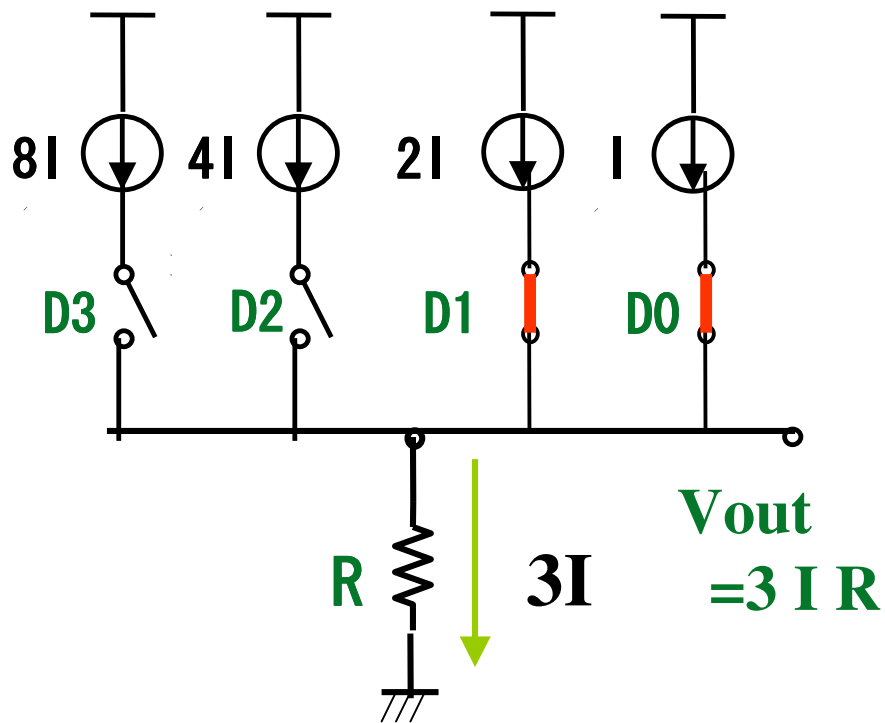


2進重み付けDA変換回路 (回路)



2進重み付けDA変換回路 (動作)

例：入力データが3のとき

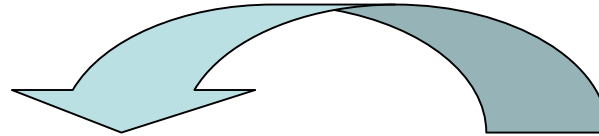


例：入力データが8のとき

The diagram shows the same 4-bit weighted DAC circuit as the previous example. In this example, the input data is 8, which corresponds to $D3=1$ and $D0=1$, while $D2=0$ and $D1=0$. The switches $D3$ and $D0$ are shown in a closed state (indicated by red vertical bars), while $D2$ and $D1$ are open. The output node is connected to ground through a resistor R . A green arrow points downwards from the output node, labeled $8I$. The output voltage is labeled $V_{out} = 8IR$.

© Gunma University

2進重み付けDA変換回路 (原理)



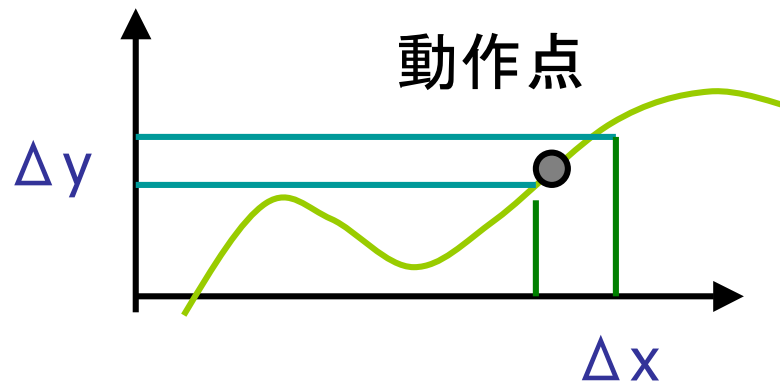
デジタル 入力データ	スイッチ				出力 Vout
	D3	D2	D1	D0	
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1R
2	0	0	1	0	2R
3	0	0	1	1	3R
4	0	1	0	0	4R
5	0	1	0	1	5R
6	0	1	1	0	6R
7	0	1	1	1	7R
8	1	0	0	0	8R
⋮			⋮		⋮
15	1	1	1	1	15R

スイッチ 1のとき ON
0のとき OFF

デジタル入力データに
比例したアナログ出力
Vout が生成される。

非線形システムの線形近似

非線形システム も動作範囲を限れば
線形システムに近似して扱える。



$$\Delta y = k \cdot \Delta x$$

k: 比例係数、
傾き、
微分ゲイン

電子回路での

小信号解析: 線形解析 オペアンプ等

大信号解析: 非線形解析 発振回路等

線形性と物理学、数学

19, 20世紀に物理学は大きな進歩

→ 線形なシステムを扱ったから

Newton力学:

$$F=ma, \quad F_1 + F_2 = m (a_1 + a_2)$$

電磁気学: Maxwell の方程式

線形代数、線形微分方程式

線形を扱う数学 → 非常に発展してきた。

非線形を扱う数学 → 非常に難しい。

1. アナログICの動向および最近の状況
2. 電子回路 線形と非線形
3. 電子回路で扱う主要部品および基本的な性質
4. 電子回路によく出てくる信号
5. 伝達関数と周波数特性
6. インパルス応答、ステップ応答
7. 伝達関数の基本的な性質
8. 付録 フーリエ変換とラプラス変換

アナログ回路で使うデバイスおよび主要記号

受動デバイス

抵抗

R 

コンデンサ
(キャパシタ)

C 

インダクタンス

L 

電源・グランド

グランド



電圧源

V  

交流電源 直流電源

電流源

I 

入力電圧
従属電圧源

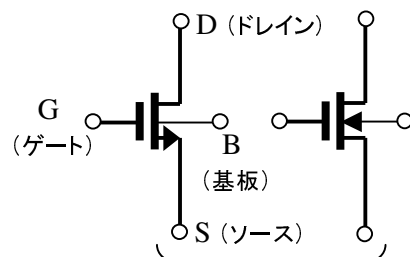
V_i  $A \cdot V_i$

入力電圧
従属電流源

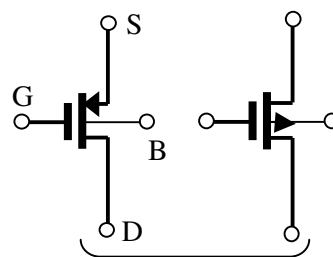
V_i  $g_m \cdot V_i$

能動デバイス

MOSトランジスタ

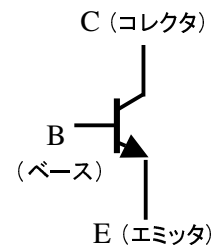
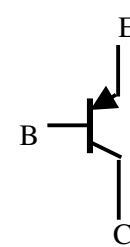


NMOSトランジスタ



PMOSトランジスタ

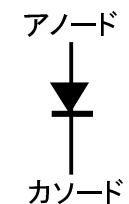
バイポーラトランジスタ

nnpトランジスタ

pnpトランジスタ

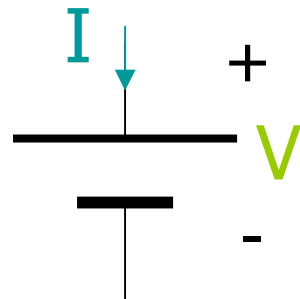
ダイオード



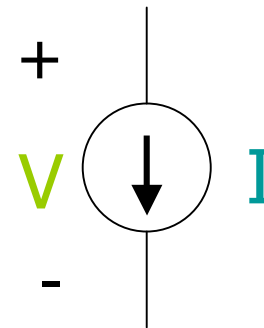
電圧源と電流源

電圧源： 流れる電流にかかわらず
一定電圧 V を供給する。

電流源： 両端にかかる電圧にかかわらず
一定電流 I を供給する。



電圧源



電流源

電流モードと電圧モード

電圧の加減算、コピー、定数倍等は
電流ほどは簡単にはできない。

しかし、実際の回路では信号伝達・演算は
電圧で行うことが多く(電圧モード回路)、
一部でのみ電流で信号伝達・演算
(電流モード回路)を使用するとうまくいく場合が多い。

アナログ回路で使うデバイスおよび主要記号

受動デバイス

受動デバイスの代表例は、抵抗、コンデンサ(キャパシタ、容量とも呼ぶ)、インダクタンスである。それぞれ記号は上図に示した通りである。

電源、グランド

グランドはGNDあるいは接地と表現することもある。また、記号も種々あり、上図に代表例を示した。アナログ・デジタル混載回路で、アナロググランドとデジタルグランドを区別するために別々の記号を使ったりする。

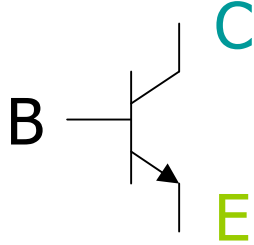
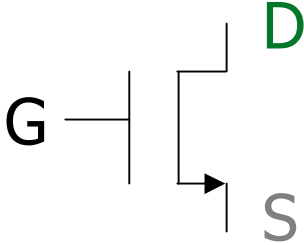
電圧源は負荷の大小にかかわらず設定電圧を出力するもので、たとえば5V電源は100kAの電流を出力しても5Vで一定である。同様に、たとえば10mAの電流源は電流源の両端に100kV印加されても10mAの電流を流し続ける。

また、トランジスタやアンプを簡単な等価モデルで表現する場合に使用する入力電圧従属電圧源や入力電圧従属電流源がある。前者は入力電圧に追従して出力電圧が変化するもので、後者は入力電圧に追従して出力電流が変化するものである。

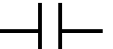
能動デバイス

能動デバイスの代表例は、トランジスタとダイオードである。トランジスタにはMOSトランジスタ(MOSFET)とバイポーラトランジスタがある。記号の一例を上図に示した。電流の向きを考慮して、通常、NMOS(またはnnp)では、上をドレイン(またはコレクタ)にし、PMOS(またはpnp)では逆に上をソース(またはエミッタ)にすることが多い。

正電源、負電源の表記

回路図	バイポーラ トランジスタ回路	CMOS トランジスタ回路
正電源 (電圧が高い方)	Vcc	Vdd
負電源 (電圧が低い方)	Vee	Vss
理 由		

R,C,Lの直流抵抗および交流抵抗(インピーダンス)

	直流抵抗値	交流抵抗値(インピーダンスZと呼ぶ)
R 	R	$Z=R$
C 	∞	$Z = \frac{1}{j\omega C}$ または $\frac{1}{sC}$
L 	0	$Z = j\omega L$ または sL

ここで、j:虚数($j^2=-1$)、 ω :角周波数、s:ラプラスの演算子で、 $s=\sigma+j\omega$

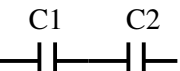
直列と並列

直列接続

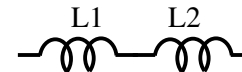


等価値

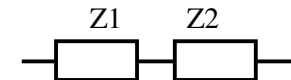
$$R1 + R2$$



$$\frac{1}{1/C1 + 1/C2} = \frac{C1 \cdot C2}{C1 + C2}$$

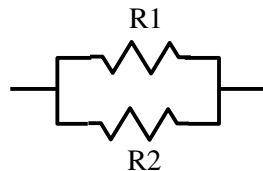


$$L1 + L2$$

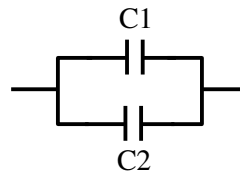


$$Z1 + Z2$$

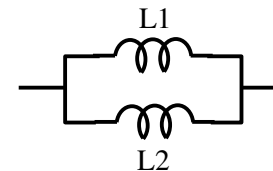
並列接続



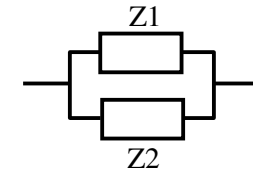
等価値 $R1 // R2 = \frac{1}{1/R1 + 1/R2} = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$



$$C1 + C2$$



$$L1 // L2 = \frac{L1 \cdot L2}{L1 + L2}$$



$$Z1 // Z2 = \frac{Z1 \cdot Z2}{Z1 + Z2}$$

R, C, L の直流抵抗および交流抵抗(インピーダンス)**直流抵抗**

直流抵抗は抵抗Rにのみ存在し、理想容量Cでは無限大であり、理想インダクタンスLでは0である。

交流抵抗

交流抵抗は総称してインピーダンスと呼び、Zで表現することが多い。交流では、容量およびインダクタンスも有意なインピーダンスを持ち、単位は Ω である。上表に表記したように、容量CおよびインダクタンスLは、それぞれ

$$Z = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{または} \quad \frac{1}{sC}$$

$$Z = j\omega L \quad \text{または} \quad sL$$

ここで、 ω は角周波数で、 $\omega = 2\pi f$

である。

$j\omega$ は交流信号源が正弦波信号の場合に利用でき、後で出てくる周波数特性の解析で使う。虚数を表す記号jは、素子の両端電圧と素子に流れる電流の位相が90度ずれていることを表現しており、分子のjは位相が進み、分母のjは位相遅れを表す。

また、sはラプラスの演算子と呼び、ステップ応答など、より一般的な信号の解析に使う。

【インピーダンスの計算例】

(1) 容量C=10pF, f=10MHzのインピーダンスZcを計算してみよう。

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \times 2 \times 3.14 \times 10^7 \times 10^{-11}} = \frac{1}{j} \times 1.6 \times 10^3$$

$$\therefore \text{インピーダンス } |Z_c| = 1.6k\Omega$$

直列接続と並列接続

素子を直列接続した場合と並列接続した場合の等価素子値を上記した。抵抗RとインダクタンスLは同じように表現できるが、容量Cの等価値は逆になることに注意する必要がある。

ここで、並列を表す記号として // を使ったが、これは公式の記号ではない。

【計算例】

(1) 2つの抵抗、R1=1k Ω , R2=3k Ω の直列および並列抵抗値を求めよ。

直列抵抗値： $R = R1 + R2 = 4k\Omega$

$$\text{並列抵抗値：} R = \frac{1}{1/R1 + 1/R2} = \frac{1}{1/1k + 1/3k} = \frac{3}{4}k = 0.75k\Omega$$

(2) 2つの容量、C1=10pF, C2=1000pFの直列および並列容量は？

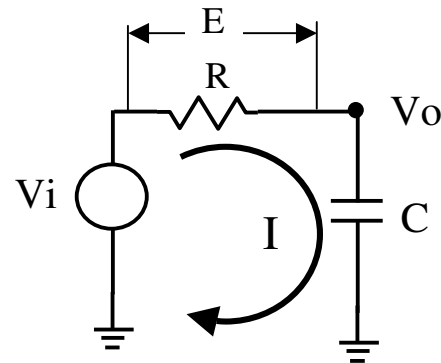
並列容量値： $C = C1 + C2 = 1010pF \approx 1000p$

$$\text{直列容量値：} C = \frac{1}{1/C1 + 1/C2} = \frac{1}{1/10p + 1/1000p} = \frac{1000}{101}p \approx 10p$$

2つの容量比が大きい場合、並列接続では大きい方の容量値で、直列の場合は小さい方の容量値で等価容量が決まる。

回路解析に必要な基本法則 (オームの法則、キルヒホッフの法則)

オームの法則

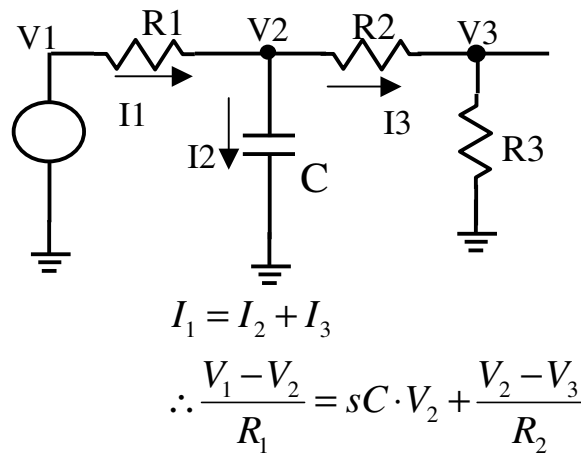


$$E = R \cdot I$$

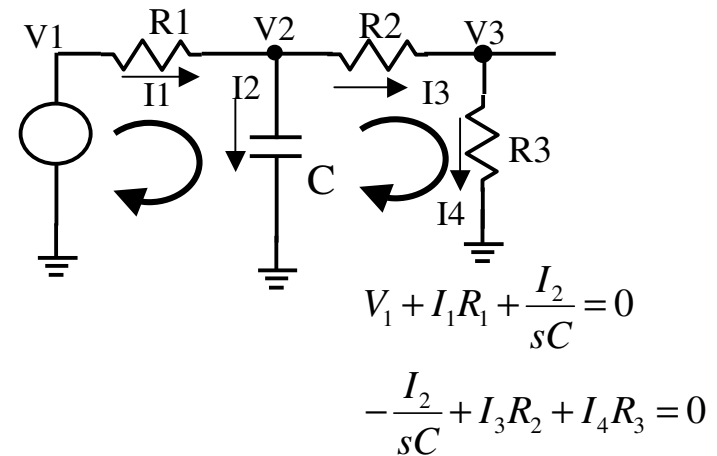
$$I = E / R$$

キルヒホッフの法則

(1) 電流則: あるノードに流れ込む電流と流れ出す電流は等しい



(2) 電圧則: 回路内の任意の閉路において、閉路内の各素子の電圧の総和は0となる。



オームの法則およびキルヒホッフの法則

オームの法則

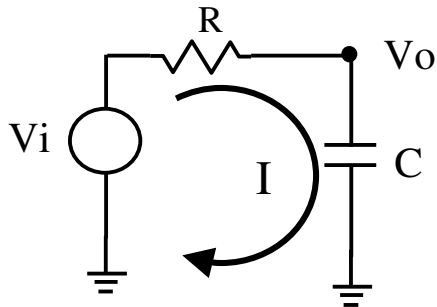
回路解析のもっとも基本的な法則である。上図のように、ある回路に電圧を印加して電流が流れた場合、抵抗 R の両端電位 E と、電流 I の関係は

$$E = R \cdot I$$

で表される。これをオームの法則という。

【計算例】

下図の電圧 V_o をもとめよ。



電流 I は、

$$I = \frac{V_i}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$V_o = I \cdot \frac{1}{sC}$$

$$= \frac{V_i}{R + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{1}{sC} = \frac{V_i}{sCR + 1}$$

キルヒホッフの法則

キルヒホッフの法則には電流則と電圧則がある。回路解析でよく使うが、当然ながらどちらで解析しても同じ結果が得られる。

(1) 電流則

「回路網において、あるノードに流れ込む電流と流れ出す電流は等しい」という性質である。上図の例では次式が成り立つ。

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$\therefore \frac{V_1 - V_2}{R_1} = sC \cdot V_2 + \frac{V_2 - V_3}{R_2}$$

(2) 電圧則

「回路網内の任意の閉路において、閉路内の各素子の電圧の総和は0となる」という性質である。上図の例では次式が成り立つ。

2つの閉路に対し、

$$V_1 + I_1 R_1 + \frac{I_2}{sC} = 0$$

$$-\frac{I_2}{sC} + I_3 R_2 + I_4 R_3 = 0$$

ゲオルク・ジーモン・オーム

Georg Simon Ohm 1789–1854



ドイツの物理学者

ミュンヘン大学の実験物理学教授

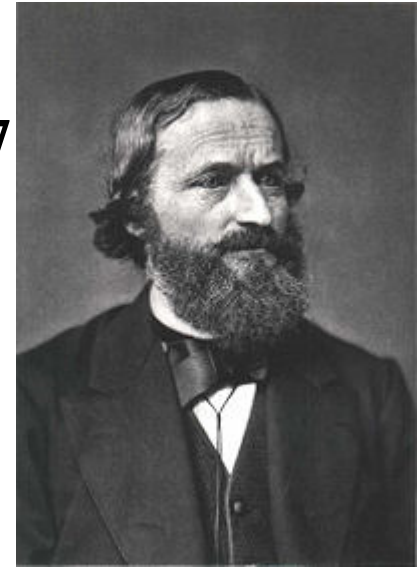
1827年に発表した「Die galvanische Kette
Mathematisch Bearbeitet」

のなかで、電圧が抵抗と電流の積になるという
オームの法則を発表。

グスタフ・ローベルト・キルヒホフ

Gustav Robert Kirchhoff 1824-1887

ドイツの物理学者、ガウスの弟子
ベルリン大学 教授



多重通信の発達は回路網を複雑にした。
複雑な回路を流れる電流の計算を容易に
行うため、キルヒホフの法則を発見。
このとき20歳。

シングルエンド信号と差動信号(1)

- シングルエンド信号 (single-ended signal)
1本の信号線の信号の差で1つの信号を表す。

Vsig —————

Ex. $V_{sig} = \sin(\omega t)$

欠点: ノイズに弱い。

Vsig —————
ノイズ $n(t)$

Ex. $V_{sig} = \sin(\omega t) + n(t)$

シングルエンド信号と差動信号(2)

● 差動信号 (differential signal)

2本の信号線の信号の差で1つの信号を表す。

$$\begin{array}{l} V_{\text{sig}+} \text{ —————} \\ V_{\text{sig}-} \text{ —————} \end{array} \quad V_{\text{sig}} = V_{\text{sig}+} - V_{\text{sig}-}$$

たとえば

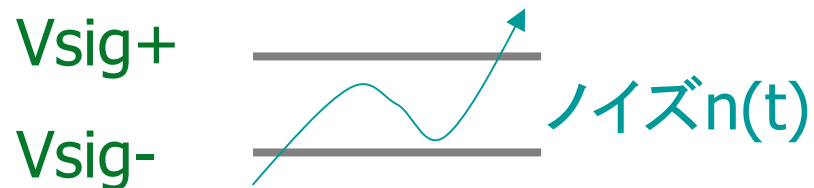
$$V_{\text{sig}+} = (1/2) \sin(\omega t), \quad V_{\text{sig}-} = -(1/2) \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow V_{\text{sig}} = V_{\text{sig}+} - V_{\text{sig}-} = \sin(\omega t)$$

シングルエンド信号と差動信号(3)

● 差動信号のメリット

ノイズの影響を受けにくい



$$V_{sin+} = (1/2) \sin(\omega t) + n(t)$$

$$V_{sin-} = -(1/2) \sin(\omega t) + n(t)$$

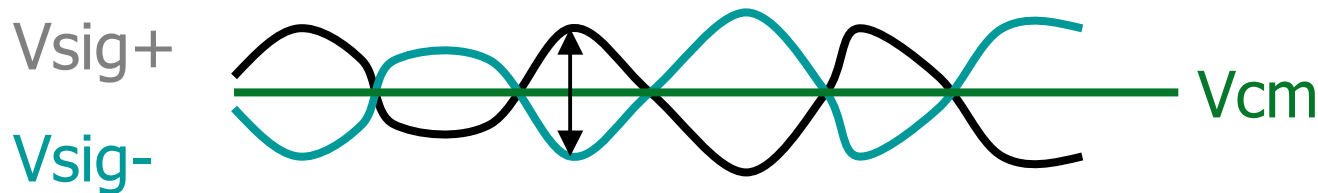
➡ $V_{sig} = V_{sig+} - V_{sig-} = \sin(\omega t)$

● 差動信号のデメリット

回路量 大 (信号線が2本必要)

シングルエンド信号と差動信号(4)

● 差動信号 (differential signal)



差動信号成分: $V_{sig} = V_{sig+} - V_{sig-}$

同相信号成分 (Common mode signal)

$$V_{cm} = (V_{sig+} + V_{sig-}) / 2$$

高速・高精度のアナログ回路の大部分は
差動信号を用いて設計されている。
(可能な限り差動信号・差動回路を用いること)

1. アナログICの動向および最近の状況
2. 電子回路 線形と非線形
3. 電子回路で扱う主要部品および基本的な性質
4. 電子回路によく出てくる信号
5. 伝達関数と周波数特性
6. インパルス応答、ステップ応答
7. 伝達関数の基本的な性質
8. 付録 フーリエ変換とラプラス変換

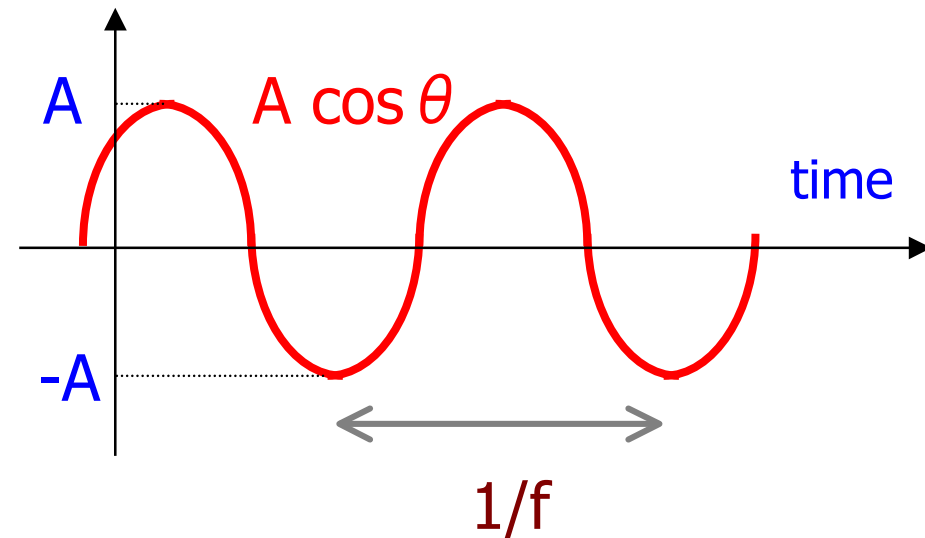


電子回路でよくでてくる信号

① 余弦波

$$c(t) = A \cos (2 \pi f t + \theta)$$

3要素: A : 振幅
 f : 周波数
 θ : 位相



$\omega = 2 \pi f$: 角周波数

- 振幅、周波数だけでなく位相も重要。
- 余弦波は電氣的・機械的に発生しやすい。

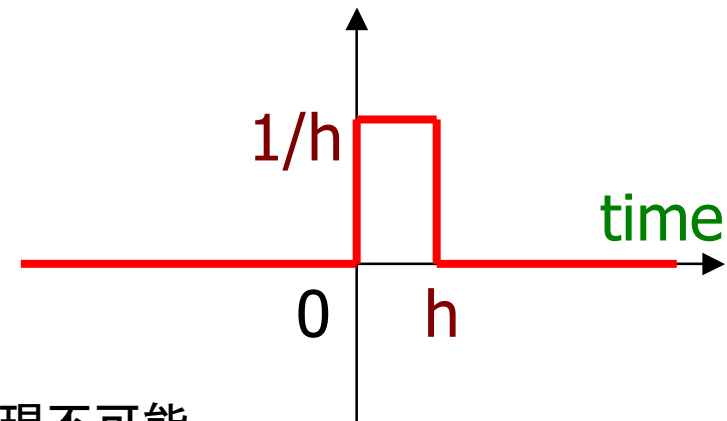
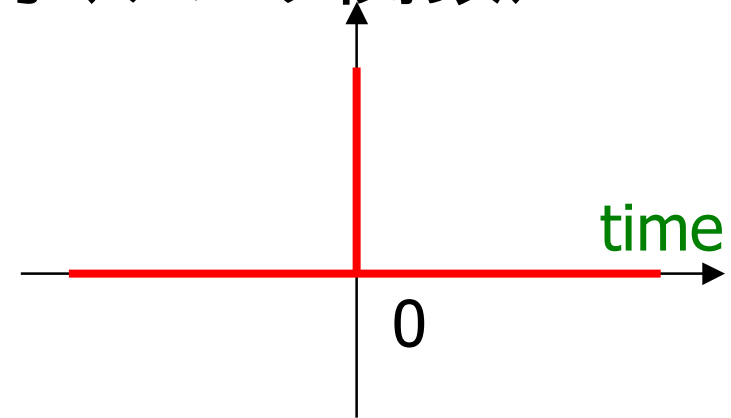
電子回路でよくでてくる信号

② インパルス信号(デルタ関数)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \infty & (t = 0) \\ 0 & (t > 0) \end{cases}$$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1/h & (0 < t < h) \\ 0 & (t > h) \end{cases}$$

$$(\text{注}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



- 厳密なインパルス信号は物理的に実現不可能。
- δ 関数を用いると理論展開に便利。

電子回路でよくでてくる信号

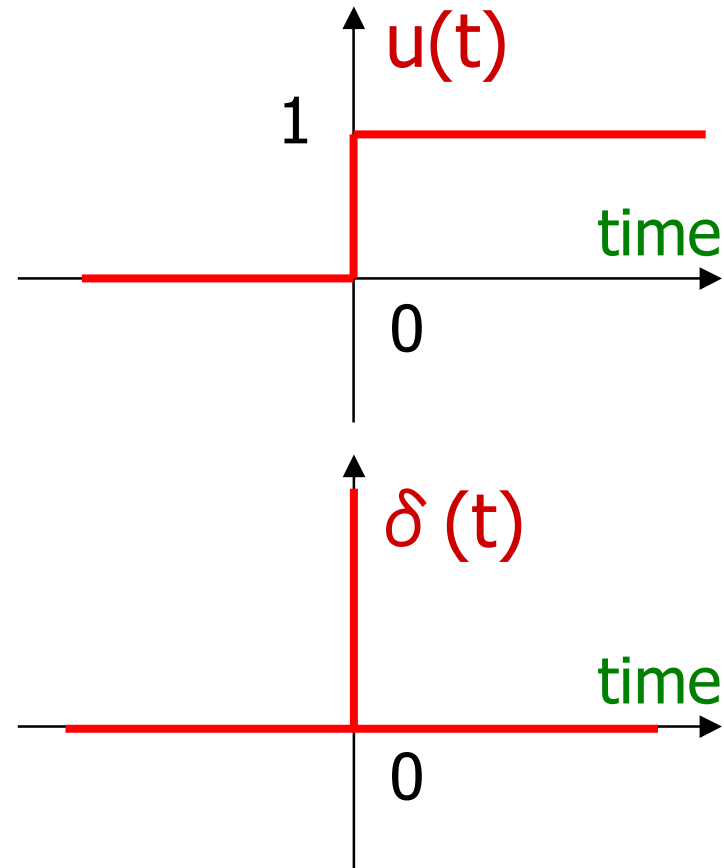
③ ステップ信号, ユニット関数

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

$$(\text{注}) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

に注意すると

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(p) dp$$



デルタ関数と余弦波との関係

● デルタ関数:

- 全ての周波数成分 ω を等パワーで含む。
- 位相が揃っている。
時刻ゼロで各周波数成分 ω の位相はゼロ。

● 太陽光(白色光):

- 全ての周波数成分 ω を等パワーで含む。
- 位相が揃っていない。

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega$$

近似

$$\tilde{\delta}(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_n t)$$
$$\omega_n = n\omega_0$$

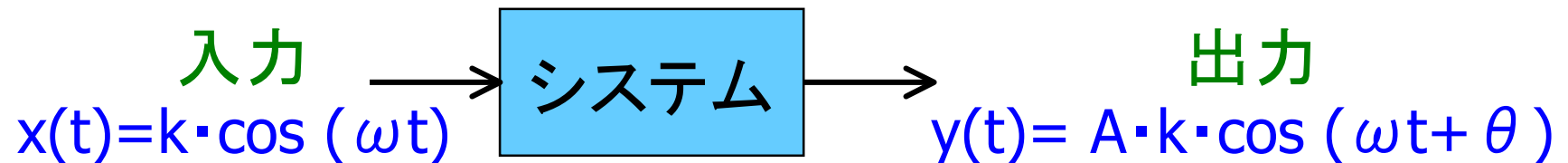
1. アナログICの動向および最近の状況
2. 電子回路 線形と非線形
3. 電子回路で扱う主要部品および基本的な性質
4. 電子回路によく出てくる信号
5. 伝達関数と周波数特性
6. インパルス応答、ステップ応答
7. 伝達関数の基本的な性質
8. 付録 フーリエ変換とラプラス変換



周波数応答法

- 安定な線形時不変システム(下図)の解析・設計に強力な手法。
- 電子回路だけでなく、自動制御、通信分野等でも広く用いられている。
- 周波数領域からのアプローチ。
- 数学的にはFourier変換(付録)と密接な関係。
- システム表現として、周波数伝達関数、ボーデ線図、ベクトル線図と密接な関係。

安定な線形・時不変システム



余弦波を入力し十分時間が経つと、出力 $y(t)$ は余弦波となる。

周波数応答法

入力: $x(t) = k \cdot \cos(\omega t)$

出力: $y(t) = A \cdot k \cdot \cos(\omega t + \theta)$

出力周波数 ω : 入力と同じ

出力振幅 $A \cdot k$: 一般に入力と異なる ($A \neq 1$),
また、 ω の関数 $A(\omega)$

出力位相 θ : 一般に入力と異なる ($\theta \neq 0$)
また、 ω の関数 $\theta(\omega)$

$$\frac{\text{出力振幅 } A \cdot k}{\text{入力振幅 } k} = \text{ゲイン } A$$

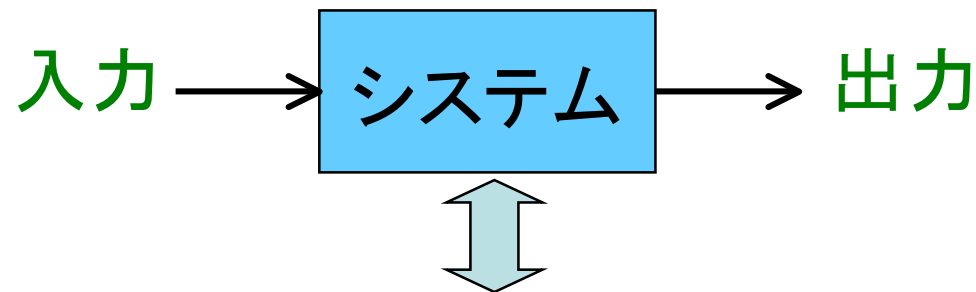


システムの周波数応答表現と 周波数伝達関数

ある安定・線形・時不変システムの特性を

そのシステムの全ての ω ($0 < \omega < \infty$) に対する $A(\omega)$, $\theta(\omega)$ で表す。

→ 周波数応答表現



全ての ω ($0 < \omega < \infty$) に対する $A(\omega)$, $\theta(\omega)$ のデータ

2つの情報: ゲイン $A(\omega)$, 位相 $\theta(\omega)$

→ 1つの複素数表現 (周波数伝達関数):

$$G(j\omega) = A(\omega) \exp(j\theta(\omega))$$

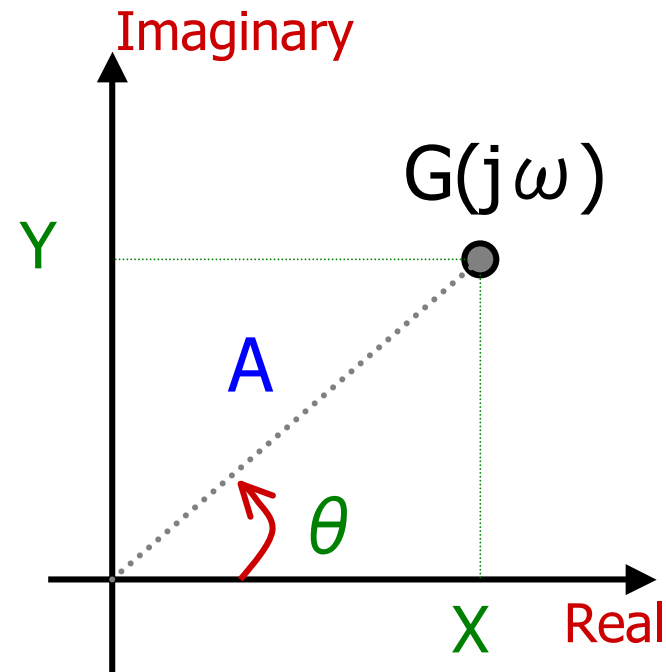
周波数伝達関数(極座標表示)

$$G(j\omega) = A(\omega) \exp(j\theta(\omega))$$
$$\equiv |G(j\omega)| \cdot \exp(j\angle G(j\omega))$$

ある ω に対する $G(j\omega)$



複素平面上の一点に対応。



(A, θ) はその複素数の極座標表示。

周波数伝達関数(直交座標表示)

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= A(\omega) \exp(j\theta(\omega)) \\ &= X(\omega) + jY(\omega) \end{aligned}$$

極座標表示 (A, θ) と
直交座標表示 (X, Y) との関係

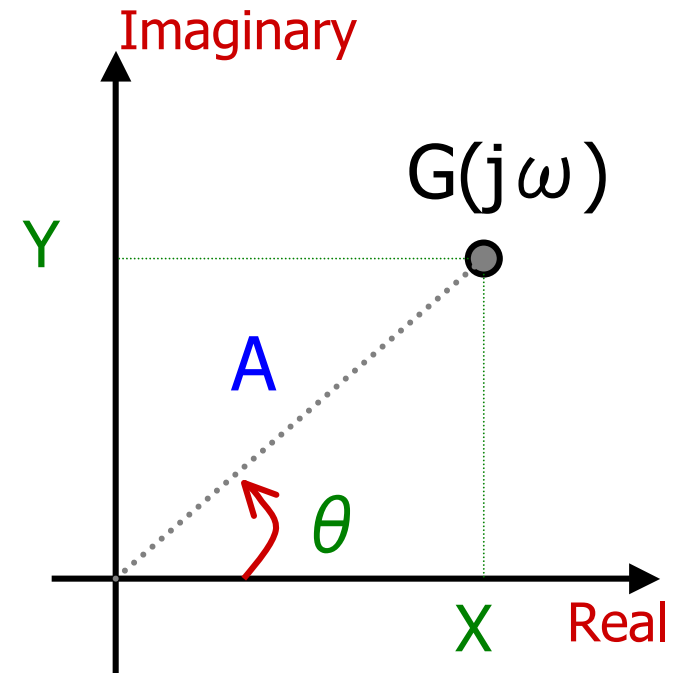
オイラーの公式

$$A \exp(j\theta) = A \cos(\theta) + j A \sin(\theta)$$

$$\therefore X = A \cos(\theta), Y = A \sin(\theta)$$

$$A^2 = X^2 + Y^2$$

$$\tan(\theta) = \frac{Y}{X}$$



オイラーの公式

- オイラーの公式

$$\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \quad \textcircled{1}$$

$$\exp(-j\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta) \quad \textcircled{2}$$

- 群馬大学の数学者 齋藤三郎先生の
「数学で最も美しい公式」

オイラーの公式①で $\theta = \pi$ の場合。

$$\exp(j\pi) = -1$$

レオンハルト・オイラー

Leonhard Euler 1707-1783

スイス生まれの数学者・物理学者、天文学者。
ロシアのサンクト・ペテルブルクや
ドイツのベルリンで活躍。



18 世紀最高の数学者。
ガリレオ・ガリレイ、アイザック・ニュートン、
アルベルト・アインシュタインとも比較される。

物理学者ファインマン： オイラーの公式を
「宝石」かつ「数学においてもっとも特筆すべき公式」と評価。

周波数伝達関数の図表現

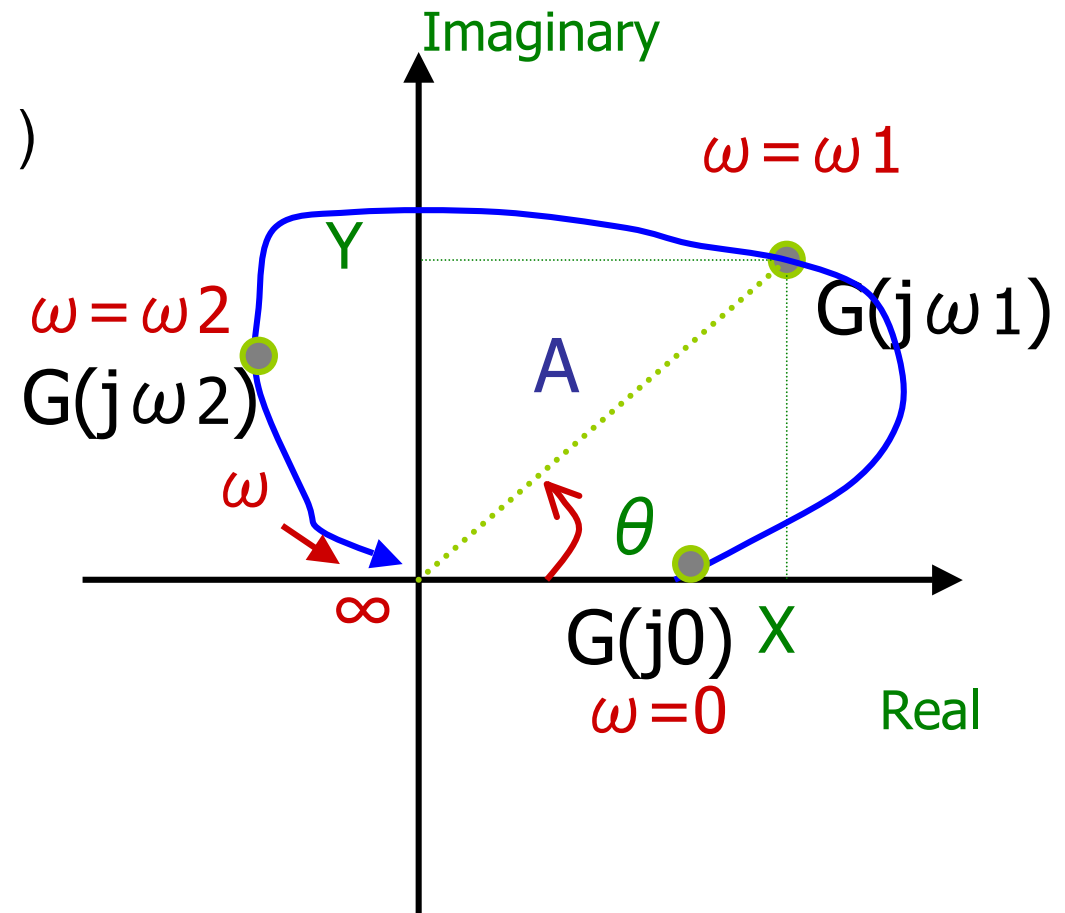
① ベクトル線図

$$G(j\omega) = A(\omega) \exp(j\theta(\omega))$$

$$= X(\omega) + jY(\omega)$$

ベクトル線図:

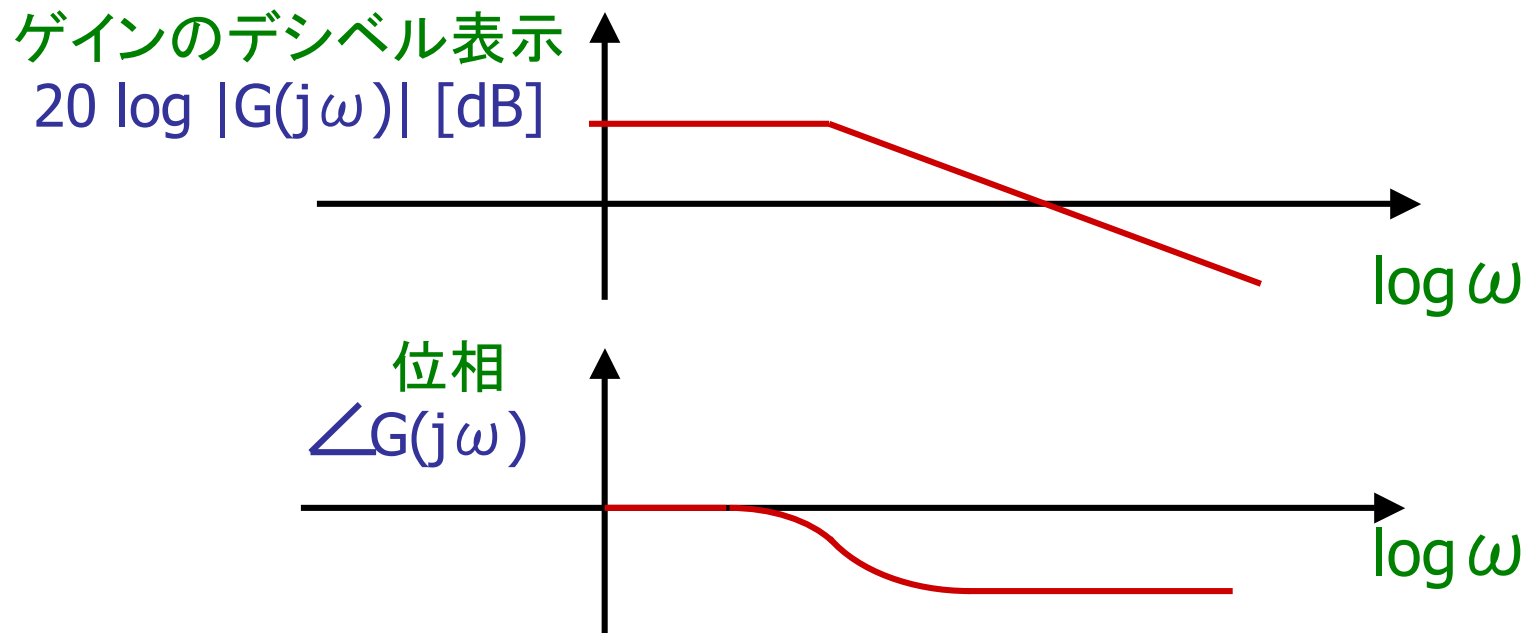
ω をパラメータとし
 $\omega=0$ から ∞ まで
変化させ、 $G(j\omega)$ を
複素平面上に
プロットしたもの



周波数伝達関数の図表現

② ボーデ線図 (Bode chart)

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= A(\omega) \exp(j\theta(\omega)) \\ &= |G(j\omega)| \cdot \exp(j\angle G(j\omega)) \end{aligned}$$

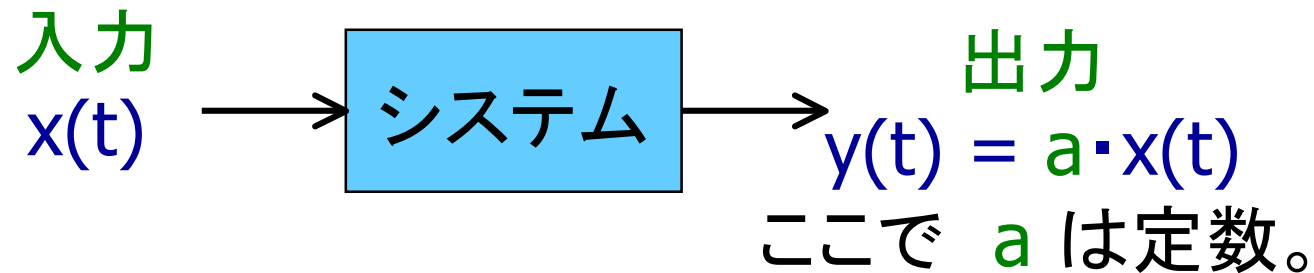


(注) ボーデ線図 (Bode chart) はボード線図と日本語表記されることがあり。

ベクトル線図はナイキスト線図 (Nyquist) と呼ばれることもある。

Bode, Nyquist は20世紀前半にベル研究所で活躍した研究者。

例1 比例のシステム（周波数応答）



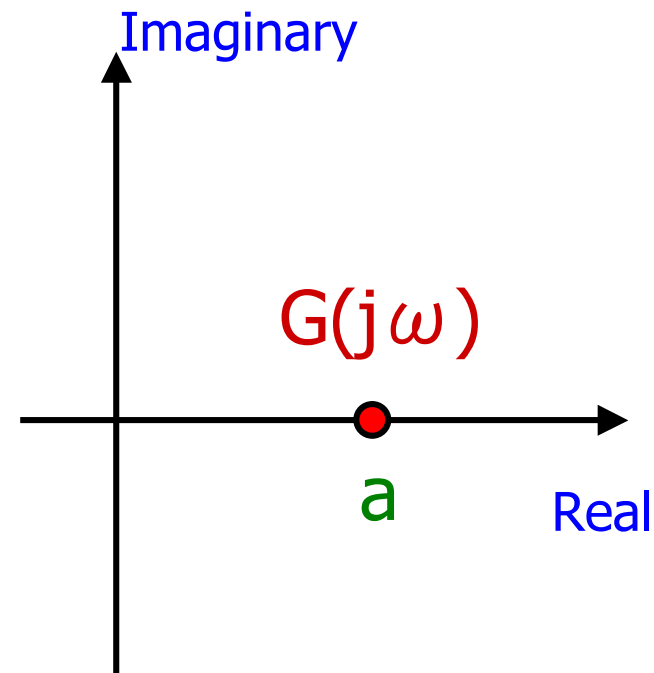
$$x(t) = k \cdot \cos(\omega t) \text{ のとき、}$$
$$y(t) = a \cdot k \cdot \cos(\omega t)$$

$$\therefore A(\omega) = a$$
$$\theta(\omega) = 0$$

例1 比例のシステム（ベクトル線図）

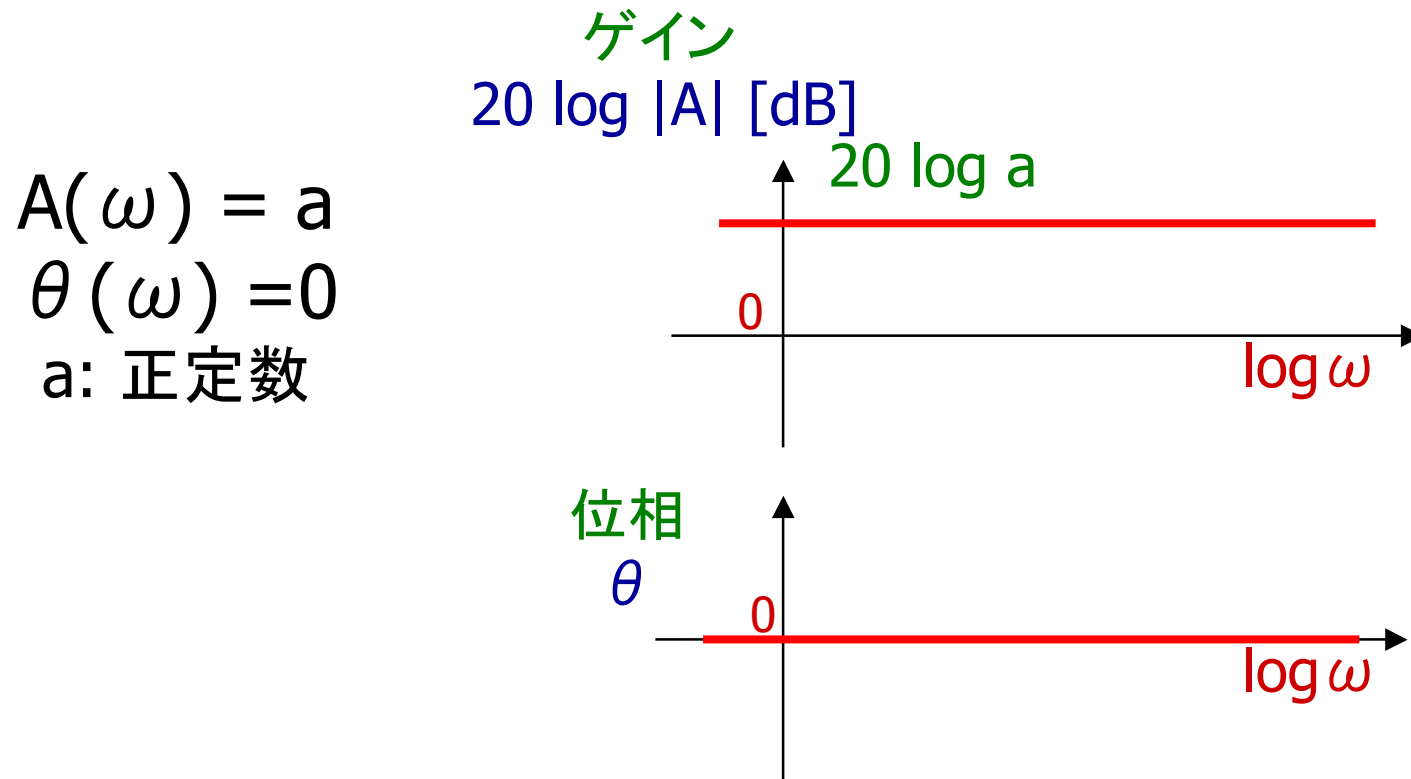
入力 $x(t)$ $\Rightarrow$ 出力 $y(t) = a \cdot x(t)$

$$A(\omega) = a, \theta(\omega) = 0$$
$$G(j\omega) = a \cdot \exp(j0) = a$$

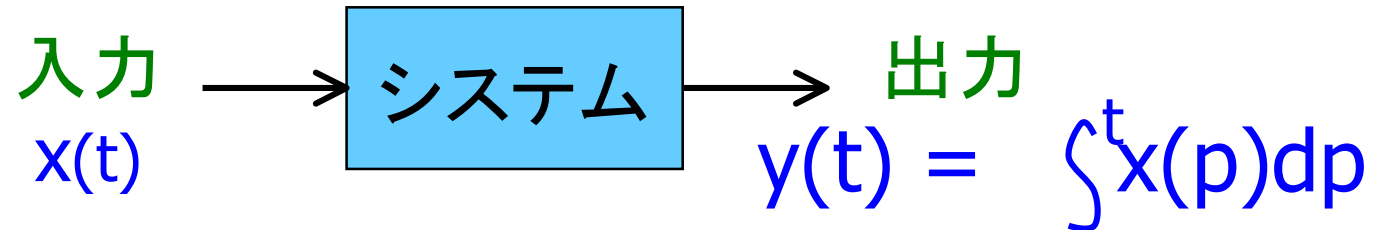


例1 比例のシステム（ボーデ線図）

入力 $x(t)$ $\Rightarrow$ 出力 $y(t) = a \cdot x(t)$



例2 積分のシステム（周波数応答）



$$\begin{aligned} x(t) &= k \cdot \cos(\omega t) \text{ のとき、} \\ y(t) &= (1/\omega) \cdot k \cdot \sin(\omega t) + \text{積分定数}(=0) \\ &= (1/\omega) \cdot k \cdot \cos(\omega t - (\pi/2)) \end{aligned}$$

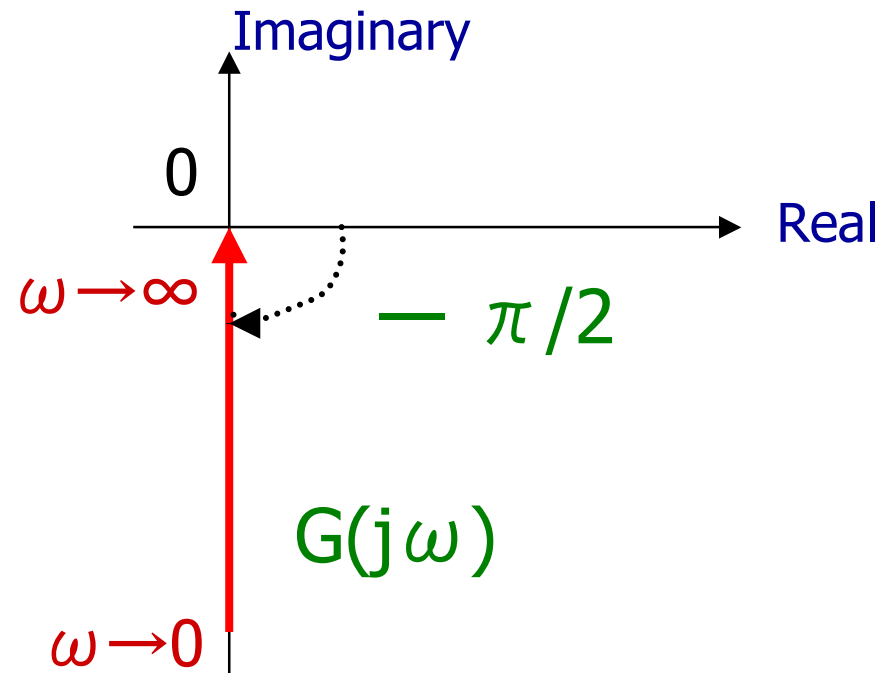
$$\begin{aligned} \therefore A(\omega) &= 1/\omega \\ \theta(\omega) &= -\pi/2. \end{aligned}$$

例2 積分のシステム（ベクトル線図）

入力 $x(t)$ $\longrightarrow$ 出力 $y(t) = \int^t x(p) dp$

$$A(\omega) = 1/\omega,$$
$$\theta(\omega) = -\pi/2$$

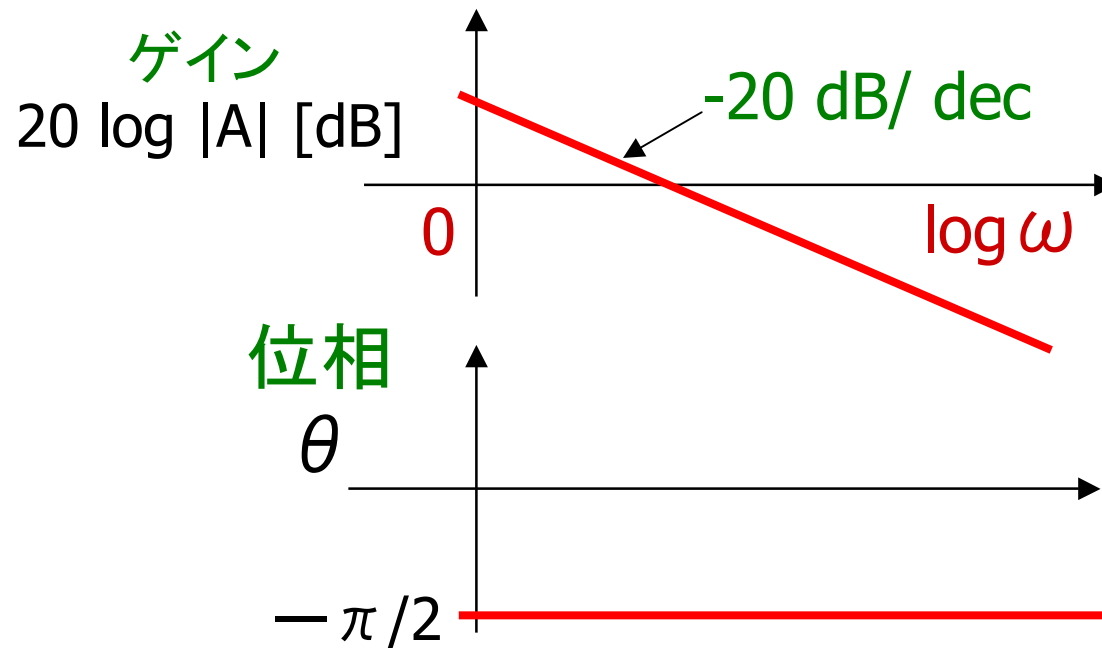
$$G(j\omega)$$
$$= (1/\omega) \cdot \exp(-j\pi/2)$$
$$= -j(1/\omega)$$



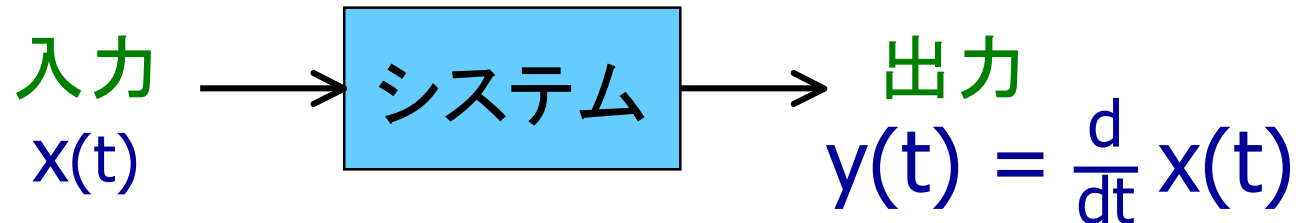
例2 積分のシステム（ボーデ線図）

入力 $x(t)$ $\Rightarrow$ 出力 $y(t) = \int^t x(p) dp$

$$A(\omega) = 1/\omega, \quad \theta(\omega) = -\pi/2$$



例3 微分のシステム（周波数応答）



$$\begin{aligned} x(t) &= k \cdot \cos(\omega t) \text{ のとき、} \\ y(t) &= -\omega \cdot k \cdot \sin(\omega t) \\ &= \omega \cdot k \cdot \cos(\omega t + (\pi/2)) \end{aligned}$$

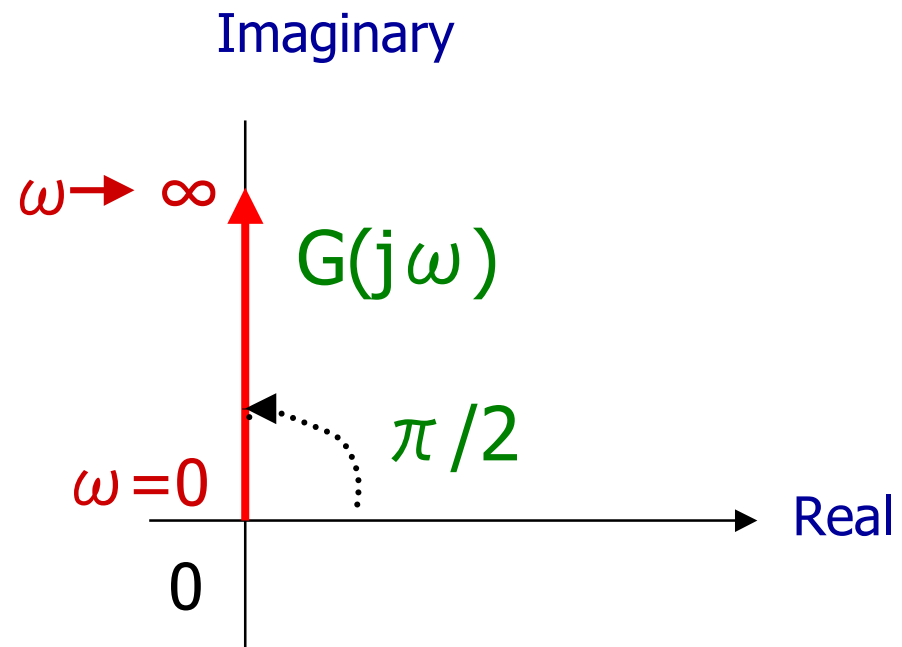
$$\therefore \begin{cases} A(\omega) = \omega \\ \theta(\omega) = \pi/2. \end{cases}$$

例3 微分のシステム(ベクトル線図)

入力 $x(t)$ $\longrightarrow$ 出力 $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

$$A(\omega) = \omega,$$
$$\theta(\omega) = \pi/2$$

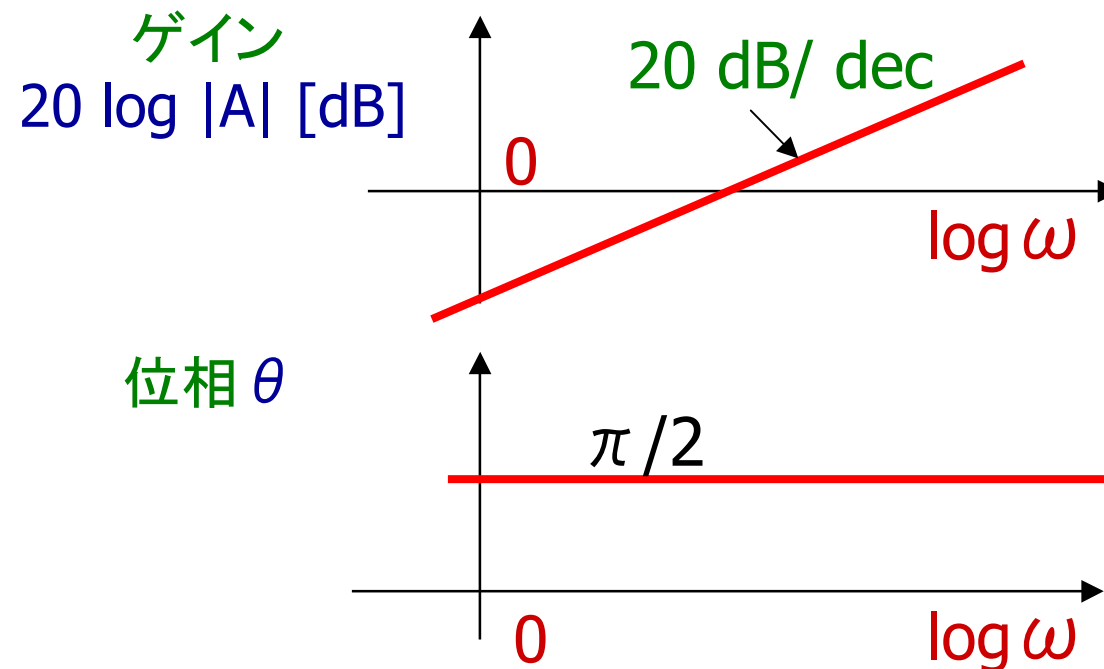
$$G(j\omega)$$
$$= \omega \cdot \exp(j\pi/2)$$
$$= j \cdot \omega$$



例3 微分のシステム(ボーデ線図)

入力 $x(t)$ $\longrightarrow$ 出力 $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

$$A(\omega) = \omega, \quad \theta(\omega) = \pi/2$$



積分および微分の性質 (詳細は付録参照)

積分の場合 (例、C)

ラプラス変換 $f(t)$ の時間積分は $F(s)$ に $1/s$ をかける

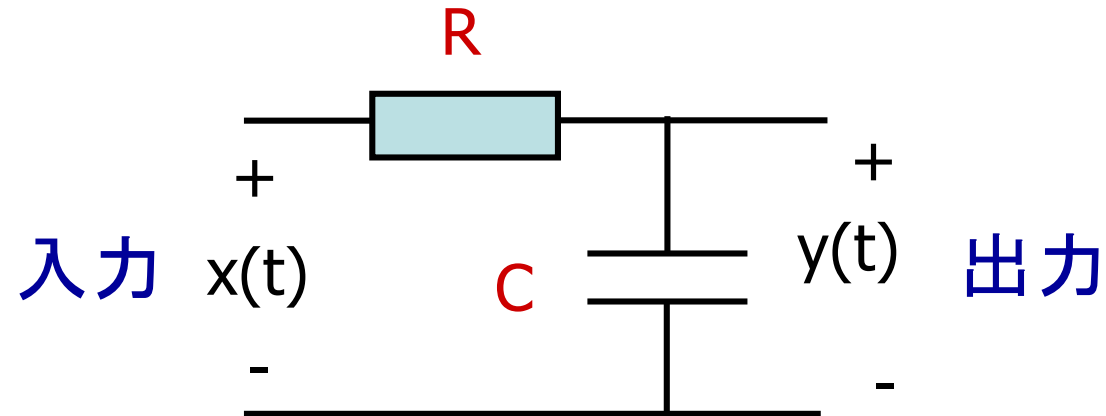
フーリエ変換 $f(t)$ の時間積分は $F(j\omega)$ に $1/j\omega$ をかける

微分の場合 (例、L)

ラプラス変換 $f(t)$ の時間微分は $F(s)$ に s をかける

フーリエ変換 $f(t)$ の時間微分は $F(j\omega)$ に $j\omega$ をかける

例4 1次系システム



周波数伝達関数

$$G(j\omega) = 1 / (1 + j RC \omega)$$

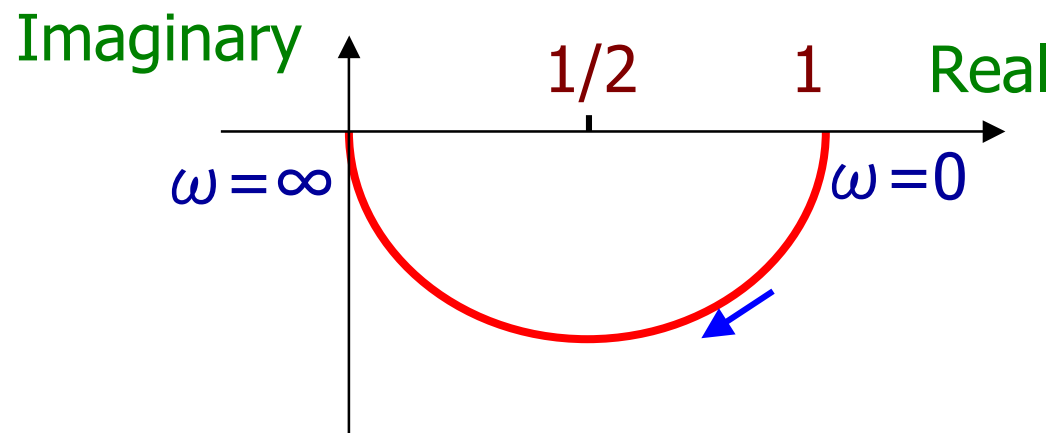
問題: $G(j\omega)$ のベクトル線図とボーデ線図を描け。

例4 1次系システム（ベクトル線図）

$$G(j\omega) = X(\omega) + j Y(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{1+(\omega RC)^2} \quad Y(\omega) = - \frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2}$$

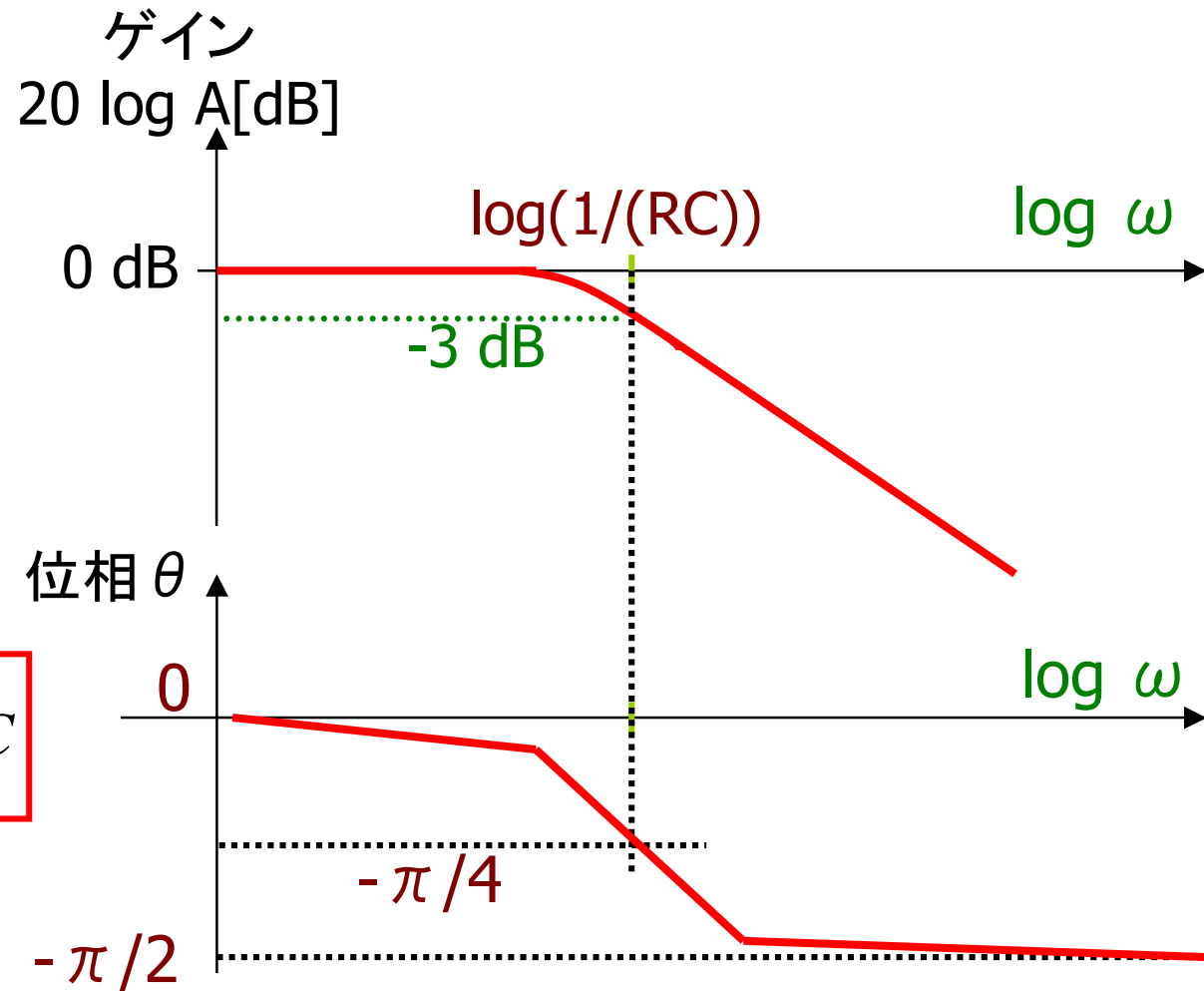
$$(X(\omega) - 1/2)^2 + Y(\omega)^2 = (1/2)^2, Y(\omega) < 0$$



例4 1次系システム（ボーデ線図）

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\tan \theta = \frac{Y}{X} = -\omega RC$$



周波数特性解析

ゲイン解析

周波数特性は、取り扱う信号が正弦波であるので $j\omega$ を使って解析する。上図の計算例のようにRCの回路では、出力 V_o は次式で表現できる。

$$V_o = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot V_i = \frac{1}{1 + j\omega CR} \cdot V_i$$

したがって、入出力の 関係は

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} = \frac{1}{1 + (\omega CR)^2} - j \frac{\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}$$

ゲイン $\left| \frac{V_o}{V_i} \right| = \sqrt{(\text{実数})^2 + (\text{虚数})^2}$ であるので

$$\left| \frac{V_o}{V_i} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

したがって、周波数が 低い場合は

$$\left| \frac{V_o}{V_i} \right| \approx 1$$

周波数が非常に高い領 域では

$$\left| \frac{V_o}{V_i} \right| \approx \frac{1}{\omega CR}$$

となり、ゲインは周波 数に反比例する。

折れ点角周波数(極という) ω_o は、実数部と虚数部が

等しくなる点、ここでは $\omega CR = 1$ になる周波数である ので

$$\omega_o = \frac{1}{CR}, \quad \therefore f_o = \frac{1}{2\pi CR}$$

位相解析

V_i と V_o 間の位相角 θ は次式で求まる。

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\text{虚数}}{\text{実数}} = -\omega CR$$

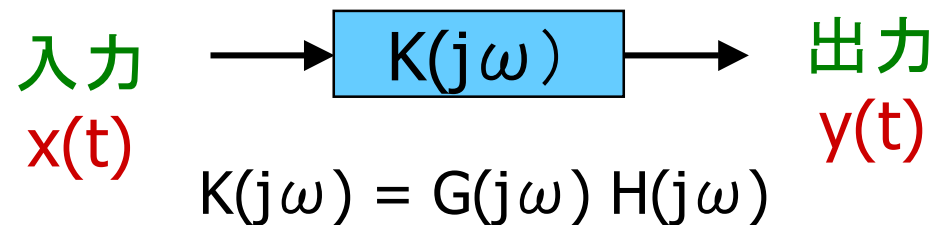
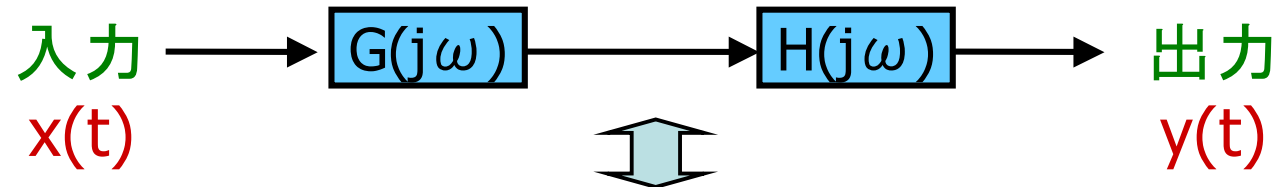
したがって、折れ点周 波数での位相は、

$$\tan \theta = -\omega_o CR = -1 \quad \therefore \theta = -45^\circ$$

ω が非常に大きい場合は、

$$\tan \theta = -\omega_o CR \rightarrow \infty \quad \therefore \theta = -90^\circ$$

縦続接続システム



システムの直列結合とボーデ線図は相性がよい

ゲイン $|K| = |G| \cdot |H|$

$\therefore 20 \log|K| = 20 \log|G| + 20 \log|H|$ 位相 $\angle K = \angle G + \angle H$

K のゲイン線図
= G のゲイン線図 + H のゲイン線図

K の位相線図
= G の位相線図 + H の位相線図

デシベル dB

ゲインの単位

ゲインは通常大きな幅を持つ。例えば $10^{-10} \sim 10^{10}$ 。このような大きな数値を取り扱うのに便利な以下のデシベル(dB)という単位の表現法を使う。

デシ deci 「10」の意味
ベル Bell 電話の発明者のベル

電力ゲインのデシベル表示

$$10 \log_{10} \text{電力ゲイン} = 10 \log_{10} \frac{\text{出力電力}}{\text{入力電力}} \quad [\text{dB}]$$

振幅ゲインのデシベル表示

$$20 \log_{10} \text{振幅ゲイン} = 20 \log_{10} \frac{\text{出力振幅}}{\text{入力振幅}} \quad [\text{dB}]$$



デシベル dB



$$P_{in} = V_{in} I_{in} = V_{in}^2 / R$$

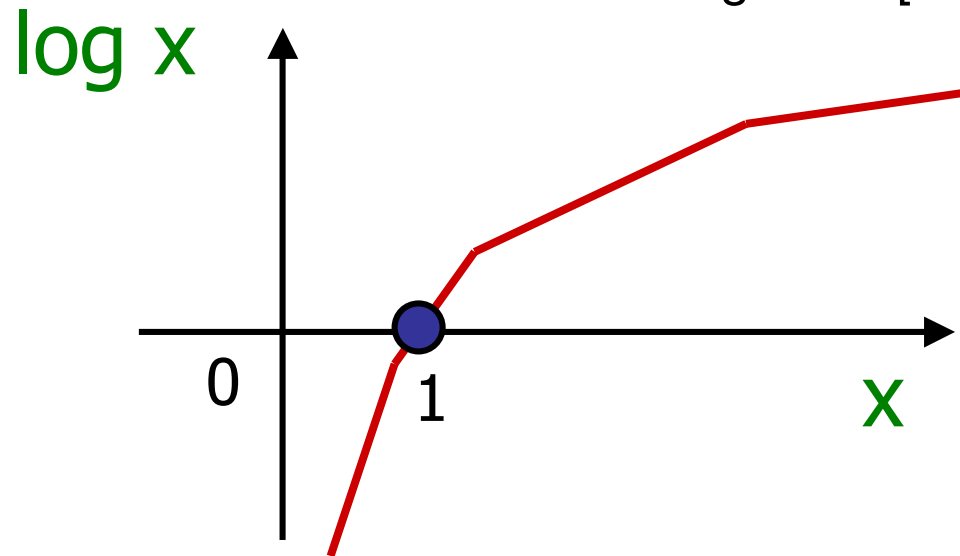
$$P_{out} = V_{out} I_{out} = V_{out}^2 / R$$

$$10 \log_{10} \frac{P_{out}}{P_{in}} [\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{V_{out}^2 / R}{V_{in}^2 / R} [\text{dB}]$$

$$= 10 \log_{10} \frac{V_{out}^2}{V_{in}^2} [\text{dB}] = 20 \log_{10} \frac{V_{out}}{V_{in}} [\text{dB}]$$

ゲインが1 $\longrightarrow$ 0 [dB]

- ゲインが1 $\longrightarrow$ 0 [dB]
 $20 \log 1 = 0$ [dB]
- ゲインが1より大 $\longrightarrow$ デシベル値はプラス
 $x > 1$ のとき $20 \log x > 0$ [dB]
- ゲインが1より小 $\longrightarrow$ デシベル値はマイナス
 $x < 1$ のとき $20 \log x < 0$ [dB]



デシベル近似計算

$\log_{10}10$ は 1

振幅ゲイン10倍 $20 \log_{10}10 = 20[\text{dB}]$

振幅ゲイン 1/10倍 $20 \log_{10}(1/10) = -20[\text{dB}]$

パワーゲイン10倍 $10 \log_{10}10 = 10[\text{dB}]$

パワーゲイン 1/10倍 $10 \log_{10}(1/10) = -10[\text{dB}]$

$\log_{10}2$ は約 0.3 ($\log_{10}2 = 0.301029\dots$)

振幅ゲイン2倍 $20 \log_{10}2 = 6[\text{dB}]$

振幅ゲイン $\sqrt{2}$ 倍 $20 \log_{10}\sqrt{2} = 10 \log_{10}2 = 3[\text{dB}]$

パワーゲイン2倍 $10 \log_{10}2 = 3[\text{dB}]$

$\log_{10}3$ は約 0.5 ($\log_{10}3 = 0.477121\dots$)

$\log_{10}5$ は約 0.7 ($\log_{10}5 = 0.698997\dots$)

振幅ゲイン 5倍 $20 \log_{10}5 = 14[\text{dB}]$

パワーゲイン 5倍 $10 \log_{10}5 = 7[\text{dB}]$

20dB/dec、 6dB/oct とは ？

微分のシステムのゲイン $|G(j\omega)| = \omega$

$$|G(j\omega)| = \omega, \quad 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \omega \text{ [dB]}$$

周波数を10倍

$$|G(j10\omega)| = 10\omega,$$

$$20 \log |G(j10\omega)| = 20 \log 10\omega = 20 \log \omega + 20 \text{ [dB]}$$

すなわち、 ω を10倍するとゲインは20dB上昇

→ 20 dB/decade

周波数を2倍

$$|G(j2\omega)| = 2\omega,$$

$$20 \log |G(j2\omega)| = 20 \log 2\omega = 20 \log \omega + 6 \text{ [dB]}$$

すなわち、 ω を2倍するとゲインは6dB上昇

→ 6 dB/octave

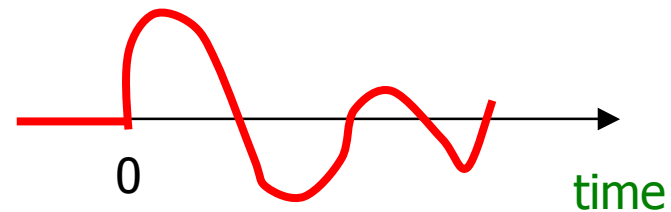
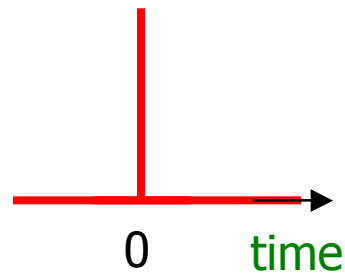
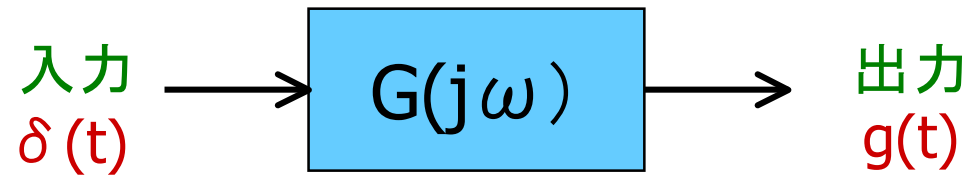
1. アナログICの動向および最近の状況
2. 電子回路 線形と非線形
3. 電子回路で扱う主要部品および基本的な性質
4. 電子回路によく出てくる信号
5. 伝達関数と周波数特性
6. インパルス応答、ステップ応答
7. 伝達関数の基本的な性質
8. 付録 フーリエ変換とラプラス変換



インパルス応答、ステップ応答

システムにインパルス信号 $\delta(t)$ を入力したときの出力 $g(t)$

→ インパルス応答

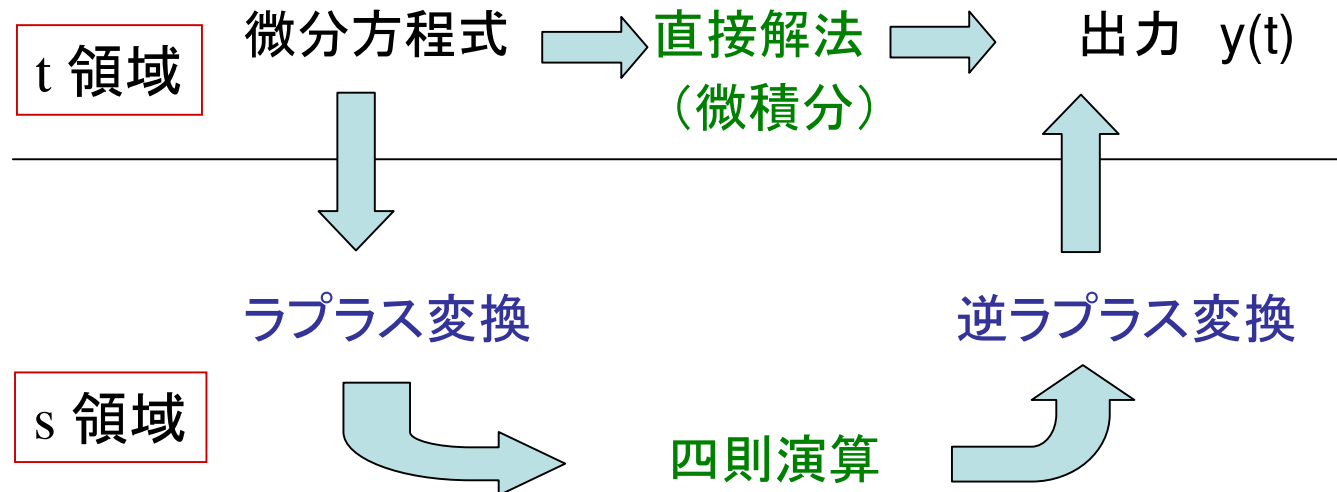


同様に

システムにステップ信号 $u(t)$ を入力したときの出力 $s(t)$

→ ステップ応答

ラプラス変換による微分方程式の解法



ラプラス変換、逆ラプラス変換は
積分を計算する必要なし。
右のラプラス変換表を用いればよい。

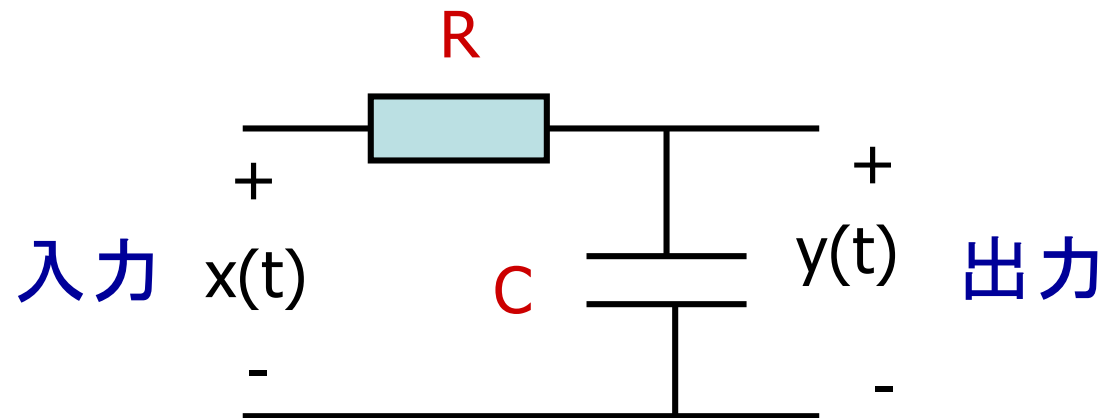
	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)=0(t<a)$ $=1(t>a)$	e^{-as}/s
3	t	$1/s^2$
4	t^n	$n!/s^{(n+1)}$
5	$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
6	$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
7	e^{at}	$1/(s-a)$
8	te^{at}	$1/(s-a)^2$

ラプラス変換の使用法 例題

問1. 次のシステムの伝達関数を求めよ。

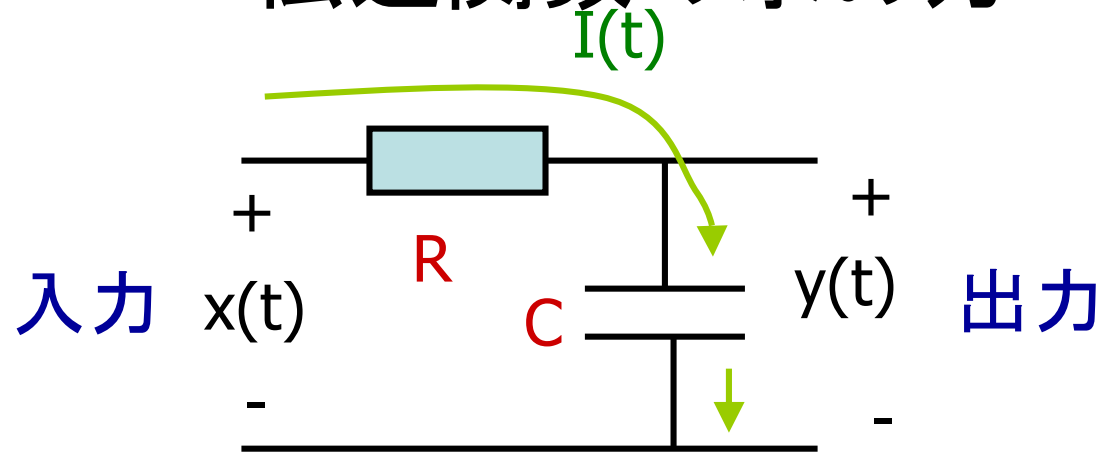
問2. インパルス応答を求めよ。

問3. ステップ応答を求めよ。



初期値 $y(0) = 0$

伝達関数の求め方



$$Y(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \cdot X(s) = \frac{1}{1 + sCR} \cdot X(s)$$

$$\therefore G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + sCR}$$

インパルス応答の求め方

$$G(s) = \frac{1}{1+s RC}$$

$$\therefore Y(s) = G(s) X(s)$$

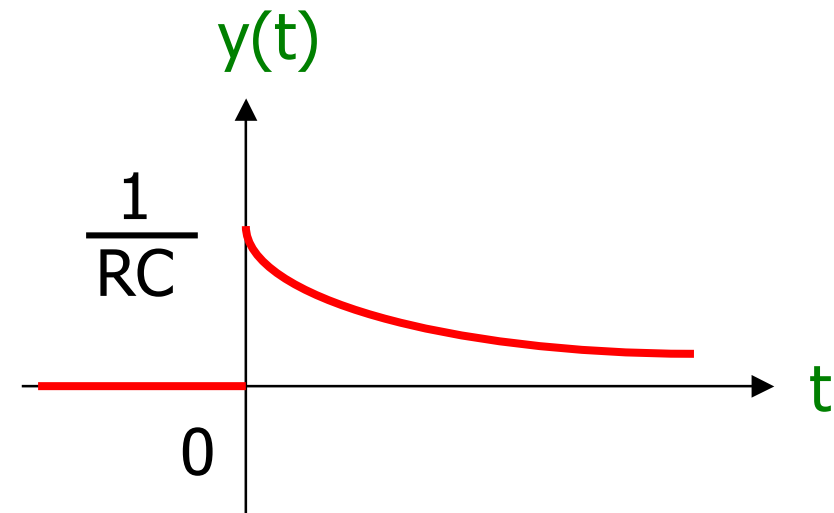
$$x(t) = \delta(t) \text{ のとき}$$

$$X(s) = 1$$

$$= \frac{1}{1+s RC}$$

$$= \frac{(1/RC)}{(1/RC) + s}$$

$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{1}{RC} \exp(-t/(RC)) & (t > 0) \end{cases}$$



ステップ応答の求め方

$$G(s) = \frac{1}{1+s RC}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \text{ のとき}$$

$$X(s) = \frac{1}{s}$$



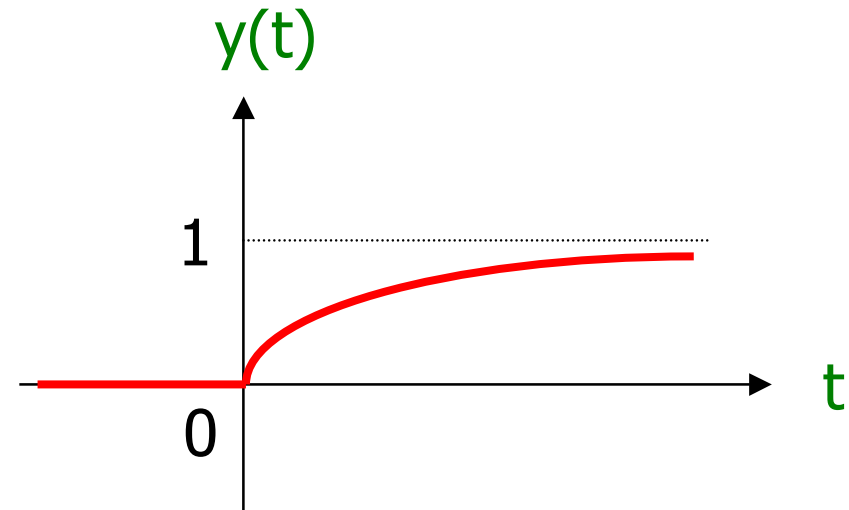
部分分数
展開

$$\therefore Y(s) = G(s) X(s)$$

$$= \frac{1}{1+s RC} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{(1/RC) + s}$$

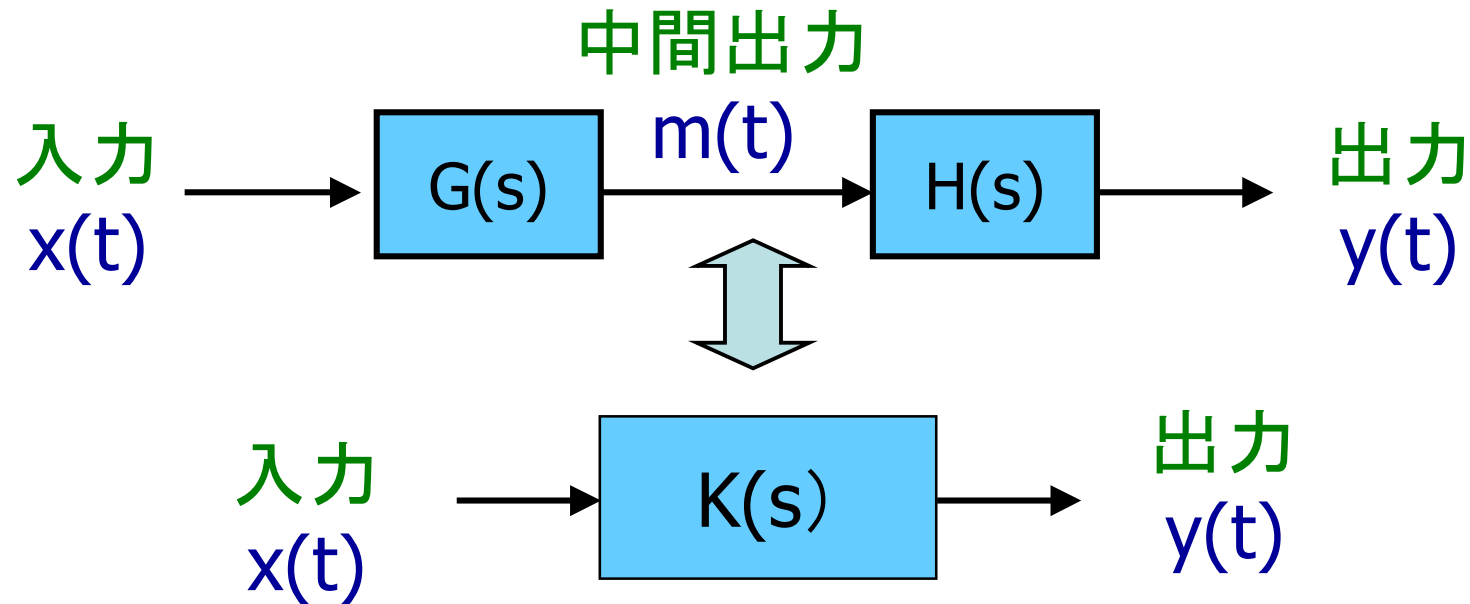
$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 - \exp(-t/(RC)) & (t > 0) \end{cases}$$



1. アナログICの動向および最近の状況
2. 電子回路 線形と非線形
3. 電子回路で扱う主要部品および基本的な性質
4. 電子回路によく出てくる信号
5. 伝達関数と周波数特性
6. インパルス応答、ステップ応答
7. 伝達関数の基本的な性質
8. 付録 フーリエ変換とラプラス変換



システムの直列結合

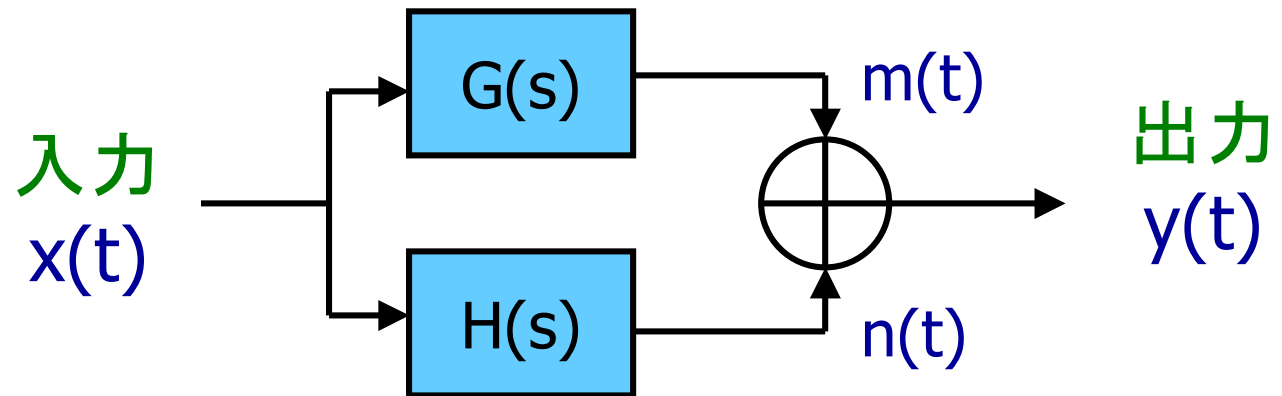


$$M(s) = G(s) X(s), \quad Y(s) = H(s) M(s)$$

$$\therefore Y(s) = H(s) G(s) X(s)$$

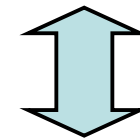
$$K(s) = H(s) G(s)$$

システムの並列結合

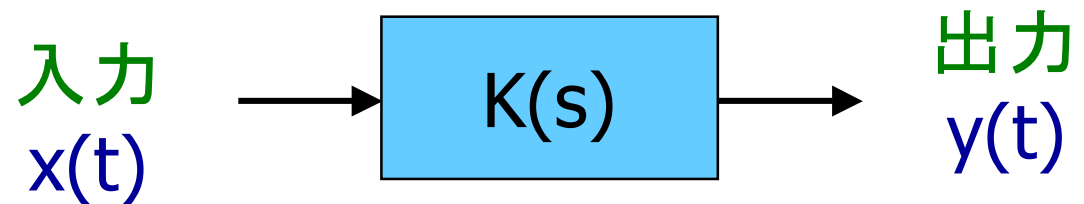


$$M(s) = G(s) X(s)$$

$$N(s) = H(s) X(s)$$

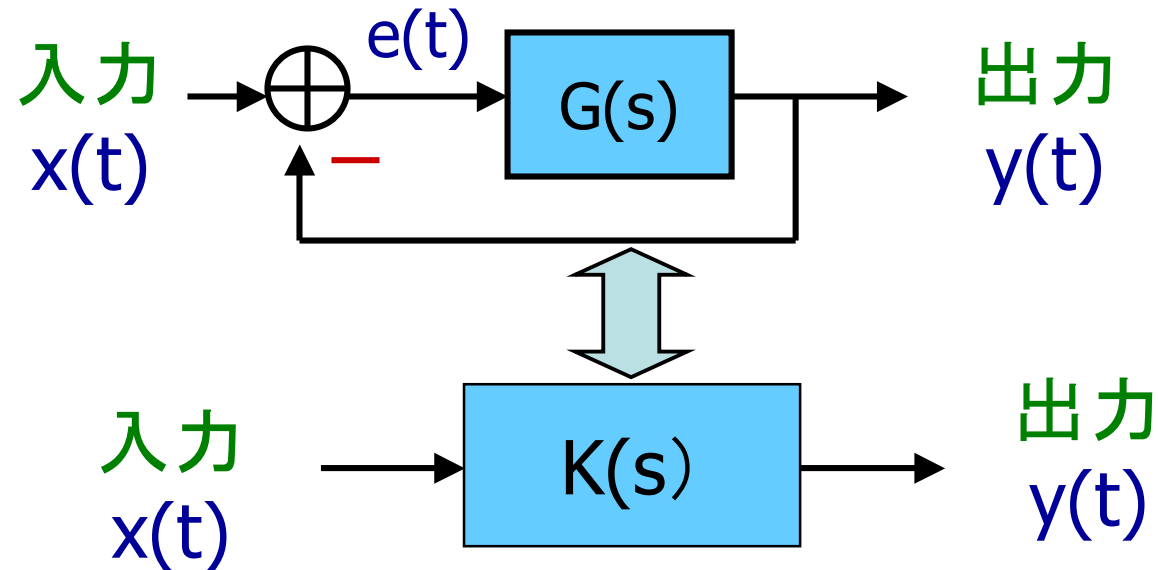


$$\begin{aligned}\therefore Y(s) &= M(s) + N(s) \\ &= (G(s) + H(s)) X(s)\end{aligned}$$



$$K(s) = G(s) + H(s)$$

システムのフィードバック結合



$$E(s) = X(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G(s) E(s)$$

$$\therefore Y(s) = G(s) (X(s) - Y(s))$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} X(s)$$

$$\therefore K(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

負帰還（ネガテブ・フィードバック）

20世紀前半に

Western Electric 社の若き技術者 **Harold Black** により
ネガテブ・フィードバック増幅器が考案される。

出力から入力へのフィードバック量により増幅器が
安定、不安定になることが経験される。

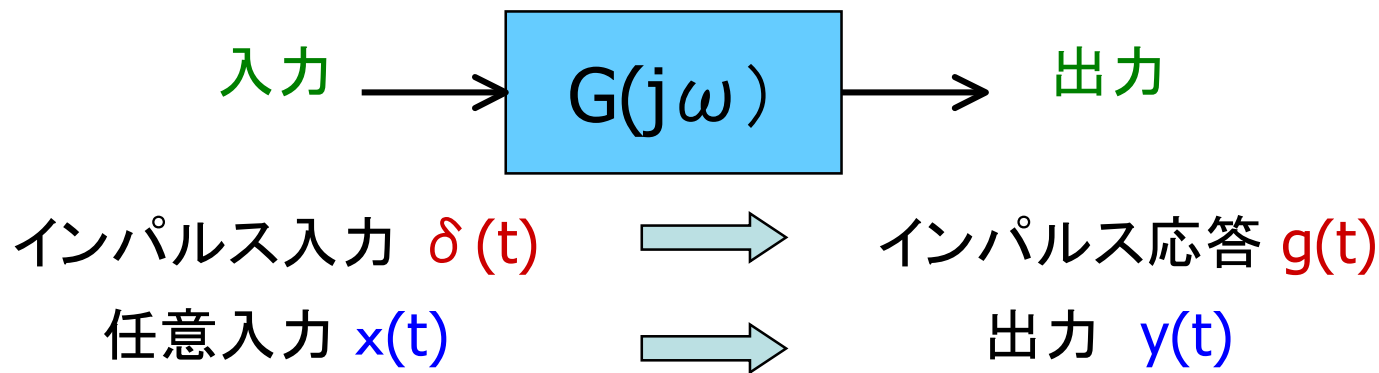
1932年 ベル研究所の **Harry Nyquist** により
この問題が理論的に検討され、
安定になるための条件が明らかになる。
(ナイキストの安定判別)

1. アナログICの動向および最近の状況
2. 電子回路 線形と非線形
3. 電子回路で扱う主要部品および基本的な性質
4. 電子回路によく出てくる信号
5. 伝達関数と周波数特性
6. インパルス応答、ステップ応答
7. 伝達関数の基本的な性質
8. 付録 フーリエ変換とラプラス変換



畳み込み積分 (Convolution)

安定な線形・時不変・動的システムではインパルス応答 $g(t)$ が求まれば
任意の入力 $x(t)$ に対する出力 $y(t)$ が計算できる。

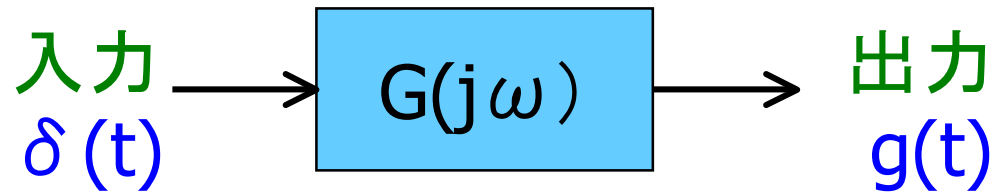


$$y(t) = \int_0^t g(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$y(t)$ は $g(t)$ と $x(t)$ の畳み込み積分、Convolution

インパルス応答と周波数伝達関数

周波数伝達関数 $G(j\omega)$ はインパルス応答 $g(t)$ のFourier 変換



$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

デルタ関数と余弦波との関係から導出できる。

フーリエ変換 Fourier Transform

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ なる $f(t)$ に対し、

フーリエ変換

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

Joseph Fourier:

ナポレオン時代のフランス人。政治的にも活躍。

エジプト遠征につきそう。エジプト学の研究者でもある。

Laplace の後を継いで大学教授になる。

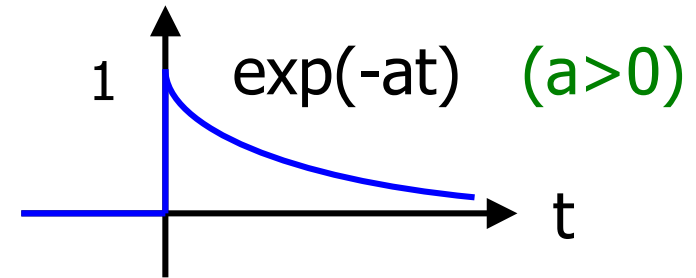
Fourier 級数展開の理論は最初はフランス科学界に受け入れられず。

Joseph Fourier upset the French Academy in 1807.



フーリエ変換 例

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0, a > 0) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_0^{\infty} \exp(-at) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} \exp(-(a + j\omega)t) dt \\ &= \frac{-1}{j\omega + a} \left[\exp(-(a + j\omega)t) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega + a} \end{aligned}$$

(注)

$$\begin{aligned} |\exp(-(a + j\omega)t)| &= |\exp(-at)| |\exp(-j\omega t)| \\ &= |\exp(-at)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \\ \therefore |\exp(-j\omega t)| &= 1 \end{aligned}$$

フーリエ変換 例

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) \cos(bt) & (t > 0, a > 0) \end{cases}$$

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-at) \cos(bt) \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp(-(a + j\omega)t) [\exp(-jbt) + \exp(jbt)] dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a + j(b + \omega)} + \frac{1}{a + j(-b + \omega)} \right] = \frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + b^2}$$

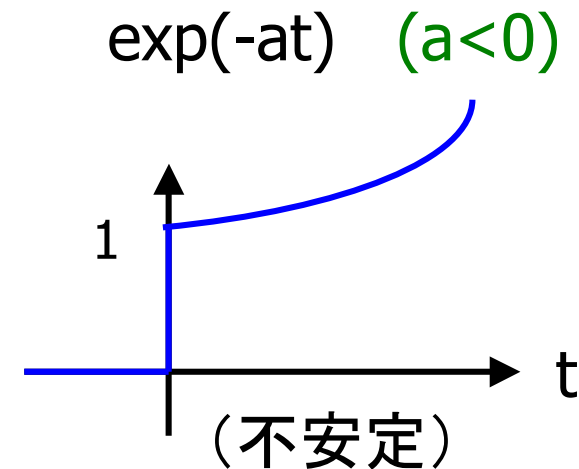
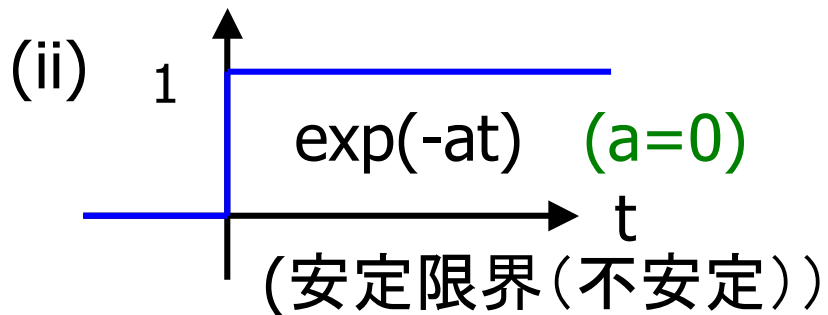
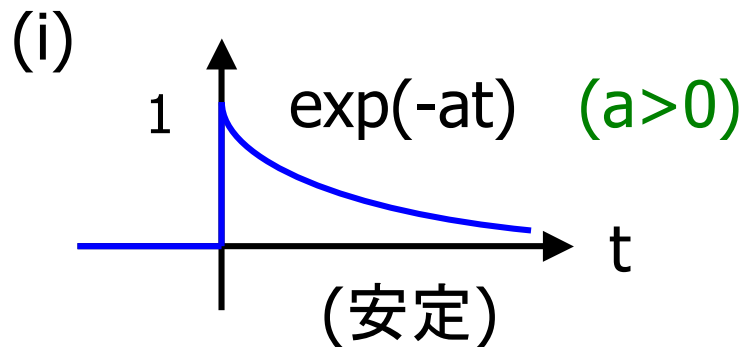
線形システムのインパルス応答

$\exp(-at)$ は重要な関数

インパルス応答

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0) \end{cases}$$

(iii)



Fourier 変換の限界

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

は安定なシステム、すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

の場合にのみ適用できる。

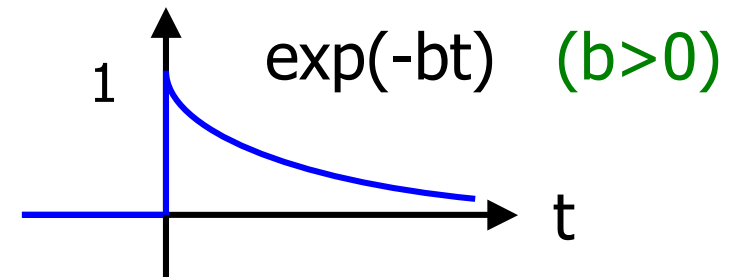
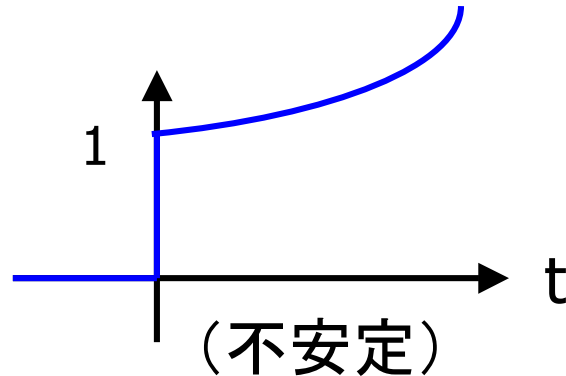
上記条件を満たさないときはFourier 積分の値が存在しない。

定積分の値が存在する。

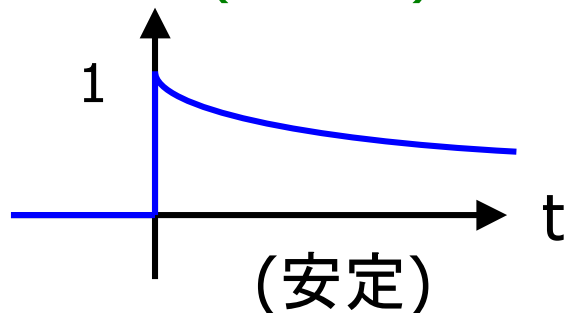
➡ その定積分に有限確定な値が存在する。

Laplace変換の導入

$$g(t) = \exp(-at) \quad (a < 0)$$



$$\begin{aligned} g(t) \exp(-bt) \\ = \exp(-(a+b)t) \\ (a+b > 0) \end{aligned}$$



$g(t)$: 不安定
 $g(t) \exp(-bt)$: 安定
 $g(t) \exp(-bt)$ に Fourier 変換を行う。



Laplace変換

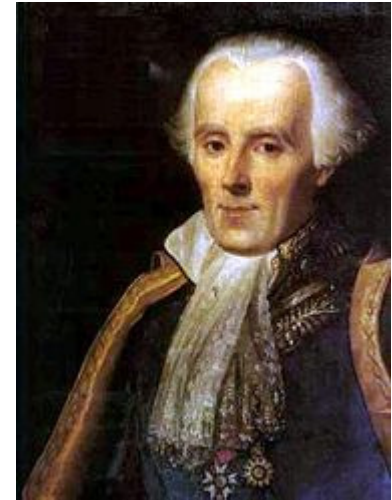
ピエールシモン・ラプラス

Pierre-Simon Laplace 1749-1827

フランスの数学者

「天体力学」「確率論の解析理論」の名著

ラプラス変換の考案者



決定論者。これから起きるすべての現象は、
これまでに起きたことに起因する。

ある特定の時間の宇宙のすべての粒子の運動状態
が分かれば、これから起きる現象は計算できる。



後に量子力学により否定される。

ラプラス変換の定義

$$\begin{aligned} G(b + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-bt) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-(b + j\omega)t) dt \end{aligned}$$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-st) dt$$

ここで
 $s = b + j\omega$

逆ラプラス変換の定義

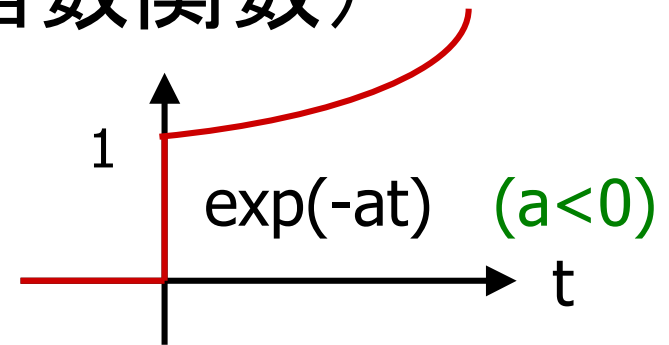
$$\begin{aligned} g(t) \exp(-bt) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(b + j\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(b + j\omega) \exp((b + j\omega)t) d\omega \end{aligned}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} G(s) \exp(st) ds$$

ここで
 $s = b + j\omega$

ラプラス変換 例 (指数関数)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \exp(-at) \exp(-st) dt = \int_0^{\infty} \exp(-(a+s)t) dt \\ &= \frac{-1}{s+a} [\exp(-(a+s)t)]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

(注) $|\exp(-(a+s)t)| = |\exp(-(a+b)t)| |\exp(-j\omega t)|$
 $= |\exp(-(a+b)t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$
 $\therefore |\exp(-j\omega t)| = 1, a+b > 0$

周波数伝達関数と伝達関数

安定なシステムのインパルス応答 $g(t)$ 、周波数伝達関数 $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

周波数伝達関数 $G(j\omega)$ の $|G(j\omega)|$ 、 $\angle G(j\omega)$ は
物理的な意味(周波数応答)をもつ。

安定または不安定なシステムのインパルス応答 $g(t)$ 、伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-st) dt$$

$G(s)$ は周波数伝達関数 $G(j\omega)$ のような物理的な意味はもたない。
ではなぜ $G(s)$ を考えるのか。

ラプラス変換性質 (1)

$f(t)$ の時間微分は $F(s)$ に s をかける

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt \quad \longrightarrow \quad sF(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \exp(-st) dt$$

フーリエ変換性質(1) $f(t)$ の時間微分は $F(j\omega)$ に $j\omega$ をかける

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad \longrightarrow \quad j\omega F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \exp(-j\omega t) dt$$

(注) 初期値 ($t=0$ での値) は全てゼロとする。

ラプラス変換性質(2)

$f(t)$ の時間積分は $F(s)$ に $(1/s)$ をかける

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{s} F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] \exp(-st) dt$$

フーリエ変換性質(2) $f(t)$ の時間積分は $F(j\omega)$ に $(1/j\omega)$ をかける

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{j\omega} F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] \exp(-j\omega t) dt$$

(注) 初期値 ($t=0$ での値) は全てゼロとする。

ラプラス変換性質(3) 畳み込み積分は積

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad \longrightarrow \quad Y(s) = G(s)U(s)$$

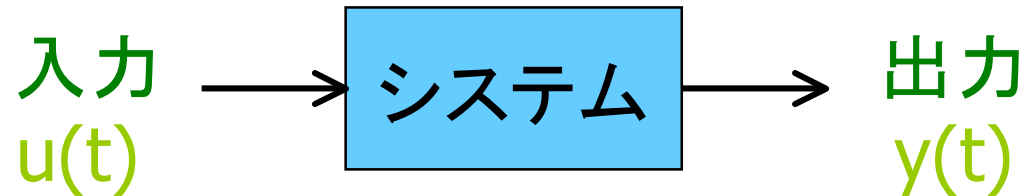
ここで $Y(s)$, $G(s)$, $U(s)$ は 各々 $y(t)$, $g(t)$, $u(t)$ のラプラス変換

フーリエ変換性質(3) 畳み込み積分は積

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad \longrightarrow \quad Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

ここで $Y(j\omega)$, $G(j\omega)$, $U(j\omega)$ は 各々 $y(t)$, $g(t)$, $u(t)$ のフーリエ変換

微分方程式と伝達関数(1)



$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t)$$

$$\begin{array}{ll} y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} Y(s), & \frac{d^n}{dt^n} y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s^n Y(s) \\ u(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} U(s), & \frac{d^m}{dt^m} u(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s^m U(s) \end{array}$$

微分方程式と伝達関数(2)

$$S^n Y(s) + a_{n-1} S^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 S Y(s) + a_0 Y(s) =$$

$$b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \dots + b_1 S U(s) + b_0 U(s)$$

$$Y(s) = G(s) U(s)$$

$$G(s) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}$$