低/中間周波動作
（小信号モデル）

群馬大学
松田順一

概要

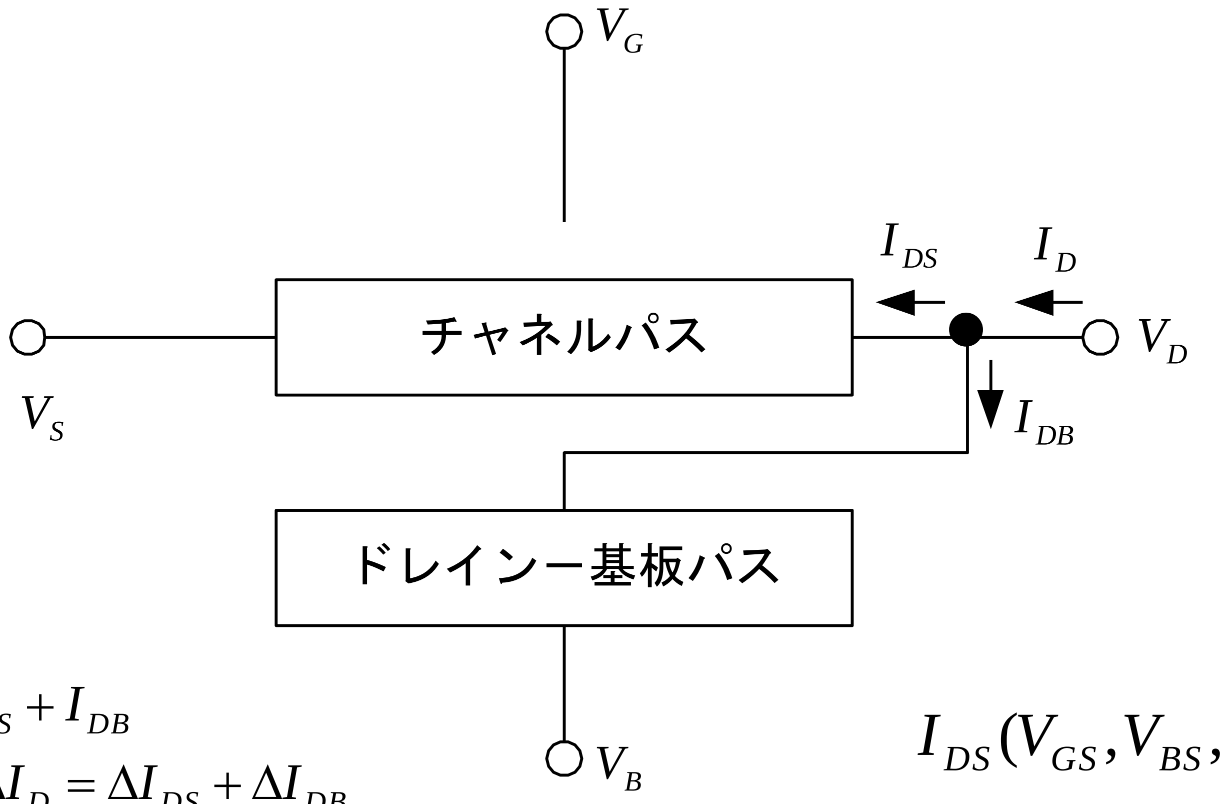
- 低周波小信号モデル
    - チャネルパスの小信号モデル
    - ドレイン～基板パスの小信号モデル
    - 強反転領域でのコンダクタンス
    - 弱反転領域でのコンダクタンス
- 中間周波小信号モデル
    - 真性部分の各容量（強反転と弱反転）
- 外部領域の小信号モデル
- ノイズモデル
- 付録
    - ゲート・フリンジ容量導出

（注）以下の本を参考に、本資料を作成。

(1) Yannis Tsividis, Operation and Modeling of the MOS Transistor Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1999.

(2) Yannis Tsividis and Colin McAndrew, Operation and Modeling of the MOS Transistor Third Edition, Oxford University Press, New York, 2011.

MOSFETの電流のパス

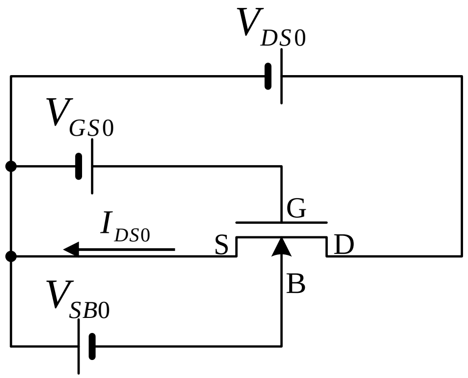


$$I_D = I_{DS} + I_{DB}$$
$$\Rightarrow \Delta I_D = \Delta I_{DS} + \Delta I_{DB}$$
$$I_G = 0$$

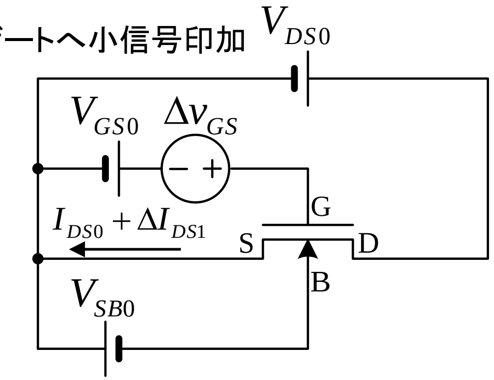
$$I_{DS}(V_{GS}, V_{BS}, V_{DS})$$
$$I_{DB}(V_{GB}, V_{SB}, V_{DB})$$

MOSトランジスタへのdc電圧印加と小信号変化

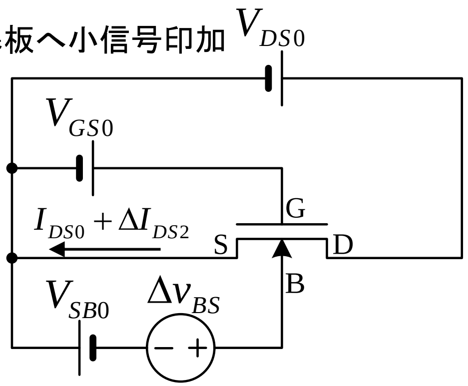
各端子への
dc電圧印加



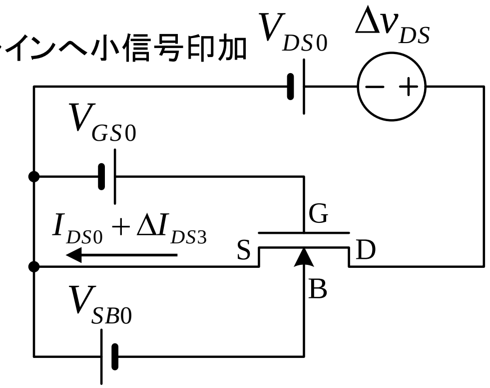
ゲートへ小信号印加



基板へ小信号印加



ドレインへ小信号印加



$$g_m = \left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}}\right|_{V_{BS}, V_{DS}} \approx \frac{\Delta I_{DS1}}{\Delta V_{GS}}$$

ゲート・トランス・コンダクタンス

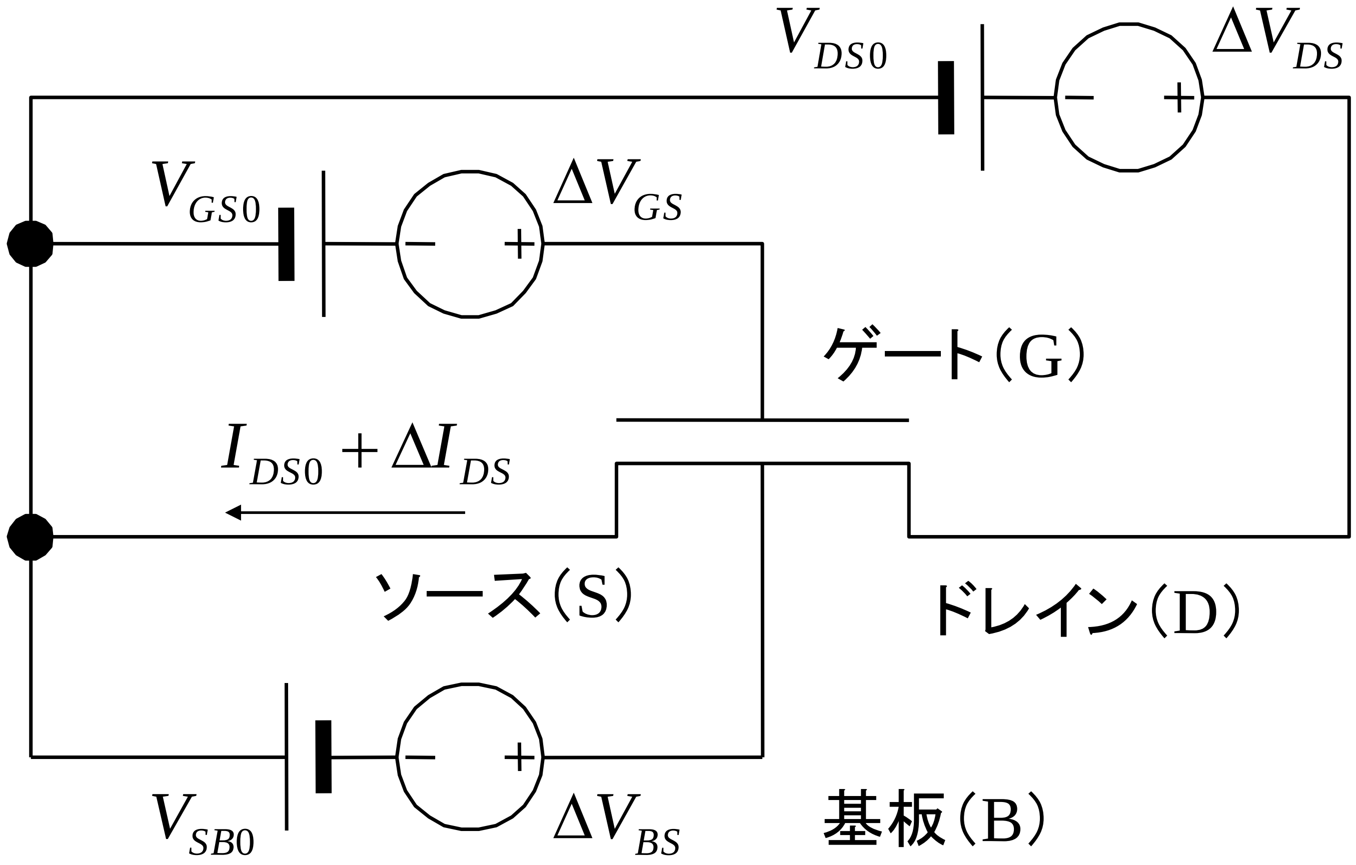
$$g_{mb} = \left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{BS}}\right|_{V_{GS}, V_{DS}} \approx \frac{\Delta I_{DS2}}{\Delta V_{BS}}$$

基板トランス・コンダクタンス

$$g_{sd} = \left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{GS}, V_{BS}} \approx \frac{\Delta I_{DS3}}{\Delta V_{DS}}$$

ソース・ドレイン・トランス・コンダクタンス

V_{GS},V_{BS},V_{DS}の小信号変化の合成



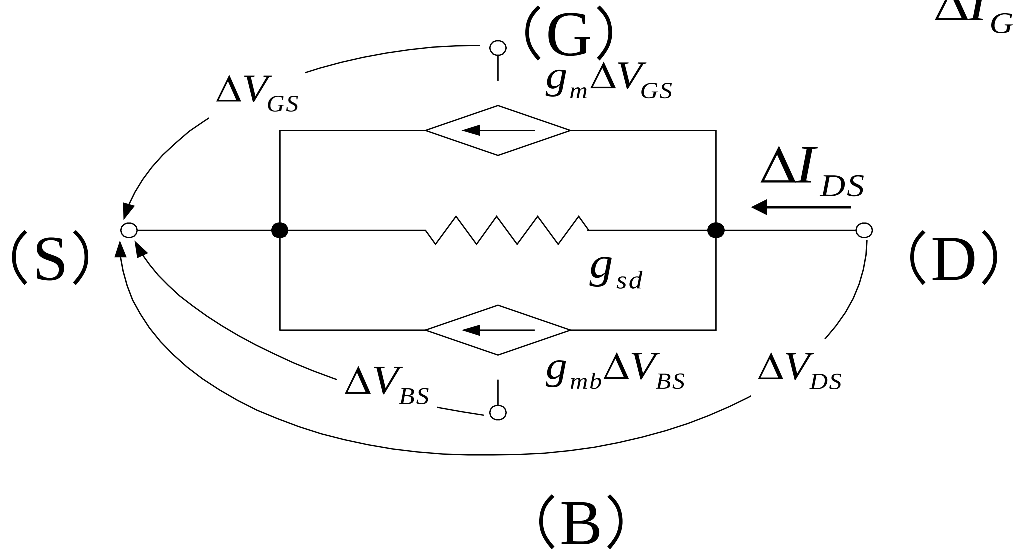
小信号変化による電流：ΔI_{DS}

V_{GS}, V_{BS}, V_{DS}の小信号変化による電流

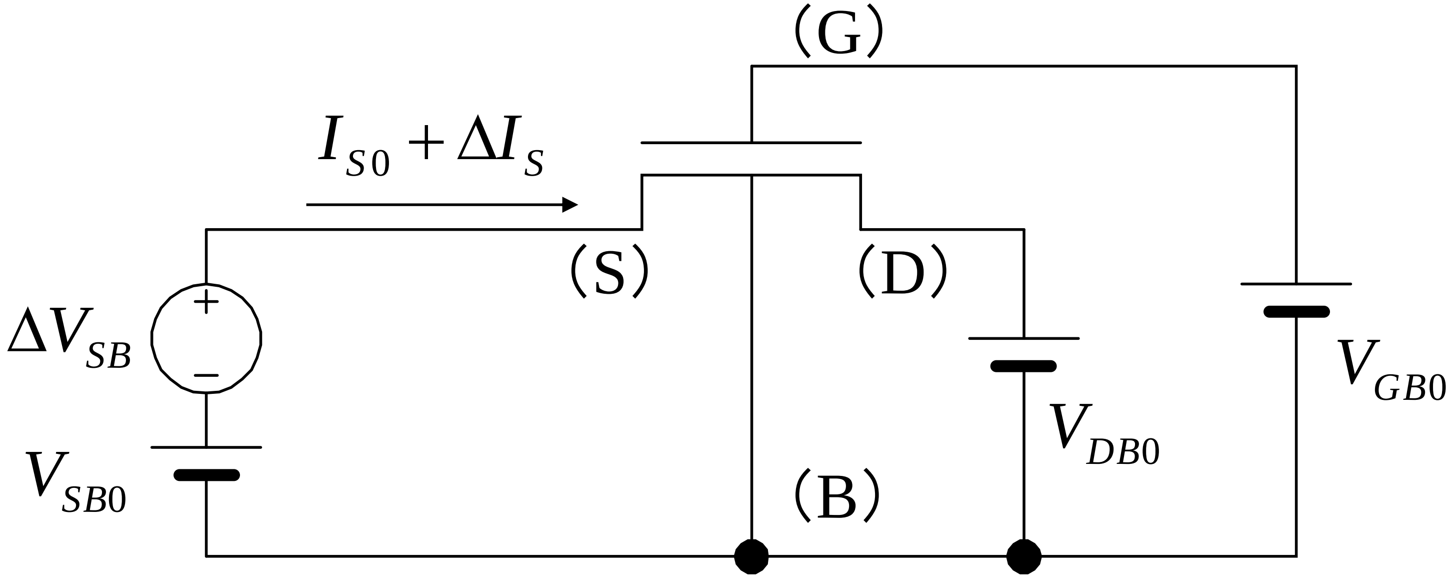
$$\Delta I_{DS} \approx \left(\left. \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} \right|_{V_{BS}, V_{DS}} \right) \Delta V_{GS} + \left(\left. \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{BS}} \right|_{V_{GS}, V_{DS}} \right) \Delta V_{BS} + \left(\left. \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}} \right|_{V_{GS}, V_{BS}} \right) \Delta V_{DS}$$

$$= g_m \Delta V_{GS} + g_{mb} \Delta V_{BS} + g_{sd} \Delta V_{DS}$$

$$\Delta I_G = 0$$



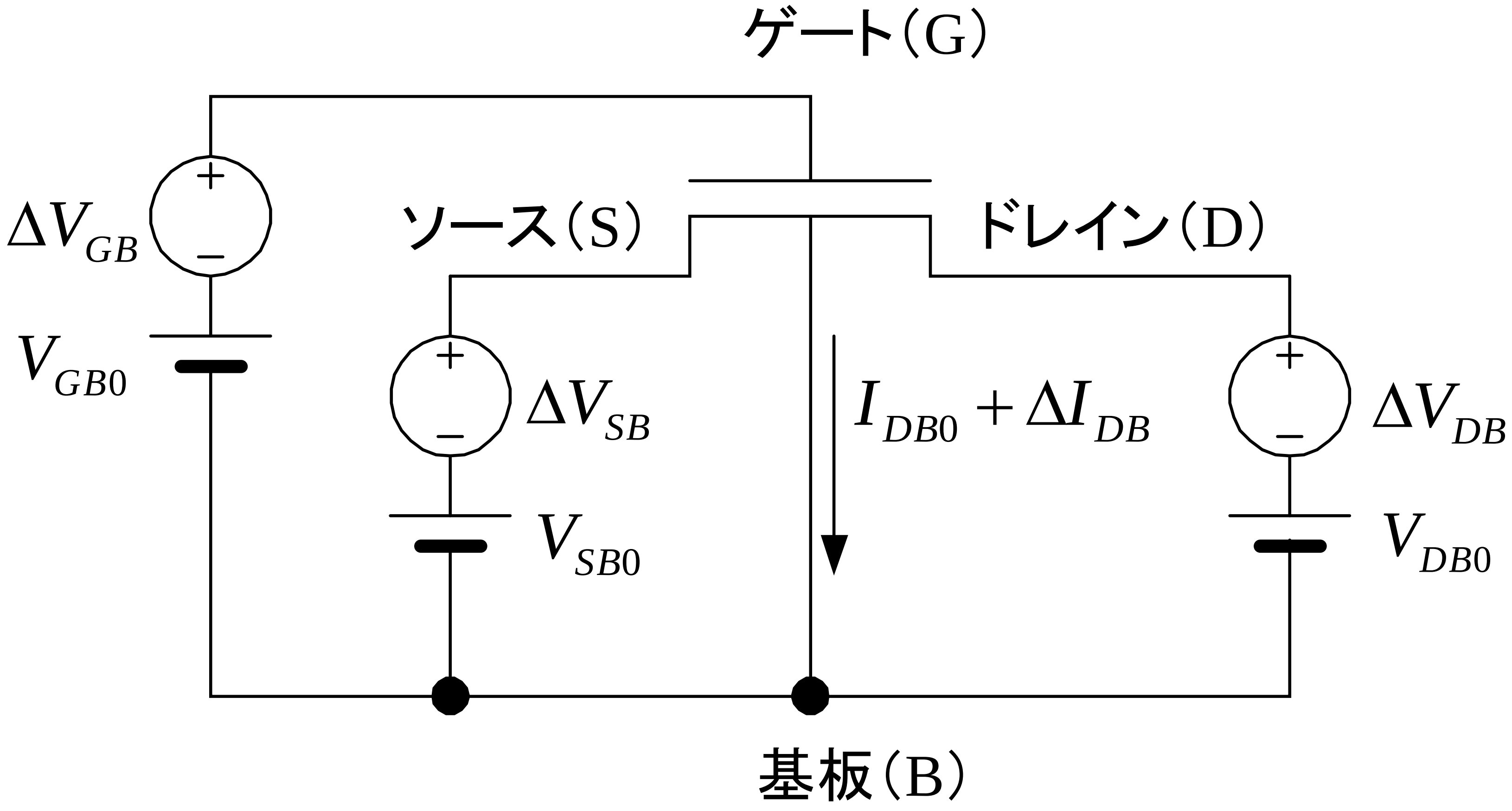
V_{SB}の小信号変化



$$g_{ss}=\left.\frac{\partial I_S}{\partial V_{SB}}\right|_{V_{GB},V_{DB}}=-\left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{SB}}\right|_{V_{GB},V_{DB}}=-\left.\left(\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}}\frac{\partial V_{GS}}{\partial V_{SB}}+\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{BS}}\frac{\partial V_{BS}}{\partial V_{SB}}+\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}}\frac{\partial V_{DS}}{\partial V_{SB}}\right)\right|_{V_{GB},V_{DB}}$$

$$=-\left.\left(g_m\frac{\partial V_{GS}}{\partial V_{SB}}+g_{mb}\frac{\partial V_{BS}}{\partial V_{SB}}+g_{sd}\frac{\partial V_{DS}}{\partial V_{SB}}\right)\right|_{V_{GB},V_{DB}}=g_m+g_{mb}+g_{sd}$$

V_{GB}, V_{SB}, V_{DB}の小信号変化

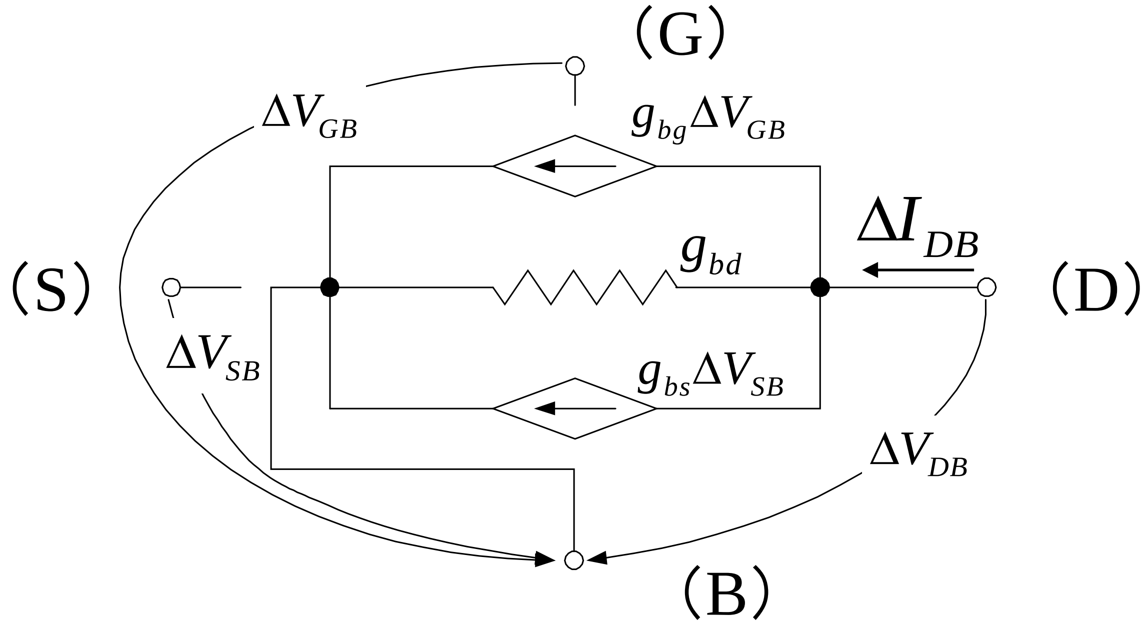


小信号変化による電流：ΔI_{DB}

V_{GB},V_{SB},V_{DB}の小信号変化による電流

$$\Delta I_{DB} \approx \left(\left.\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{GB}}\right|_{V_{BS},V_{DS}} \right)\Delta V_{GB} + \left(\left.\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{SB}}\right|_{V_{GS},V_{DS}} \right)\Delta V_{SB} + \left(\left.\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{DB}}\right|_{V_{GS},V_{BS}} \right)\Delta V_{DB}$$

$$= g_{bg}\Delta V_{GB} + g_{bs}\Delta V_{SB} + g_{bd}\Delta V_{DB}$$

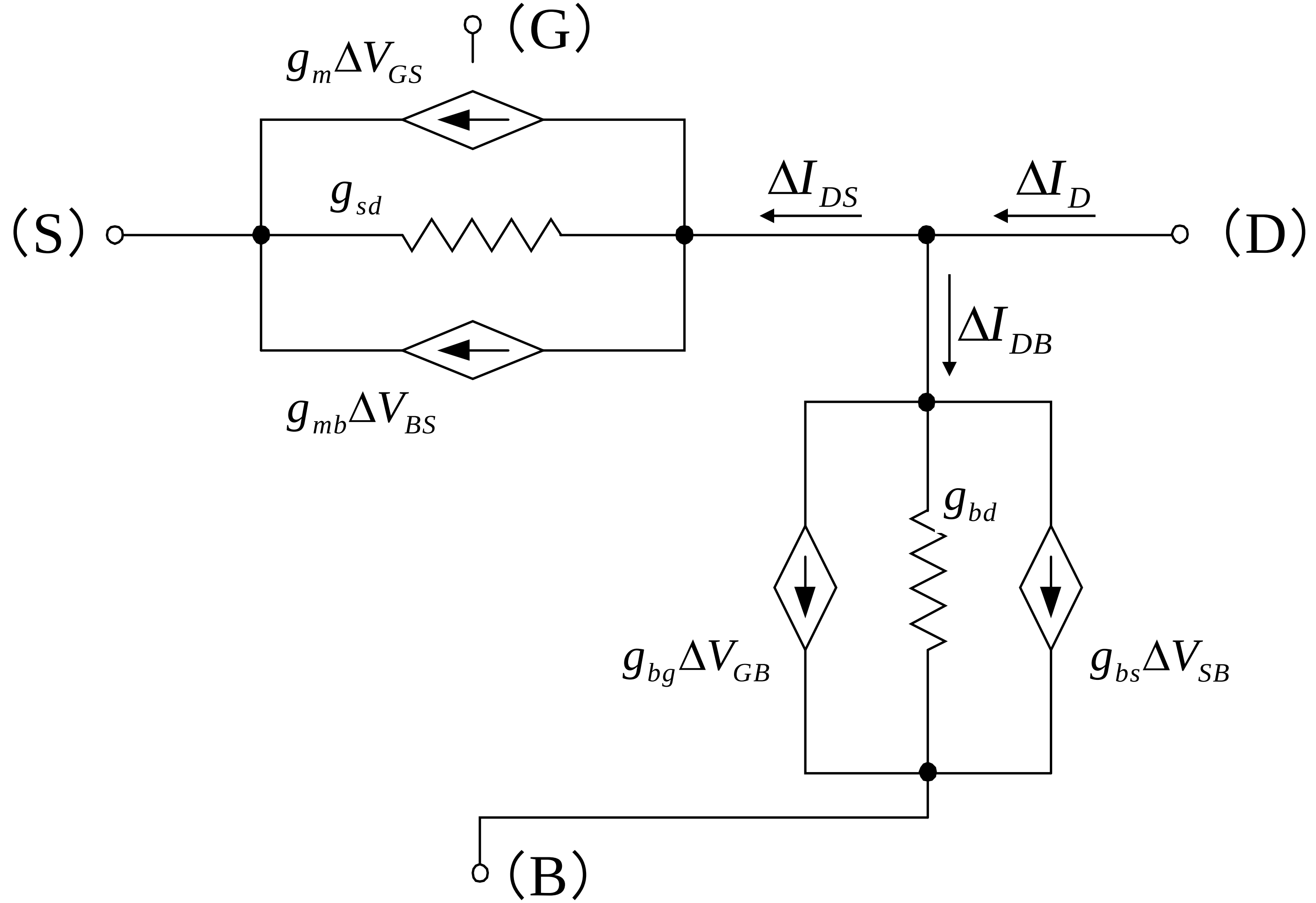


$$g_{bg} = \left.\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{GB}}\right|_{V_{SB},V_{DB}}$$

$$g_{bs} = \left.\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{SB}}\right|_{V_{GB},V_{DB}}$$

$$g_{bd} = \left.\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{DB}}\right|_{V_{GB},V_{SB}}$$

低周波小信号等価回路（チャネル電流と基板電流）



ゲート・トランス・コンダクタンス（強反転）

ゲート・トランス・コンダクタンスは、長チャネル・デバイスの場合、

$$g_m = \frac{W}{L}\mu C_{ox}^{'} V_{DS} \qquad V_{DS} \le V_{DS}^{'}$$

$$= \frac{W}{L}\mu C_{ox}^{'} V_{DS}^{'} \qquad V_{DS} > V_{DS}^{'}$$

$$\boxed{I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C_{ox}^{'}\left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{\alpha}{2}V_{DS}^{2}\right]}$$

$$\boxed{V_{DS}^{'} = \frac{V_{GS} - V_T}{\alpha}}$$

となる。飽和領域の場合$\left(V_{DS} > V_{DS}^{'}\right)$、

$$g_m = \frac{W}{L}\frac{\mu C_{ox}^{'}}{\alpha}\left(V_{GS} - V_T\right)$$

$$= \sqrt{2\frac{W}{L}\frac{\mu C_{ox}^{'}}{\alpha}I_{DS}} = \frac{2I_{DS}}{V_{GS} - V_T}$$

となる。ここで、I_{DS}は以下の如くである。

$$I_{DS} = \frac{1}{2}(W/L)\mu C_{ox}^{'}\left(V_{GS} - V_T\right)^2/\alpha$$

速度飽和がある場合、

$$g_m \approx WC_{ox}^{'}\mu \mathrm{E}_c$$

$$\approx WC_{ox}^{'}\left|v_d\right|_{\max}$$

となる。

$$I_{DS}^{'} \approx WC_{ox}^{'}\left(V_{GS} - V_T\right)\mu \mathrm{E}_c$$

基板トランス･コンダクタンス１（強反転）

完全対称強反転モデル

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left\{(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0)(V_{DB} - V_{SB}) - \frac{1}{2}\left(V_{DB}^2 - V_{SB}^2\right)\right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\gamma\left[(\phi_0 + V_{DB})^{3/2} - (\phi_0 + V_{SB})^{3/2}\right]\right\}$$

を使って、g_{mb}は

$$g_{mb} = \left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{BS}}\right|_{V_{GS},V_{DS}} = \begin{cases} \left(\dfrac{\gamma}{\sqrt{V_{DS} + V_{SB} + \phi_0} + \sqrt{V_{SB} + \phi_0}}\right) g_m & V_{DS} \le V'_{DS} \\ \left(\dfrac{\gamma}{\sqrt{V'_{DS} + V_{SB} + \phi_0} + \sqrt{V_{SB} + \phi_0}}\right) g_m & V_{DS} > V'_{DS} \end{cases}$$

となる。ここで、$V_{DB} = V_{DS} + V_{SB}$，$V_{GB} = V_{GS} + V_{SB}$，$V_{SB} = -V_{BS}$として微分する。

基板トランス・コンダクタンス２（強反転）

V_{DS}が小さい場合、またV_{GS}が小さい（$V_{DS}^{'}$も小さい）場合、

$$\frac{g_{mb}}{g_m} \approx \frac{\gamma}{2\sqrt{V_{SB}+\phi_0}} = \frac{dV_T}{dV_{SB}} = \alpha_1 - 1 \approx n - 1$$

となる。ここで、

$$V_T = V_{FB} + \phi_0 + \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}, \quad \alpha_1 = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}}, \quad n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F + V_{SB}^{'}}}$$

である。また、g_{mb}/g_mは、

$$\frac{g_{mb}}{g_m} \approx \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{ox}} \frac{t_{ox}}{d_{Bm}}$$

となる。d_{Bm}は空乏層深さである。

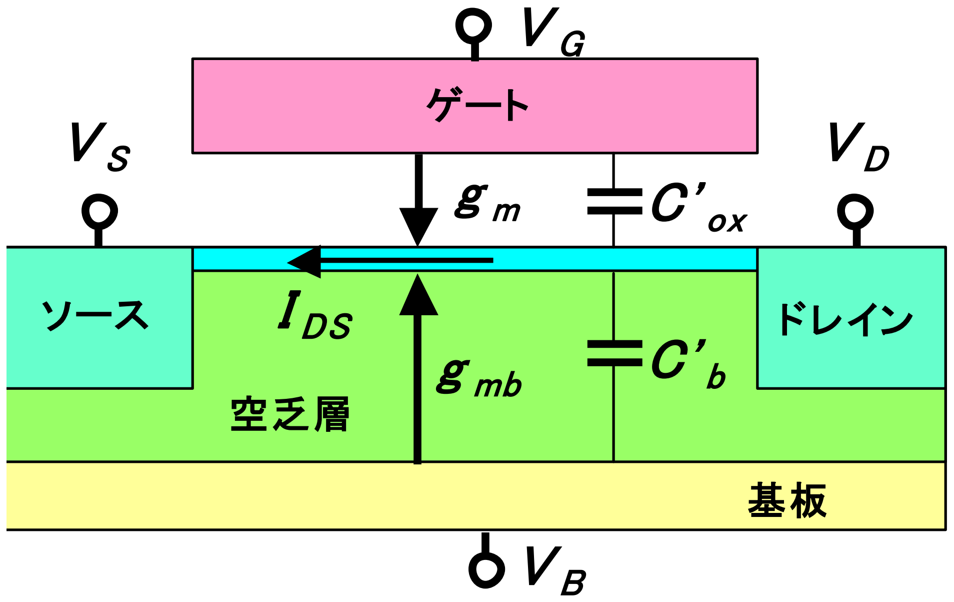
$$\gamma = \frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{C_{ox}^{'}}$$

$$d_{Bm} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{qN_A}}\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}$$

g_mとg_{mb}の関係

V_{DS}, V_{GS}が小さい場合（ $V_{DS}^{'}$ も小）

$$\frac{g_{mb}}{g_m} \approx \frac{\gamma}{2\sqrt{V_{SB}+\phi_0}} = \frac{dV_T}{dV_{SB}} = \alpha_1 - 1 \approx n - 1 = \frac{C_b^{'}}{C_{ox}^{'}}$$



$$\alpha_1 : \phi_0 \Rightarrow 2\phi_F + 6\phi_t$$

$$n : \quad \phi_0 \Rightarrow 2\phi_F$$

ソース・ドレイン・コンダクタンス１（強反転）

完全対称強反転モデル（非飽和領域）

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left\{(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0)(V_{DB} - V_{SB}) - \frac{1}{2}\left(V_{DB}^2 - V_{SB}^2\right) - \frac{2}{3}\gamma\left[(\phi_0 + V_{DB})^{3/2} - (\phi_0 + V_{SB})^{3/2}\right]\right\}$$

を使って、g_{sd}は以下の如くになる。$(V_{DB} = V_{DS} + V_{SB})$

$$g_{sd} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left(V_{GS} - V_{DS} - V_{FB} - \phi_0 - \gamma\sqrt{V_{DS} + V_{SB} + \phi_0}\right) \qquad V_{DS} \le V'_{DS}$$

また、簡単化されたソース参照強反転モデル（非飽和領域）

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{\alpha}{2}V_{DS}{}^2\right]$$

を使うと、g_{sd}は以下になり、このg_{sd}は$V_{DS} = 0$で上記g_{sd}に等しくなる。

$$g_{sd} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}(V_{GS} - V_T - \alpha V_{DS}) \qquad V_{DS} \le V'_{DS}$$

ソース·ドレイン·コンダクタンス２（強反転）

飽和領域でのg_{sd}を求める。（CLMとDIBLを考慮）CLMの場合、I_{DS}は、

$$I_{DS}=\frac{I_{DS}^{'}}{1-l_p/L}$$

したがって、g_{sd}は

$$g_{sd}=\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}}=\frac{\partial I_{DS}}{\partial l_p}\frac{\partial l_p}{\partial V_{DS}}=\frac{I_{DS}^{'}}{\left(1-l_p/L\right)^2}\frac{1}{L}\frac{\partial l_p}{\partial V_{DS}}$$

$$=\frac{I_{DS}^2}{I_{DS}^{'}}\frac{1}{L}\frac{\partial l_p}{\partial V_{DS}}\approx I_{DS}^{'}\frac{1}{L}\frac{\partial l_p}{\partial V_{DS}}\qquad \left\{\text{但し、}l_p=\frac{B_1}{\sqrt{N_A}}\left[\sqrt{\phi_D+\left(V_{DS}-V_{DS}^{'}\right)}-\sqrt{\phi_D}\right]\right\}$$

$$=I_{DS}^{'}\frac{1}{L}\frac{B_1}{\sqrt{N_A}}\frac{1}{2\sqrt{\phi_D+V_{DS}-V_{DS}^{'}}}$$

$$=\frac{B_1 I_{DS}^{'}}{2L\sqrt{N_A}\sqrt{\phi_D+V_{DS}-V_{DS}^{'}}}\qquad V_{DS}>V_{DS}^{'}$$

ソース·ドレイン·コンダクタンス３（強反転）

l_pが以下の場合、

$$l_p = l_a \ln\left[1 + \frac{V_{DS} - V_{DS}^{'}}{V_E}\right] \qquad 但し、l_a = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{ox}} t_{ox} d_j} \approx \sqrt{3 t_{ox} d_j}$$

g_{sd}は

$$g_{sd} = \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}} \approx I_{DS}^{'} \frac{1}{L} \frac{\partial l_p}{\partial V_{DS}}$$

$$= \frac{l_a}{L} \frac{I_{DS}^{'}}{V_E + \left(V_{DS} - V_{DS}^{'}\right)} = \frac{I_{DS}^{'}}{V_A\left(V_{DS}\right)}$$

$\Leftarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{DS} &= I_{DS}^{'}\left(1 + \frac{V_{DS} - V_{DS}^{'}}{V_A}\right) \\ g_{sd} &\approx \frac{I_{DS}^{'}}{V_A} \qquad V_{DS} > V_{DS}^{'} \end{aligned}}$$

但し、

$$V_A\left(V_{DS}\right) = \frac{L}{l_a}\left[V_E + \left(V_{DS} - V_{DS}^{'}\right)\right]$$

ソース·ドレイン·コンダクタンス4（強反転）

DIBLの場合、I_{DS}を以下の如くとすると、

$$I_{DS}=\frac{W}{L}\frac{\mu C_{ox}^{'}}{2\alpha}\left[V_{GS}-\hat{V}_T\left(V_{DS}\right)\right]^2 \qquad V_{DS}>V_{DS}^{'}$$

g_{sd}は、以下の如くになる。

$$g_{sd}=\frac{W}{L}\frac{\mu C_{ox}^{'}}{\alpha}\left[V_{GS}-\hat{V}_T\left(V_{DS}\right)\right]\left(-\frac{\partial \hat{V}_T}{\partial V_{DS}}\right)=g_m\left(-\frac{\partial \hat{V}_T}{\partial V_{DS}}\right) \qquad V_{DS}>V_{DS}^{'}$$

これからg_{sd}/g_mは､以下の如くになる。

$$\frac{g_{sd}}{g_m}=-\frac{\partial \hat{V}_T}{\partial V_{DS}}\approx 0.5\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{ox}}\frac{t_{ox}}{L}$$

$$\hat{V}_T=V_T+\Delta V_{TL}$$

$$\Delta V_{TL}=-2\beta_1\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{ox}}\frac{t_{ox}}{L}\left[\left(\phi_0+V_{SB}\right)+\beta_2 V_{DS}\right]$$

但し、$\beta_1\approx 1, \quad \beta_2\approx 0.25$

$$V_T=V_{FB}+\phi_0+\gamma\sqrt{\phi_0+V_{SB}}$$

ソース・ドレイン・コンダクタンス５（強反転）

ΔV_{TL}が以下の場合（擬似 2次元解析）

$$\Delta V_{TL} \approx -\left[3\left(\phi_{bi}-\phi_0\right)+V_{DS}\right]e^{-L/\lambda}$$

但し、$\lambda = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_s t_{ox} d_B}{\varepsilon_{ox}\beta_3}}$

g_{sd}/g_mは、以下の如くになる。

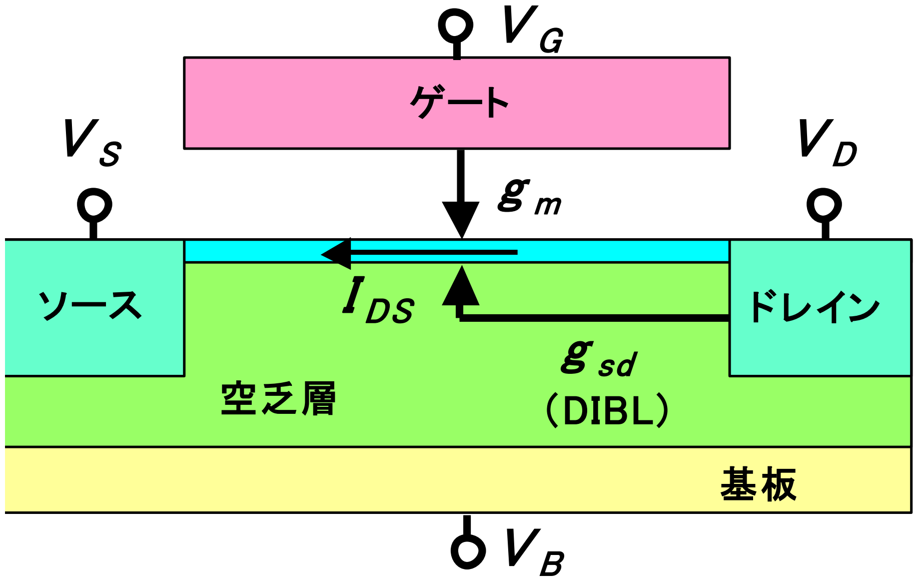
$$\frac{g_{sd}}{g_m} = -\frac{\partial \hat{V}_T}{\partial V_{DS}} \approx \exp\left[-\sqrt{\frac{\varepsilon_{ox}}{\varepsilon_s}\frac{L^2}{t_{ox}d_B}\beta_3}\right]$$

$\beta_3(\approx 1)$はフィッティング・パラメータである。

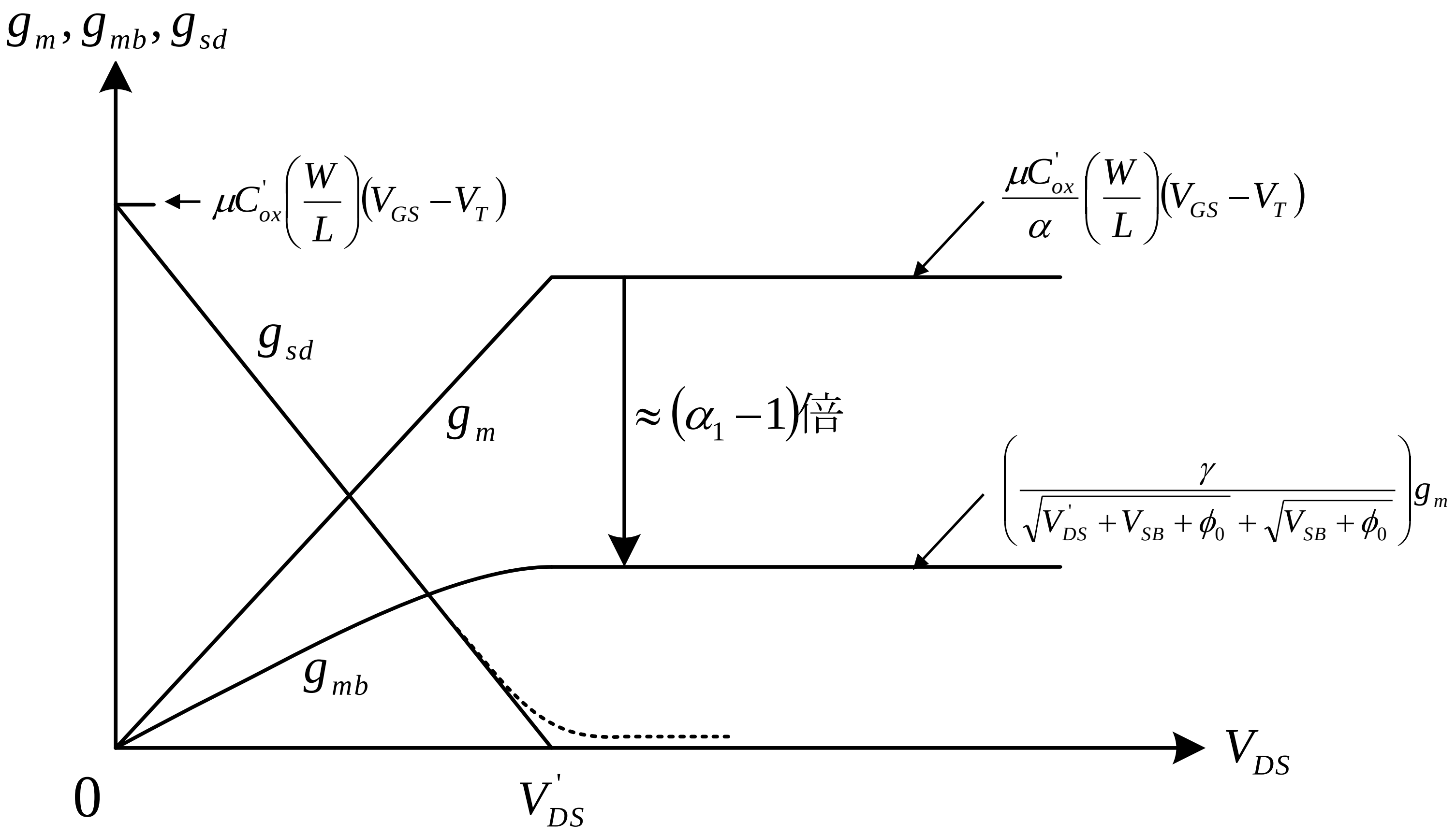
飽和領域のg_mとg_{sd}の関係

DIBLの場合

$$\frac{g_{sd}}{g_m} = -\frac{\partial \hat{V}_T}{\partial V_{DS}} \approx 0.5 \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{ox}} \frac{t_{ox}}{L}$$



g_m, g_{mb}, g_{sd} vs. V_{DS}



基板･ドレイン･コンダクタンス

g_{bg} :V_{GS}が上昇するにつれ正から負に変わる。

通常動作では、g_mよりかなり小さく無視できる。

g_{bs} :通常動作では、無視できる。

g_{bd}は、

$$g_{bd} = \left.\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{DB}}\right|_{V_{GB}, V_{SB}}$$

$$= \frac{I_{DB} V_i}{\left(V_{DS} - V_{DS}^{'}\right)^2}$$

←主要項のみ

となる。

$$\left|I_{DB}\right| = \left|I_{DS}\right| K_i \left(V_{DS} - V_{DS}^{'}\right) \exp\left(-\frac{V_i}{V_{DS} - V_{DS}^{'}}\right)$$

$$K_i = 1 \sim 3, \quad V_i = 10 \sim 30$$

出力コンダクタンス

出力コンダクタンスg_oは、
以下で表される。

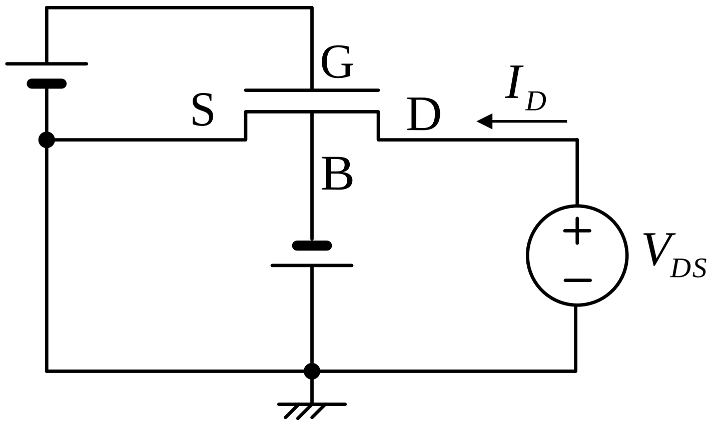
$$g_o = \left.\frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{GS}, V_{SB}}$$

$$= g_{sd} + g_{bd}$$

基板抵抗R_{be}がある場合、g_oは

$$g_o \approx g_{sd} + g_{mb} R_{be} g_{bd} + g_{bd}$$

となる。但し、$R_{be} \ll 1/g_{sd}$



出力コンダクタンス（基板抵抗がある場合）

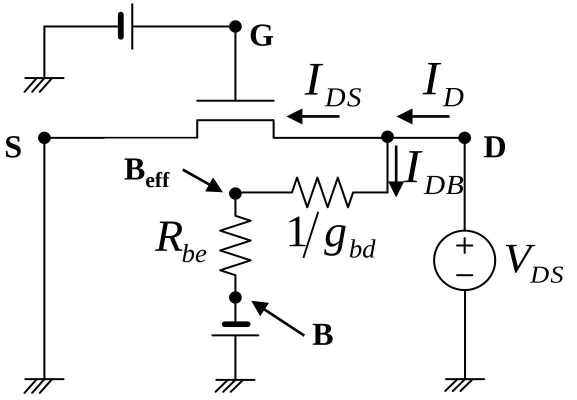
$$g_o = \left.\frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{GS},V_{SB}}$$

$$= \left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{GS},V_{SB}} + \left.\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{GS},V_{SB}}$$

$$= \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{SB_{eff}}}\frac{\partial V_{SB_{eff}}}{\partial V_{DS}} + \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DB_{eff}}}\frac{\partial V_{DB_{eff}}}{\partial V_{DS}} + \frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{SB_{eff}}}\frac{\partial V_{SB_{eff}}}{\partial V_{DS}} + \frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{DB_{eff}}}\frac{\partial V_{DB_{eff}}}{\partial V_{DS}}$$

$$\cong -g_{mb}\left(-R_{be}g_{bd}\right) + g_{sd} + g_{bs}\left(-R_{be}g_{bd}\right) + g_{bd}$$

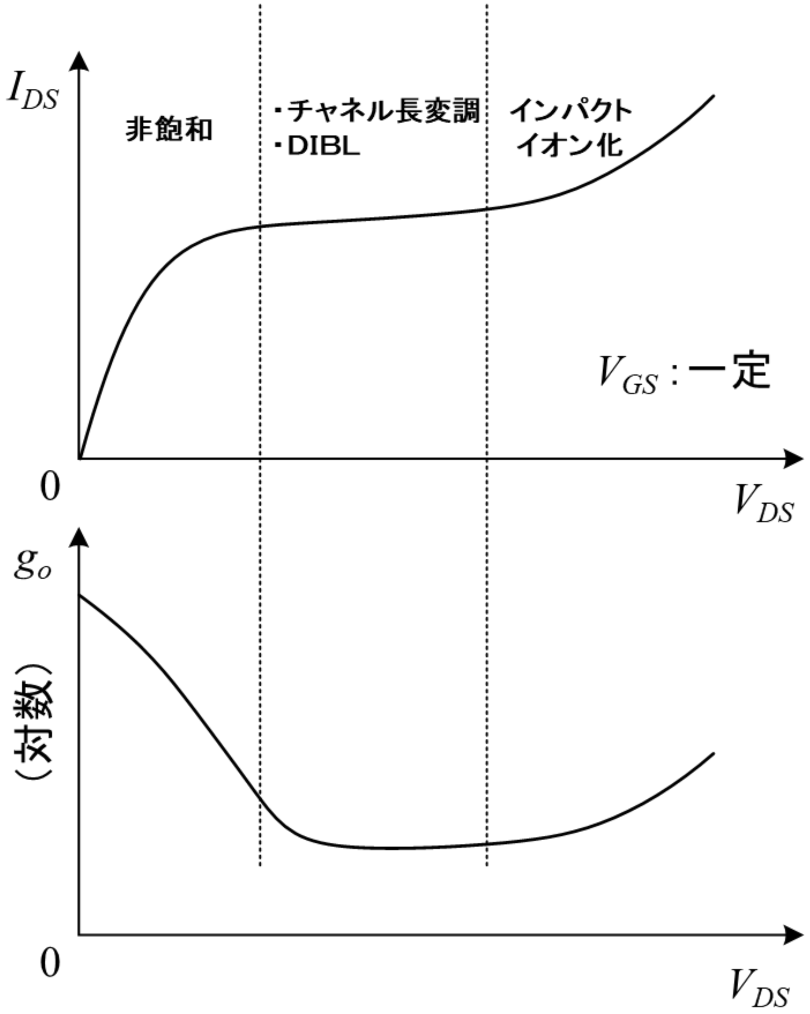
$$\approx g_{sd} + g_{mb}R_{be}g_{bd} + g_{bd}$$



$$g_{bd} = \frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{DB_{eff}}}$$

$$\frac{\partial V_{SB_{eff}}}{\partial V_{DS}} = \frac{\partial\left(V_{SB} - R_{be}I_{DB}\right)}{\partial V_{DS}} = -R_{be}\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{DS}} = -R_{be}\frac{\partial I_{DB}}{\partial V_{DB}} \cong -R_{be}g_{bd}, \qquad \frac{\partial V_{DB_{eff}}}{\partial V_{DS}} \cong 1$$

出力コンダクタンスg_o vs. V_{DS}



弱反転領域のコンダクタンス１

弱反転領域でのg_mは、

$$I_{DS} = \frac{W}{L} I'_M e^{(V_{GS}-V_M)/(n\phi_t)}\left(1-e^{-V_{DS}/\phi_t}\right)$$

$$g_m = \left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}}\right|_{V_{BS},V_{DS}} = \frac{1}{n}\frac{I_{DS}}{\phi_t}$$

となる。また、弱反転領域でのg_{mb}は

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\phi_t\left(Q'_{IL}-Q'_{I0}\right) = \frac{W}{L}\hat{I}(V_{GB})\left(e^{-V_{SB}/\phi_t}-e^{-V_{DB}/\phi_t}\right)$$

但し、$\hat{I}(V_{GB}) = \mu\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}}\phi_t^2 e^{\left(\psi_{sa}(V_{GB})-2\phi_F\right)/\phi_t}$

$$g_{mb} = \left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{BS}}\right|_{V_{GS},V_{DS}} \approx \frac{n-1}{n}\frac{I_{DS}}{\phi_t}$$

となる。ここで、$V_{GB}=V_{GS}-V_{BS}$，　$V_{DB}=V_{DS}-V_{BS}$として計算する。

$$I'_M = \mu\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{2\phi_F+V'_{SB}}}\phi_t^2$$

$$V_M = V_{FB}+2\phi_F+\gamma\sqrt{2\phi_F+V'_{SB}}$$

$$n = 1+\frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F+V'_{SB}}}$$

弱反転領域のコンダクタンス２

g_{mb}/g_mは、以下の如くになる。

$$\frac{g_{mb}}{g_m} \approx n-1 = \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F + V_{SB}}} \approx \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{ox}} \frac{t_{ox}}{d_B}$$

これは、強反転の場合と同じである。また、g_{sd}は以下の如くになる。

$$g_{sd} = \left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{GS}, V_{BS}} = \frac{e^{-V_{DS}/\phi_t}}{1-e^{-V_{DS}/\phi_t}} \frac{I_{DS}}{\phi_t}$$

V_{DS}が大きい場合、

$$g_{sd} = \frac{I'_{DS}}{V_{AW}}, \quad V_{DS} > 5\phi_t$$

となる。V_{AW}は、強反転の場合のV_Aより通常は小さい。

全領域（弱～強反転）でのモデル1

全領域（弱～強反転）でI_{DS}は、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\int_{V_{SB}}^{V_{DB}} \mu\left(-Q_I^{'}\right)dV$$

であるから、g_{sd}は、以下の如くになる。

$$g_{sd} = \left.\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{GS},V_{BS}} = \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DB}}\frac{\partial V_{DB}}{\partial V_{DS}} = \mu\frac{W}{L}\left(-Q_{IL}^{'}\right) = \mu\frac{W}{L}C_{ox}^{'}\left(V_{GB} - V_{FB} - \psi_{sL} - \gamma\sqrt{\psi_{sL}}\right)$$

但し、$Q_I^{'} = -C_{ox}^{'}\left(V_{GB} - V_{FB} - \psi_s - \gamma\sqrt{\psi_s}\right)$

これは、長チャネルデバイスで使える。また、g_{ss}は以下の如くになる。

$$g_{ss} = \left.\frac{\partial I_S}{\partial V_{SB}}\right|_{V_{GB},V_{DB}} = -\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{SB}} = \mu\frac{W}{L}\left(-Q_{I0}^{'}\right)$$

全領域（弱～強反転）でのモデル2

g_{ss}の飽和領域での具体形を求める。

簡単化されたチャージ・シート・モデルからの式

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\left[\frac{1}{2nC'_{ox}}\left(Q'^2_{I0} - Q'^2_{IL}\right) + \phi_t\left(Q'_{IL} - Q'_{I0}\right)\right]$$

を用いる。飽和領域で、$Q'_{IL} = 0$とおき、Q'_{I0}を求める。

$$Q'_{I0} = nC'_{ox}\phi_t\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2L}{\mu W\left(nC'_{ox}\phi_t\right)^2} nC'_{ox} I_{DS}}\right) = -\frac{2LI_{DS}}{\mu W\phi_t}\frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{2L}{\mu WnC'_{ox}\phi_t^2} I_{DS}}}$$

$$g_{ss} = \mu\frac{W}{L}\left(-Q'_{I0}\right) = \frac{I_{DS}}{\phi_t}\frac{2}{1 + \sqrt{4\frac{I_{DS}}{I_Z} + 1}},\qquad \text{但し、} I_Z = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left(2n\phi_t{}^2\right)$$

全領域（弱～強反転）でのモデル3

g_mの飽和領域での具体形を求める。

簡単化されたチャージ・シート・モデルからの式

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\left[\frac{1}{2nC_{ox}^{'}}\left(Q_{I0}^{'2} - Q_{IL}^{'2}\right) + \phi_t\left(Q_{IL}^{'} - Q_{I0}^{'}\right)\right]$$

を用いる。飽和領域で、$Q_{IL}^{'} = 0$とおくと、g_mは

$$g_m = \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} = \frac{W}{L}\mu\left(\frac{Q_{I0}^{'}}{nC_{ox}^{'}} - \phi_t\right)\frac{\partial Q_{I0}^{'}}{\partial V_{GS}} \approx \frac{W}{L}\mu\frac{Q_{I0}^{'}}{nC_{ox}^{'}}\left(-C_{ox}^{'}\right) = \frac{W}{L}\mu\frac{\left(-Q_{I0}^{'}\right)}{n} = \frac{g_{ss}}{n}$$

但し、$Q_{I0}^{'} = -C_{ox}^{'}\left(V_{GB} - V_{FB} - \psi_{s0} - \gamma\sqrt{\psi_{s0}}\right), \quad g_{ss} = \mu\frac{W}{L}\left(-Q_{I0}^{'}\right)$

全領域(弱～強反転)でのモデル4

g_{mb}の飽和領域での具体形を求める。

飽和領域では、g_{sd}はg_mやg_{mb}に比べ小さく無視できる。

(但し、長チャネルデバイスの場合) したがって、

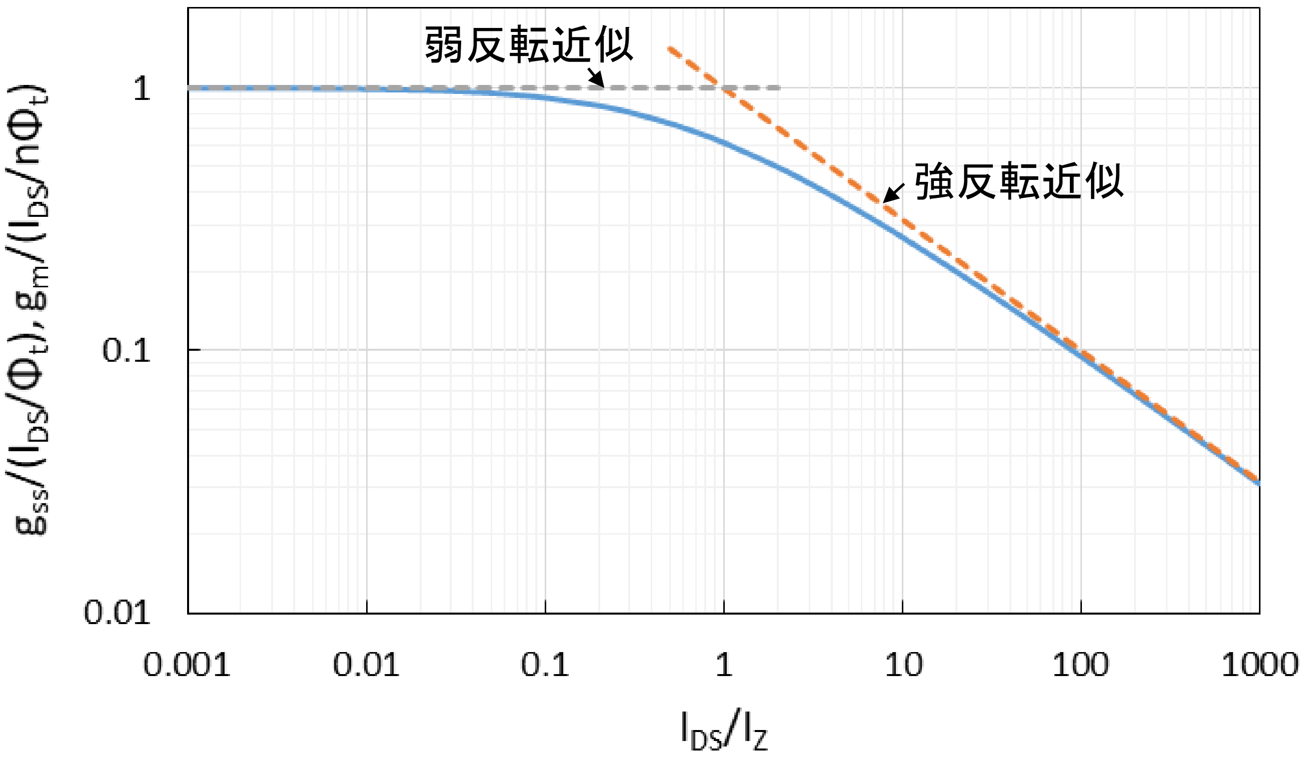
$$g_m + g_{mb} \approx g_{ss}, \quad \left(g_{ss} = g_m + g_{mb} + g_{sd}\right)$$

となる。また、$g_m \approx \dfrac{g_{ss}}{n}$であるから、

$$g_{mb} \approx \frac{n-1}{n} g_{ss}$$

となる。

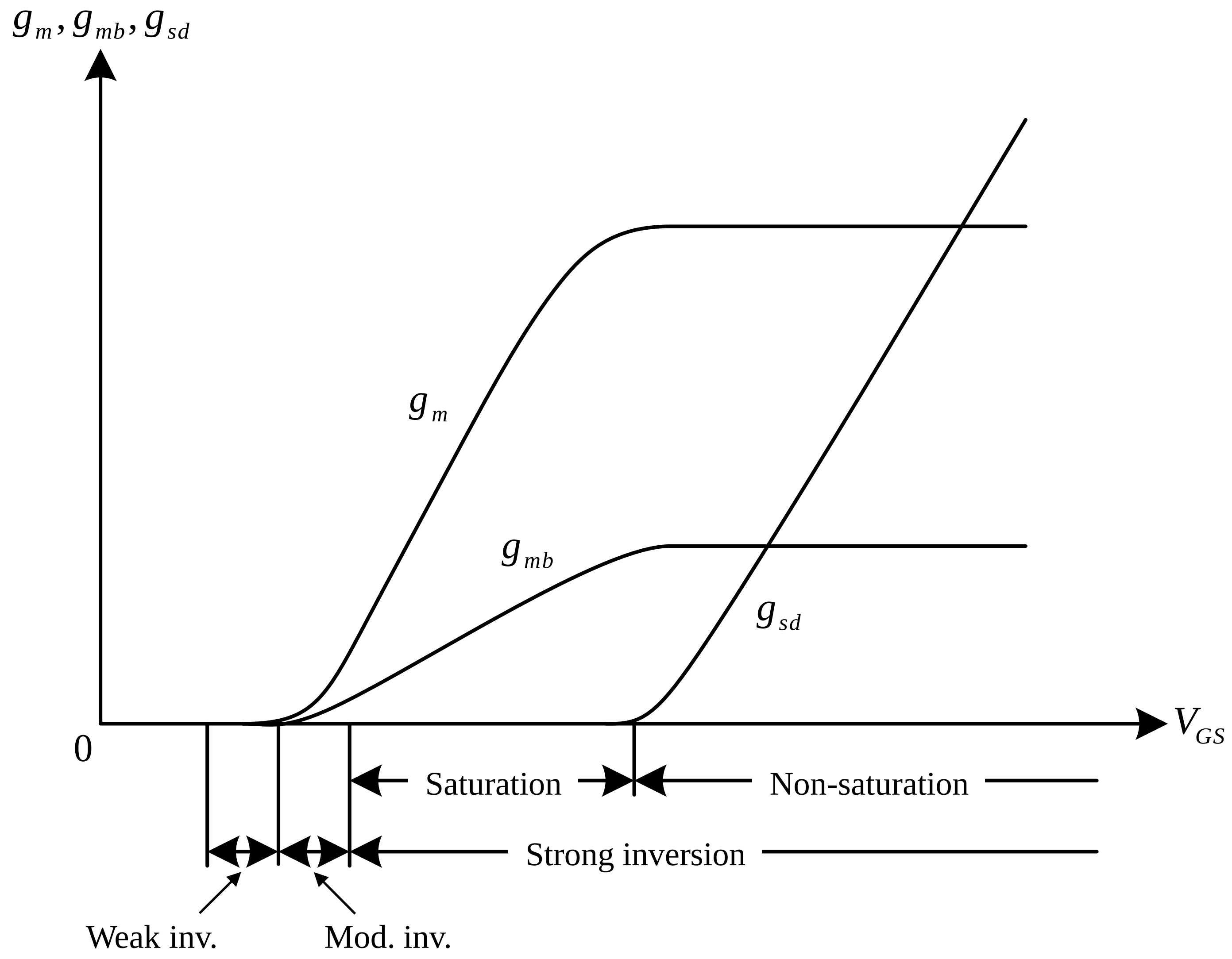
最大値で規格化された g_{ss} と g_m vs. 規格化されたI_{DS}（I_{DS}/I_Z）



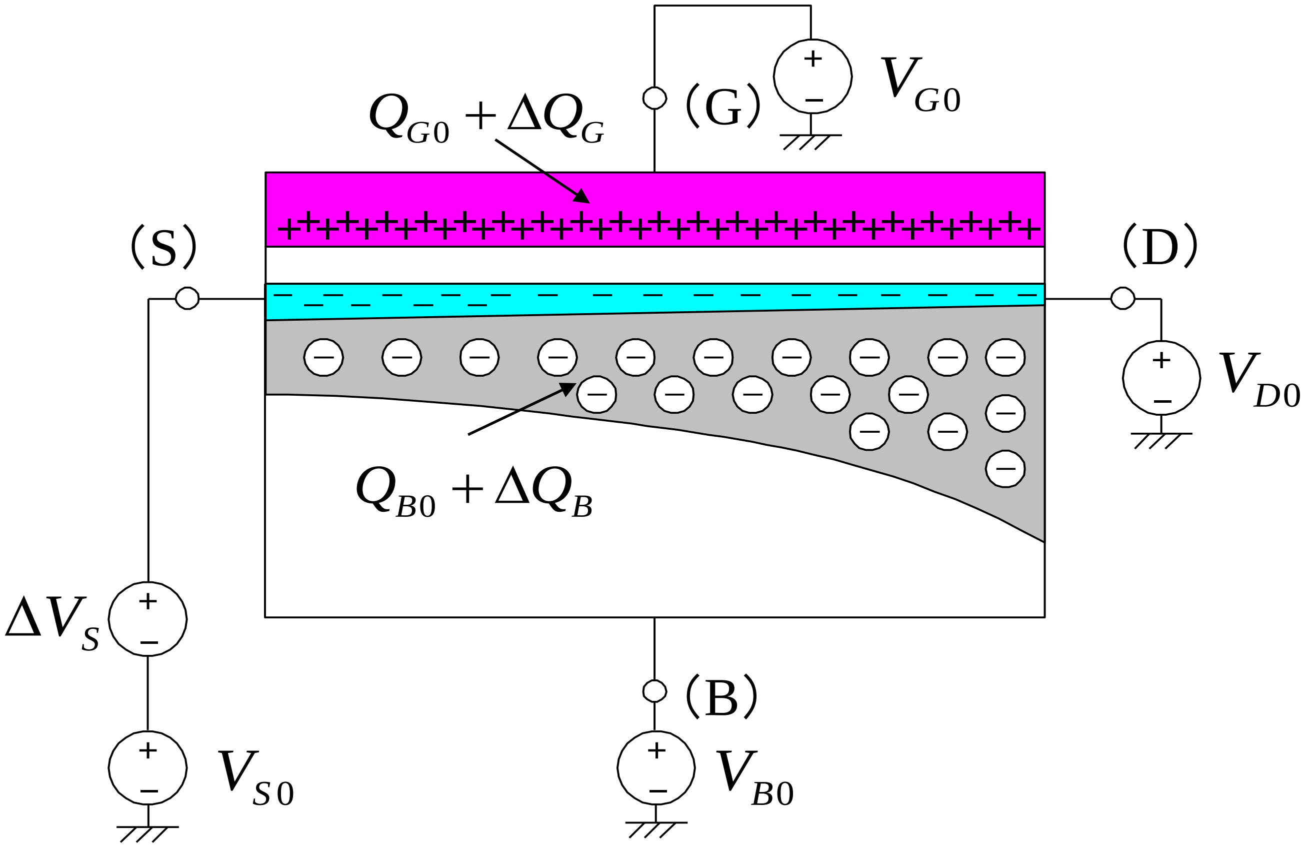
（飽和領域）

A. I. A. Cunha, et. al., "A Current-Based Model for the MOS transistor," Proceedings 1997 International Symposium in Circuit and Systems, pp.1608-1611, Hong Kong, June 1997.

小信号g_m, g_{mb}, g_{sd} のV_{GS}依存性



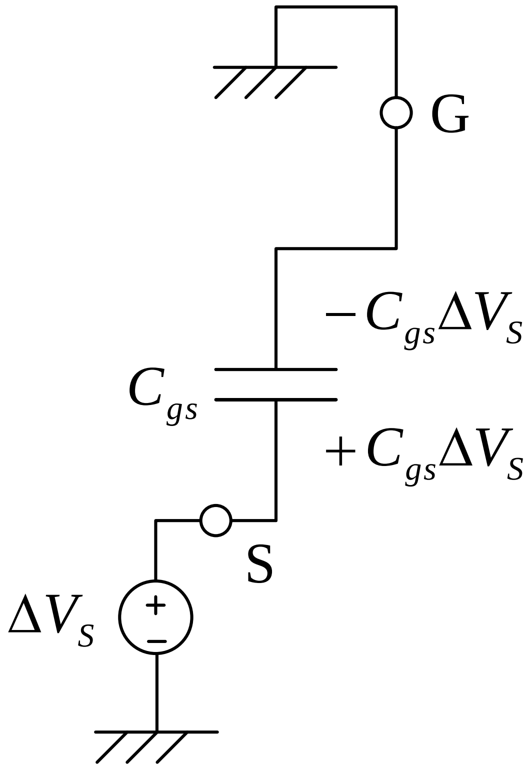
中間周波小信号による容量モデル（ソース側：C_{gs}, C_{bs}）



$$C_{gs}=-\frac{\partial Q_G}{\partial V_S}$$

$$C_{bs}=-\frac{\partial Q_B}{\partial V_S}$$

ゲート～ソース容量の意味



ゲート電荷の変化は、

$$\Delta Q_G = -C_{gs}\Delta V_S$$

であるから、

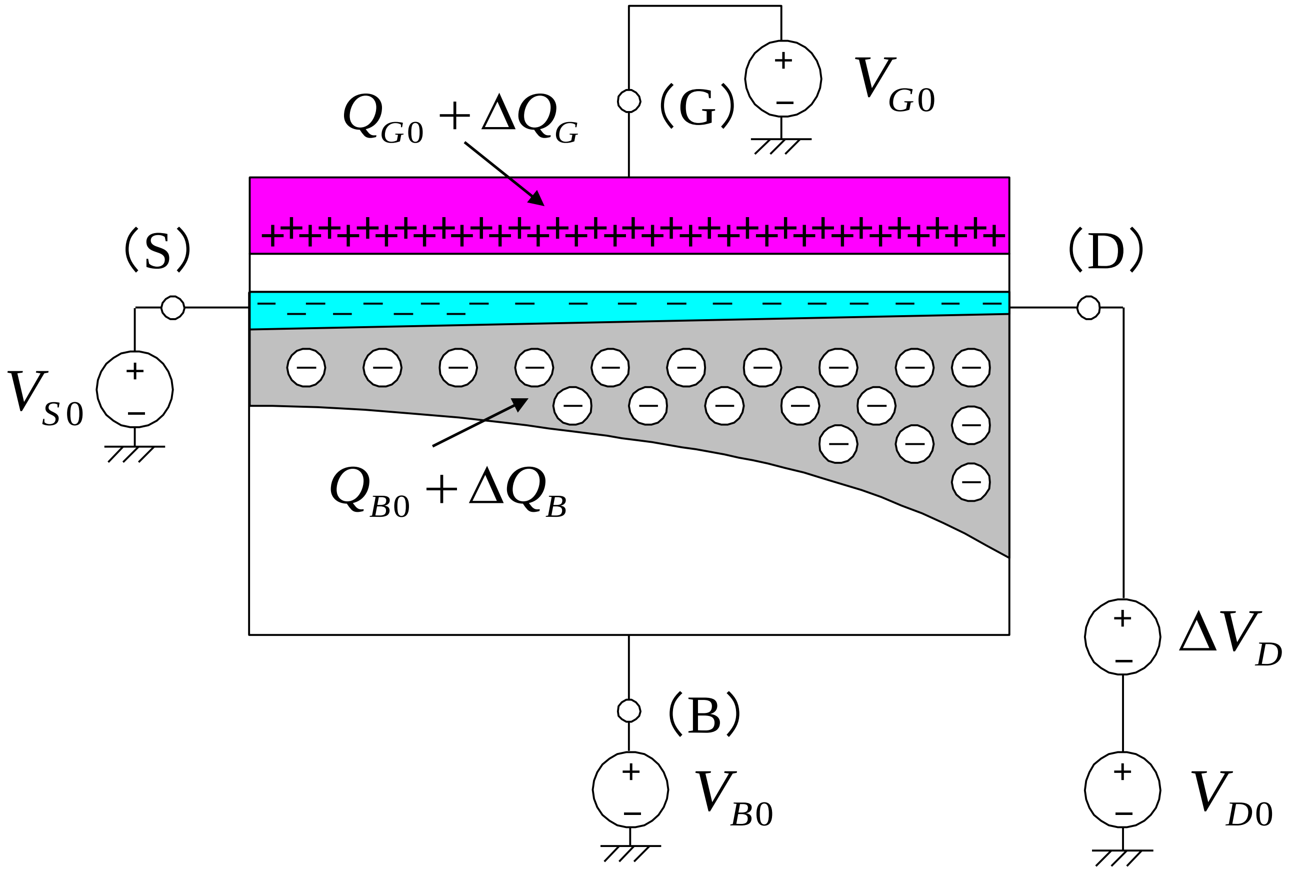
$$C_{gs} = -\Delta Q_G / \Delta V_S$$

となる。微分量では、

$$C_{gs} = -\left.\frac{\partial Q_G}{\partial V_S}\right|_{V_G, V_D, V_B}$$

となる。

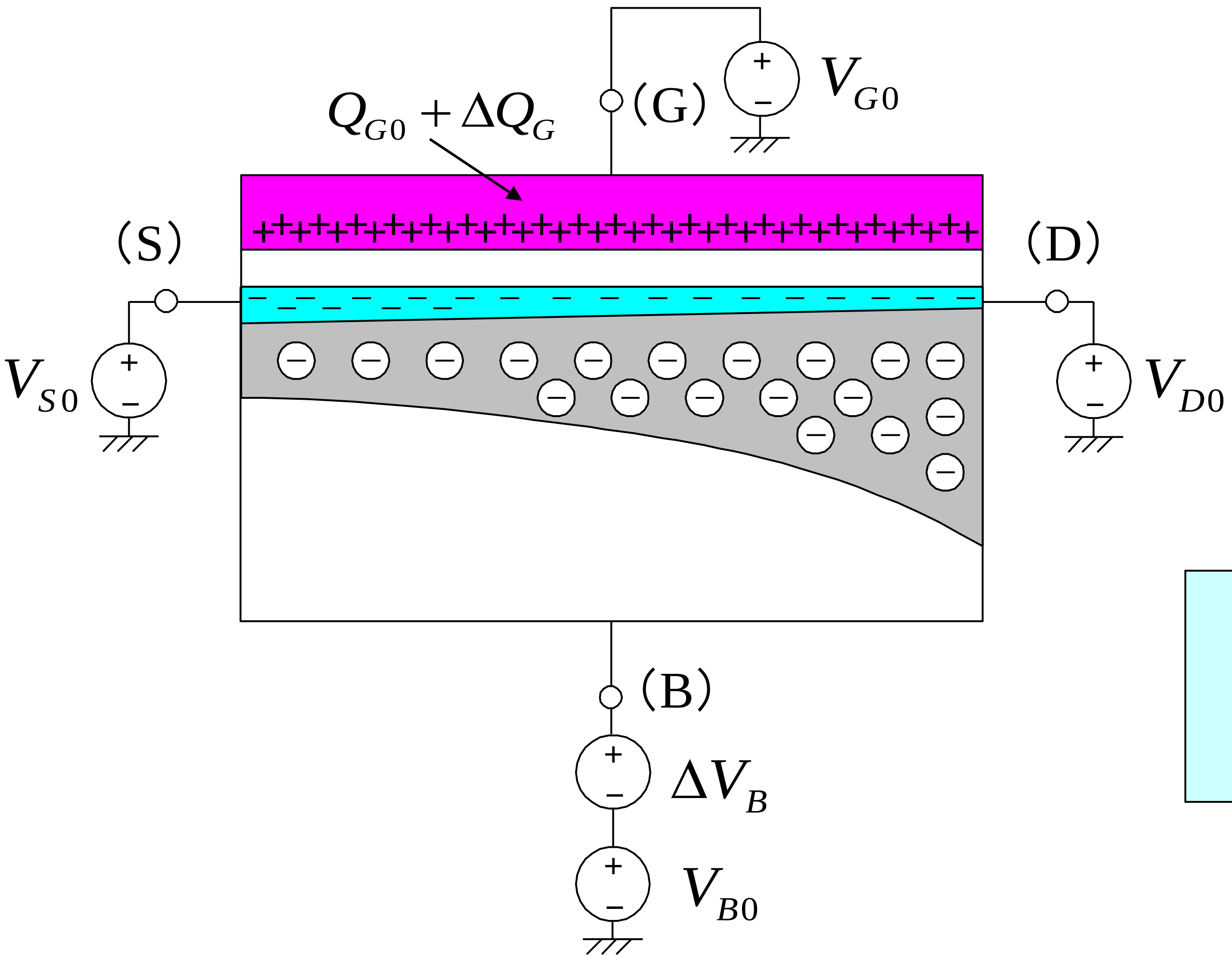
中間周波小信号による容量モデル(ドレイン側: C_{gd}, C_{bd})



$$C_{gd} = -\frac{\partial Q_G}{\partial V_D}$$

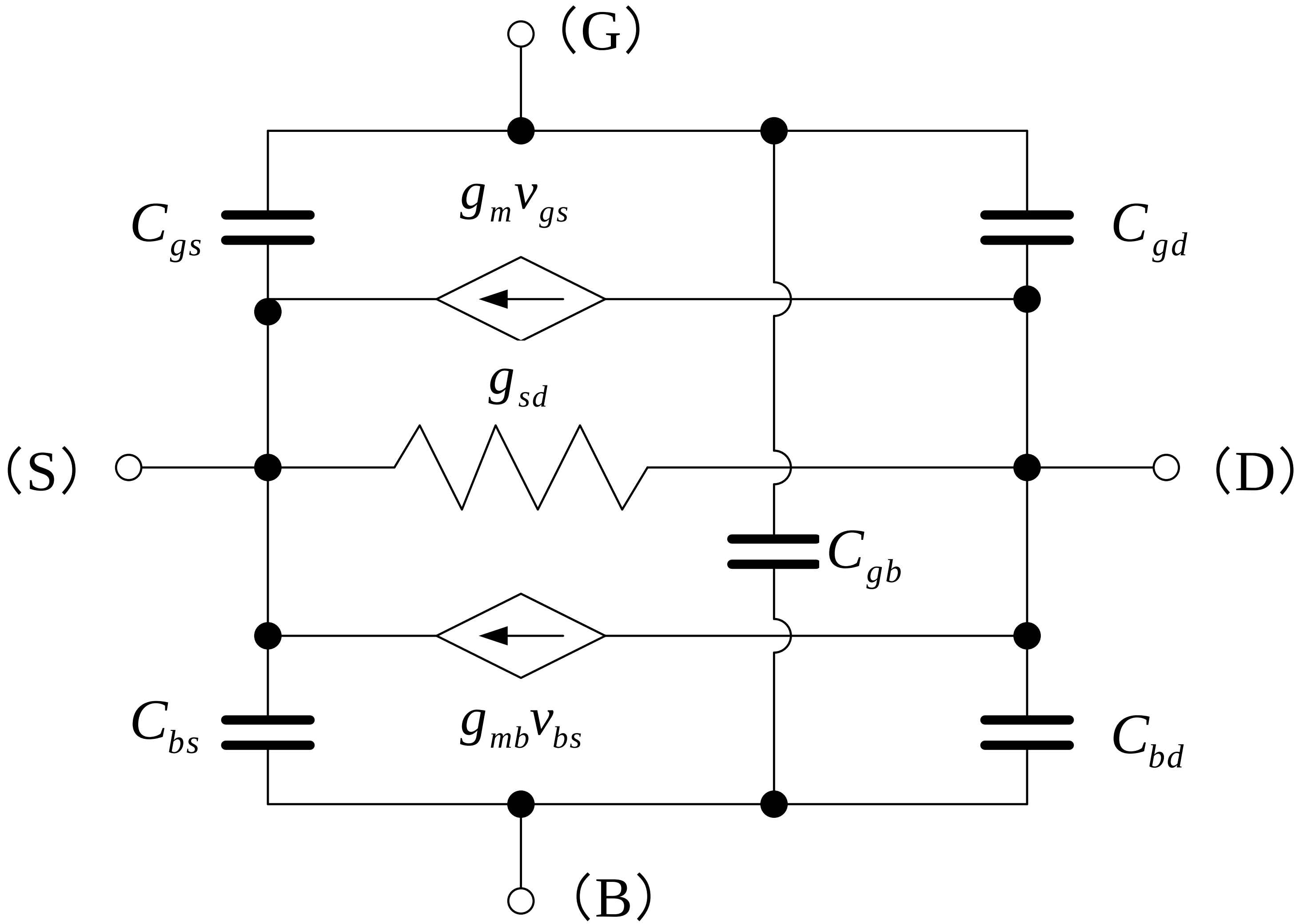
$$C_{bd} = -\frac{\partial Q_B}{\partial V_D}$$

中間周波小信号による容量モデル（基板側: C_{gb}）



$$C_{gb}=-\frac{\partial Q_G}{\partial V_B}$$

MOSトランジスタ小信号等価回路（簡易版）



強反転での各容量計算(条件)

強反転電流式：簡単化されたソース参照モデル

Q_BとQ_Gの表現

$$Q_B = -WLC'_{ox}\left[\gamma\sqrt{\phi_0+V_{SB}}+\frac{\alpha-1}{\alpha}(V_{GS}-V_T)\left(1-\frac{2}{3}\frac{1+\eta+\eta^2}{1+\eta}\right)\right]$$

$$Q_G = WLC'_{ox}\left[\frac{V_{GS}-V_T}{\alpha}\left(\alpha-1+\frac{2}{3}\frac{1+\eta+\eta^2}{1+\eta}\right)+\gamma\sqrt{\phi_0+V_{SB}}\right]-Q_o$$

仮定1：　$\alpha \Rightarrow \alpha_1 = 1+\dfrac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0+V_{SB}}} = 1+\dfrac{dV_T}{dV_{SB}}$

仮定2：　α_1のV_SとV_Bの微分は無視（α_1: 定数）

$\Rightarrow V_{SB}$が大きく、V_{DS}が小さい場合成立

強反転領域での容量計算（C_{bs} の導出）

$$C_{bs} = -\frac{\partial Q_B}{\partial V_S}$$

$$= C_{ox}\left\{\frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}} + \frac{\partial}{\partial V_S}\left[\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}(V_{GS} - V_T)\left(1 - \frac{2}{3}\frac{1+\eta+\eta^2}{1+\eta}\right)\right]\right\}$$

$$= C_{ox}(\alpha_1 - 1)\left\{1 + \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial V_S}\left[(V_{GS} - V_T)\left(1 - \frac{2}{3}\frac{1+\eta+\eta^2}{1+\eta}\right)\right]\right\}$$

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial V_S}\left[(V_{GS} - V_T)\left(1 - \frac{2}{3}\frac{1+\eta+\eta^2}{1+\eta}\right)\right]$$

$$= \left(-1 - \frac{\partial V_T}{\partial V_S}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\frac{1+\eta+\eta^2}{1+\eta}\right) - \frac{2}{3}(V_{GS} - V_T)\frac{\partial}{\partial V_S}\left(\frac{1+\eta+\eta^2}{1+\eta}\right) = -\alpha_1\left(1 - \frac{2}{3}\frac{1+\eta+\eta^2}{1+\eta}\right) - \frac{2}{3}\alpha_1\frac{\eta(2\eta+\eta^2)}{(1+\eta)^2}$$

強反転領域での容量 C_{bs}

したがって、C_{bs}は以下の如くなる。

$$C_{bs} = (\alpha_1 - 1)C_{ox}\frac{2(1+2\eta)}{3(1+\eta)^2} = (\alpha_1 - 1)C_{gs}$$

ここで、

$$(\alpha_1 - 1)C_{ox} = \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}}C'_{ox}WL = \frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}}WL$$

$$= C'_{bc}(V_{SB})WL$$ （C'_{bc}は、チャネル～基板間容量）

したがって、以下の関係がある。

$$\frac{C_{bs}}{C_{gs}} \approx \frac{C'_{bc}(V_{SB})}{C'_{ox}} = \frac{dV_T}{dV_{SB}} = \alpha_1 - 1$$ （V_{SB}が大きく、V_{DS}が小さい場合）

強反転領域での容量

$$C_{gs} = -\left.\frac{\partial Q_G}{\partial V_S}\right|_{V_G, V_D, V_B} = C_{ox}\frac{2(1+2\eta)}{3(1+\eta)^2}$$

$$C_{bs} = -\left.\frac{\partial Q_B}{\partial V_S}\right|_{V_G, V_D, V_B} = (\alpha_1 - 1)C_{ox}\frac{2(1+2\eta)}{3(1+\eta)^2} = (\alpha_1 - 1)C_{gs}$$

ソース側容量

$$C_{gd} = -\left.\frac{\partial Q_G}{\partial V_D}\right|_{V_G, V_S, V_B} = C_{ox}\frac{2(\eta^2+2\eta)}{3(1+\eta)^2}$$

$$C_{bd} = -\left.\frac{\partial Q_B}{\partial V_D}\right|_{V_G, V_S, V_B} = (\alpha_1 - 1)C_{ox}\frac{2(\eta^2+2\eta)}{3(1+\eta)^2} = (\alpha_1 - 1)C_{gd}$$

ドレイン側容量

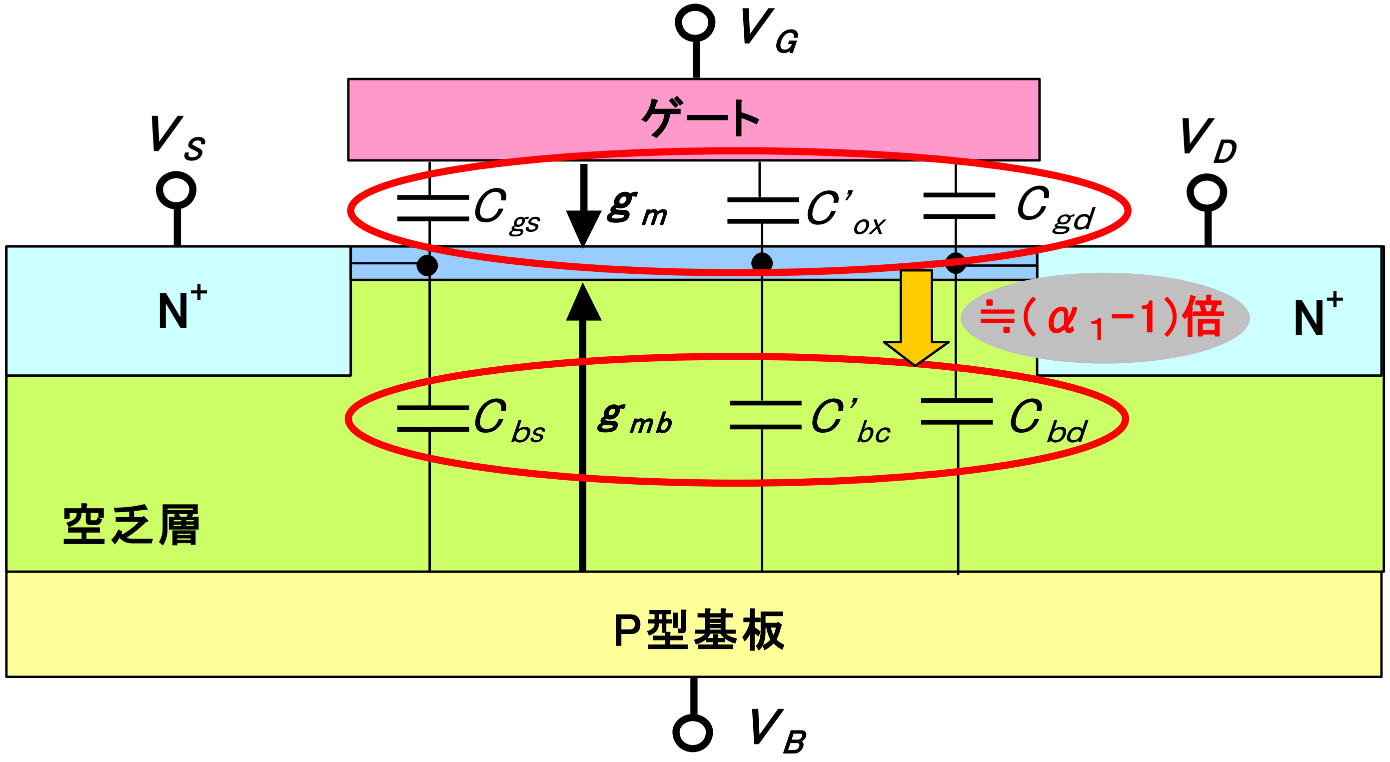
$$C_{gb} = -\left.\frac{\partial Q_G}{\partial V_B}\right|_{V_G, V_S, V_D} = \frac{\alpha_1 - 1}{3\alpha_1}C_{ox}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^2$$

ゲート～基板間容量

強反転領域での各容量の関係

V_{DS}またはV_{GS}が小さい場合

$$\frac{C_{bs}}{C_{gs}} \approx \frac{C_{bd}}{C_{gd}} \approx \frac{C'_{bc}(V_{SB})}{C'_{ox}} \approx \frac{g_{mb}}{g_m} \approx \frac{dV_T}{dV_{SB}} = \alpha_1 - 1 \approx n - 1$$



強反転領域での容量の精度

C_{gs}とC_{gd}は全てのV_{DS}で精度は良い。

C_{bs}、C_{bd}、C_{gb}は$V_{DS}=0$で正確である。

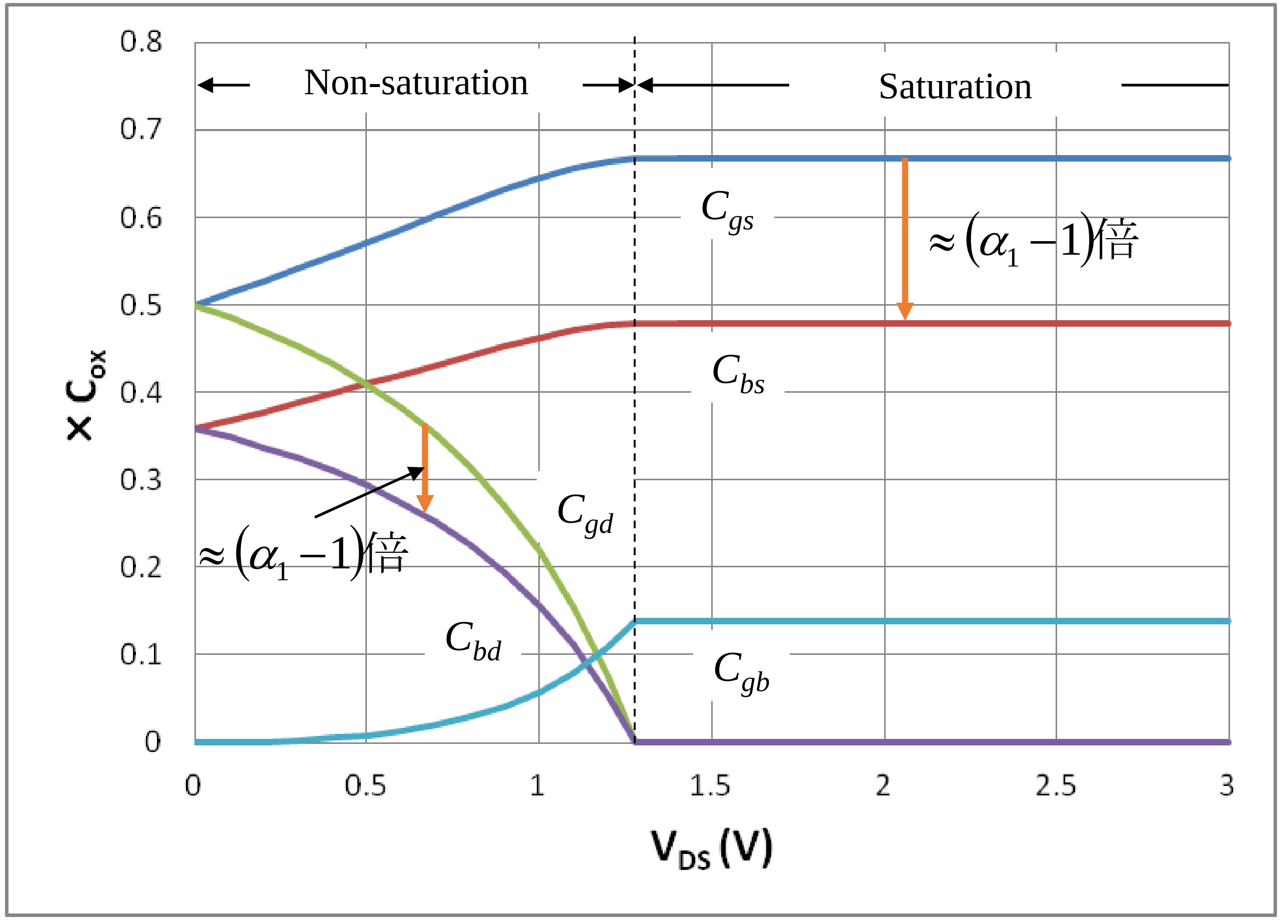
（V_{GS}とV_{DS}が大きく、V_{SB}が小さい場合精度が良くない。）

C_{bs}、C_{bd}、C_{gb}に関しもっと精度を要求する場合、α_1を以下のα_5に変える。

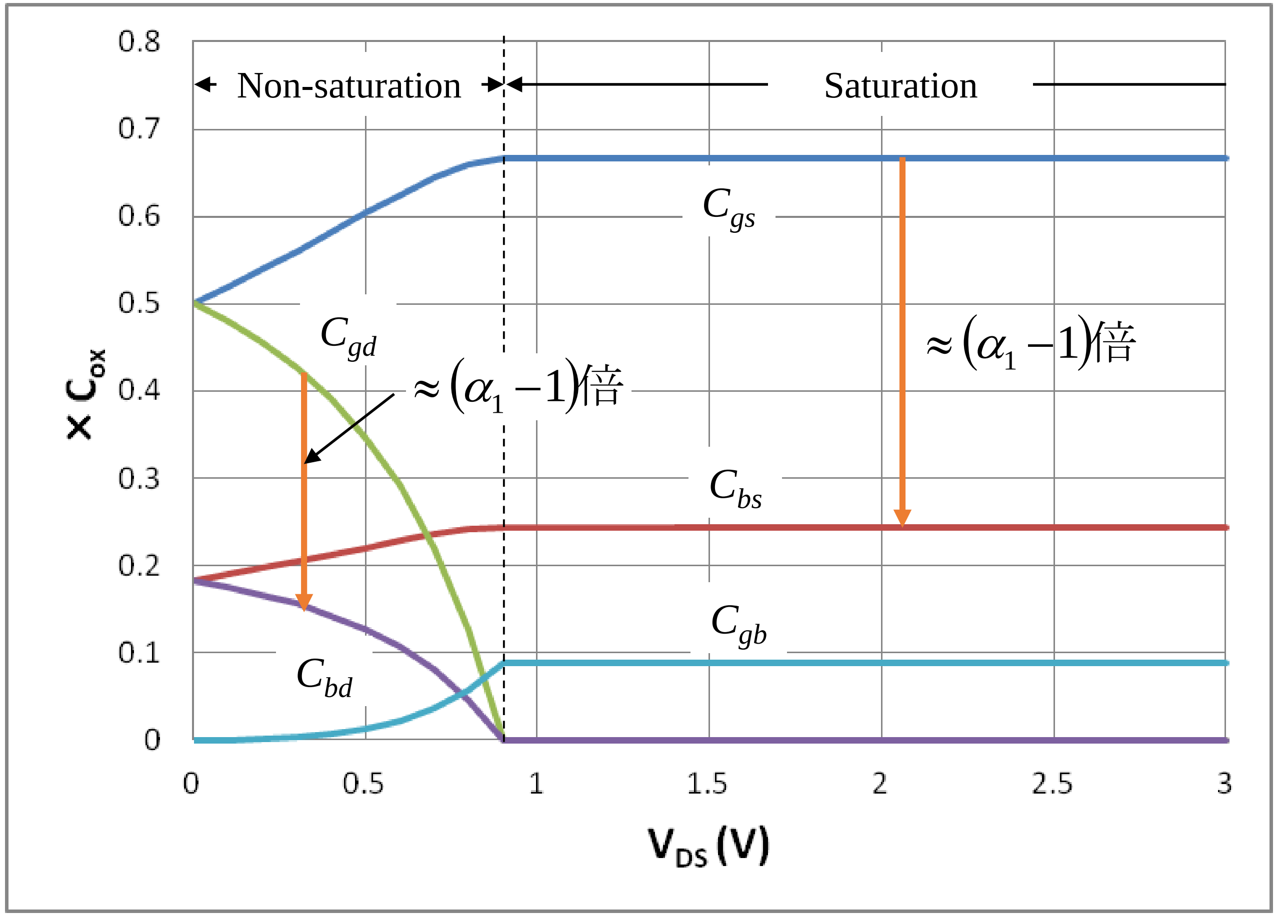
$$\alpha_5 = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB} + k_c V_{DS}^{'}(1-\alpha)}}$$

C_{gb}の場合 : $k_c = 1,\quad C_{bs}$とC_{bd}の場合 : $k_c = 0.1$〜0.2

小信号容量 vs. V_{DS} (V_{SB}=0)



小信号容量 vs. V_{DS} (V_{SB}=2V)



非飽和及び飽和領域での各容量

非飽和領域での容量: $\eta = 1,\ V_{DS} = 0$

$$C_{gs} = C_{gd} = \frac{C_{ox}}{2}$$

ｹﾞｰﾄ側容量

$$C_{bs} = C_{bd} = (\alpha_1 - 1)\frac{C_{ox}}{2} = \frac{1}{2}C_{bc}^{'}(V_{SB})WL$$

基板側容量

$C_{gb} = 0$ （反転層のシールドによる）

ｹﾞｰﾄ～基板間容量

飽和領域での容量: $\eta = 0,\ V_{DS} > V_{DS}^{'}$

$$C_{gs} = \frac{2}{3}C_{ox}$$

$$C_{bs} = \frac{2}{3}(\alpha_1 - 1)C_{ox}$$

ｿｰｽ側容量

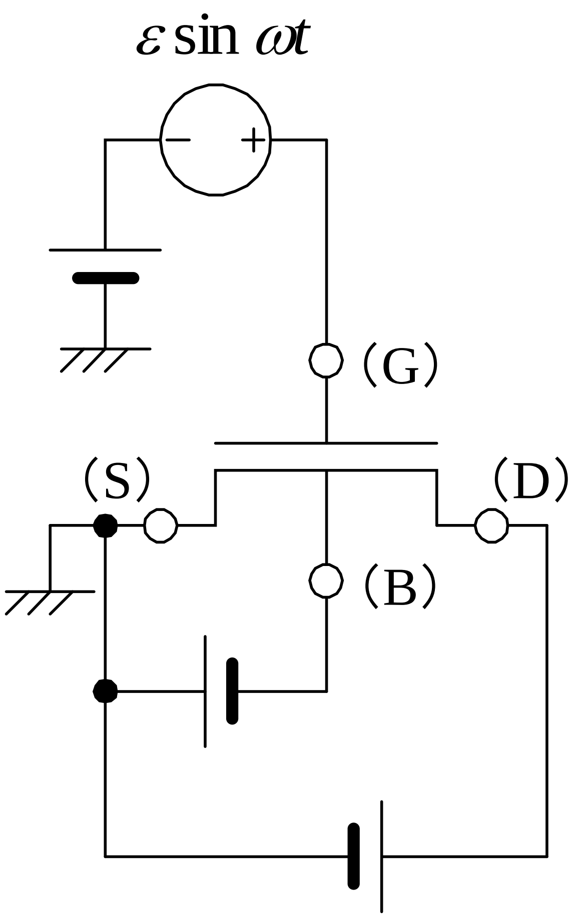
$$C_{gd} = C_{bd} = 0$$

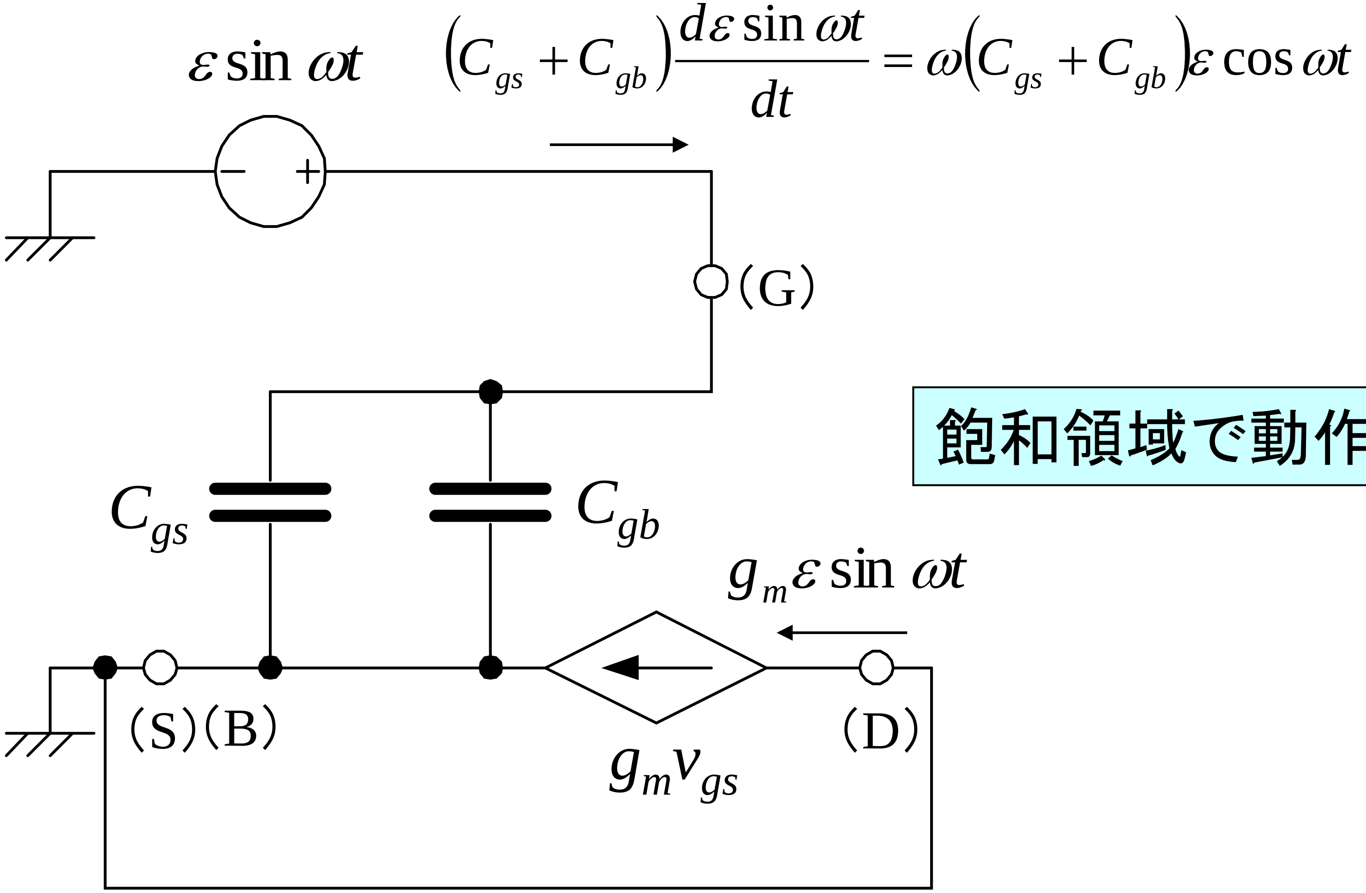
ﾄﾞﾚｲﾝ側容量

$$C_{gb} = \frac{\alpha_1 - 1}{3\alpha_1}C_{ox}$$

ｹﾞｰﾄ～基板間容量

ゲートへの小信号印加等価回路





飽和領域で動作

真性トランジション周波数

- 短絡回路電流利得

  |小信号ﾄﾞﾚｲﾝ電流|/|小信号ｹﾞｰﾄ電流|

$$a_i = \frac{g_m}{\omega(C_{gs} + C_{gb})}$$

- 真性ﾄﾗﾝｼﾞｼｮﾝ周波数（ｶｯﾄｵﾌ周波数）:　$a_i = 1$

$$\omega_{Ti} = \frac{g_m}{C_{gs} + C_{gb}} \approx \frac{g_m}{C_{gs}} = \frac{3}{2}\frac{\mu(V_{GS} - V_T)}{\alpha L^2} = \frac{3}{2}\omega_0 \qquad \omega_0 = \frac{\mu(V_{GS} - V_T)}{\alpha L^2}$$

飽和領域（強反転）:速度飽和のない場合

弱反転、空乏及び蓄積領域での容量

弱反転領域でのC_{gb}は

$$Q_G \approx -Q_B - Q_o, \quad Q_B = -WLC'_{ox}\gamma\left(-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+V_{GB}-V_{FB}}\right)$$

から、以下の如くになる。

$$C_{gb} = C_{ox}\frac{\gamma}{2\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+V_{GB}-V_{FB}}}$$

また、

$$C_{gd} \approx C_{gs} \approx C_{bd} \approx C_{bs} \approx 0$$

である。弱反転での真性カットオフ周波数は

$$\omega_{Ti} \approx \frac{g_m}{C_{gb}} = \frac{\mu\phi_t}{L^2}\frac{I_{DS}}{I_M} \qquad V_{DS} > 5\phi_t$$

となる。

空乏領域でのC_{gb}は、弱反転領域と同じになり、

$$C_{gb} = C_{ox}\frac{\gamma}{2\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+V_{GB}-V_{FB}}}$$

となる。また、蓄積領域でのC_{gb}は、

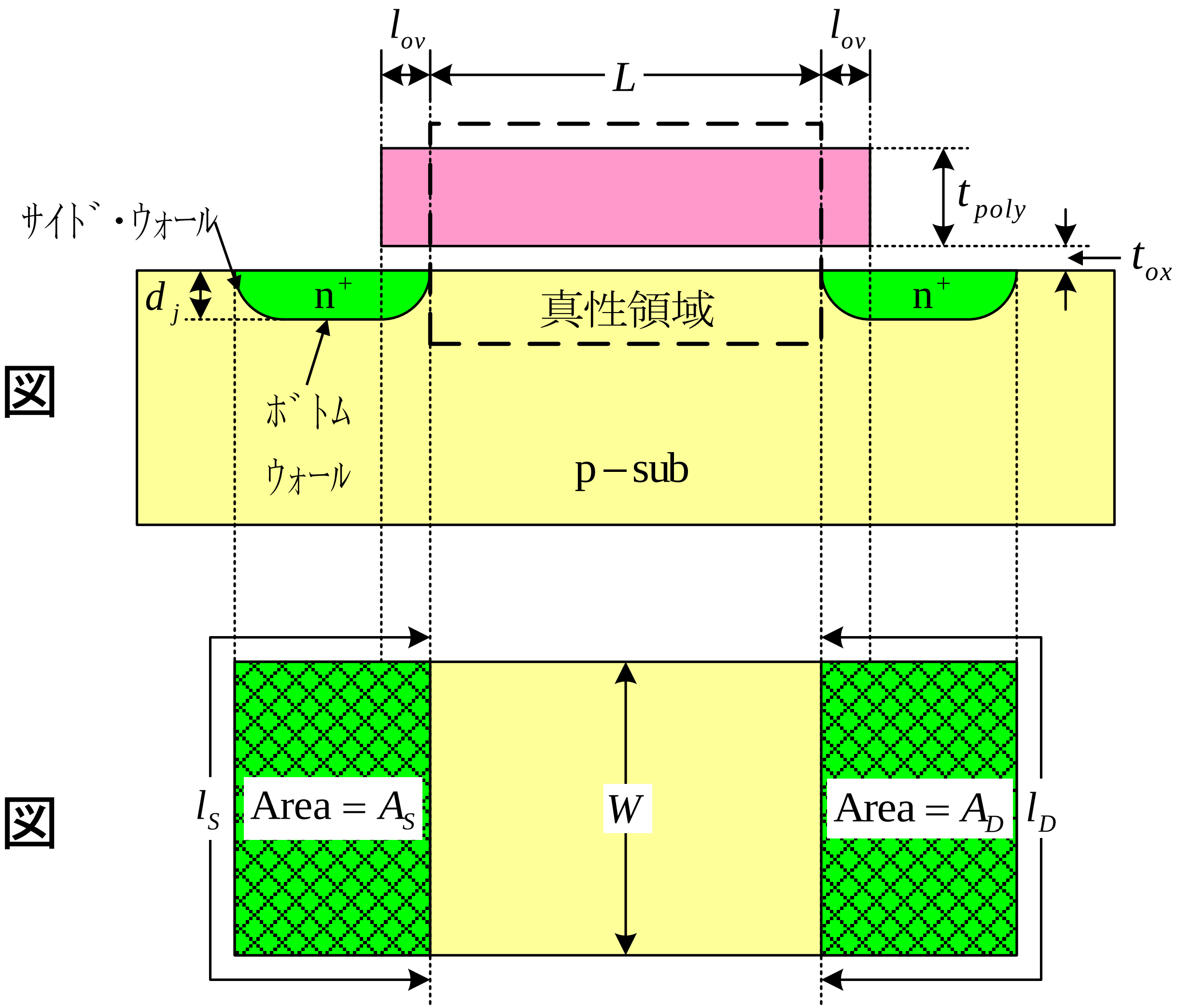
$$C_{gb} \approx C_{ox}$$

となる。

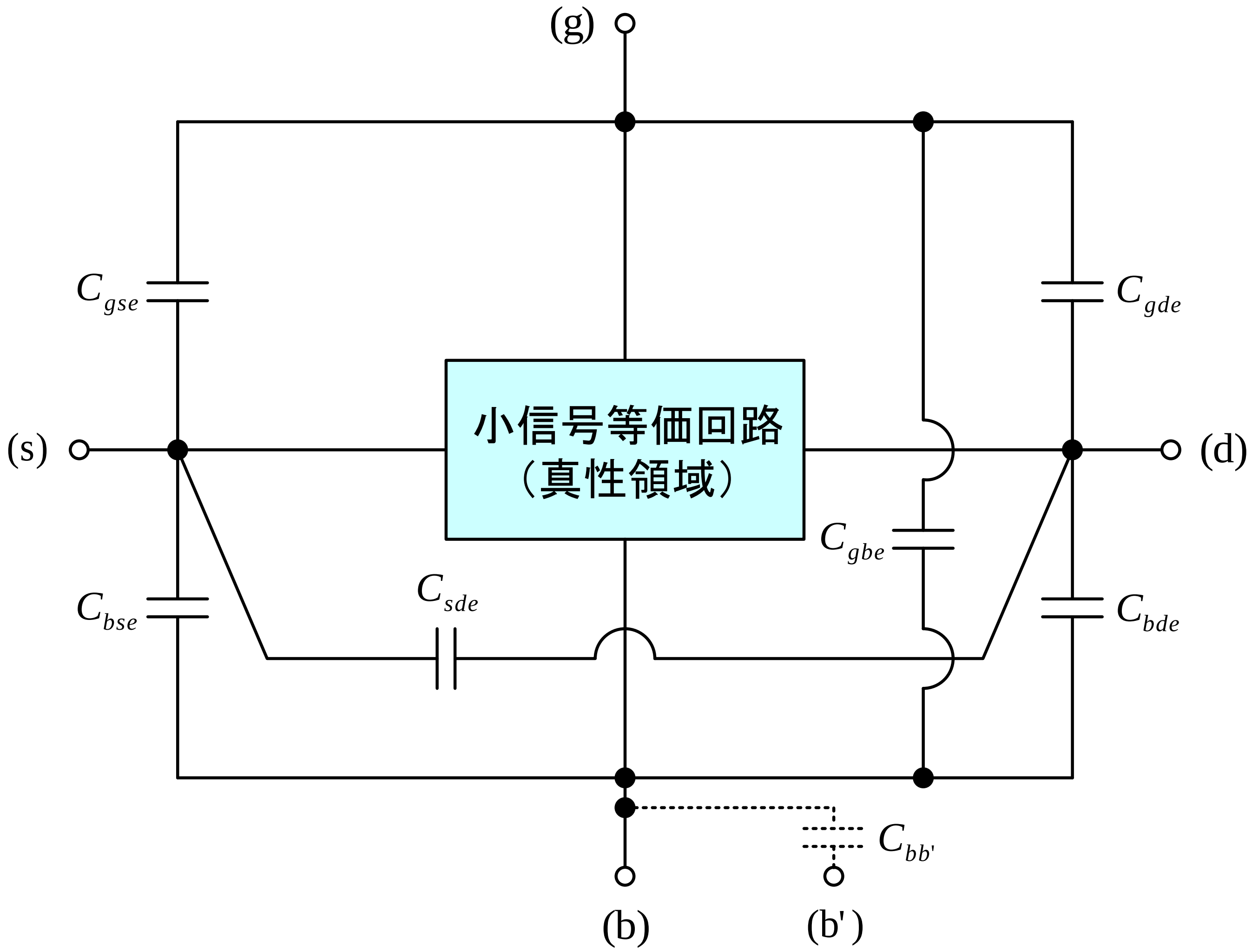
MOSトランジスタ断面図と上面図

断面図

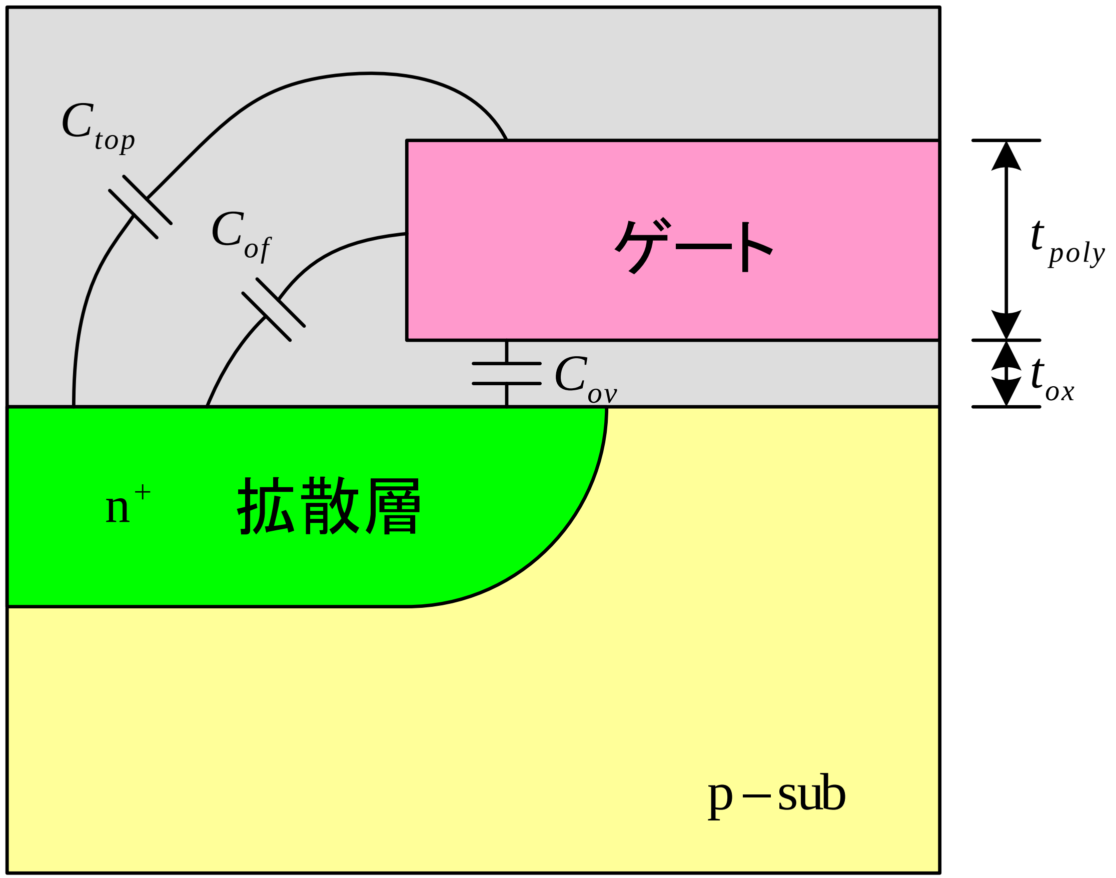
上面図



外部要因を取り込んだ小信号モデル



ゲート～拡散層間容量



外部要因の容量1

外部要因のゲート容量C_{gse}とC_{gde}は

$$C_{gse} = C_{gde} = WC_o^{''} = W\left(l_{ov}C_{ox}^{'} + \frac{2}{\pi}\varepsilon_{ox}\ln\left(1+\frac{t_{poly}}{t_{ox}}\right) + C_{top}^{''} \right)$$

となる。ここで、

l_{ov} :オーバーラップ長さ、

t_{poly} :ゲートポリシリコンの厚み

$C_{top}^{''}$:ゲートのトップからの寄与（全体の約10%）

である。また、外部要因のゲート～基板間容量C_{gbe}は

$$C_{gbe} = 2LC_{ob}^{''}$$

となる。ここで、$C_{ob}^{''}$はチャネルに沿うフリンジ容量である。

外部要因の容量2

ソース～基板間接合容量C_{bse},ドレイン～基板間接合容量C_{bde},
ウエル～基板間容量$C_{bb'}$は、以下の如く表される。

$$C_{bse} = A_S C'_{js} + l_S C''_{jsf} + WC''_{jsc}$$

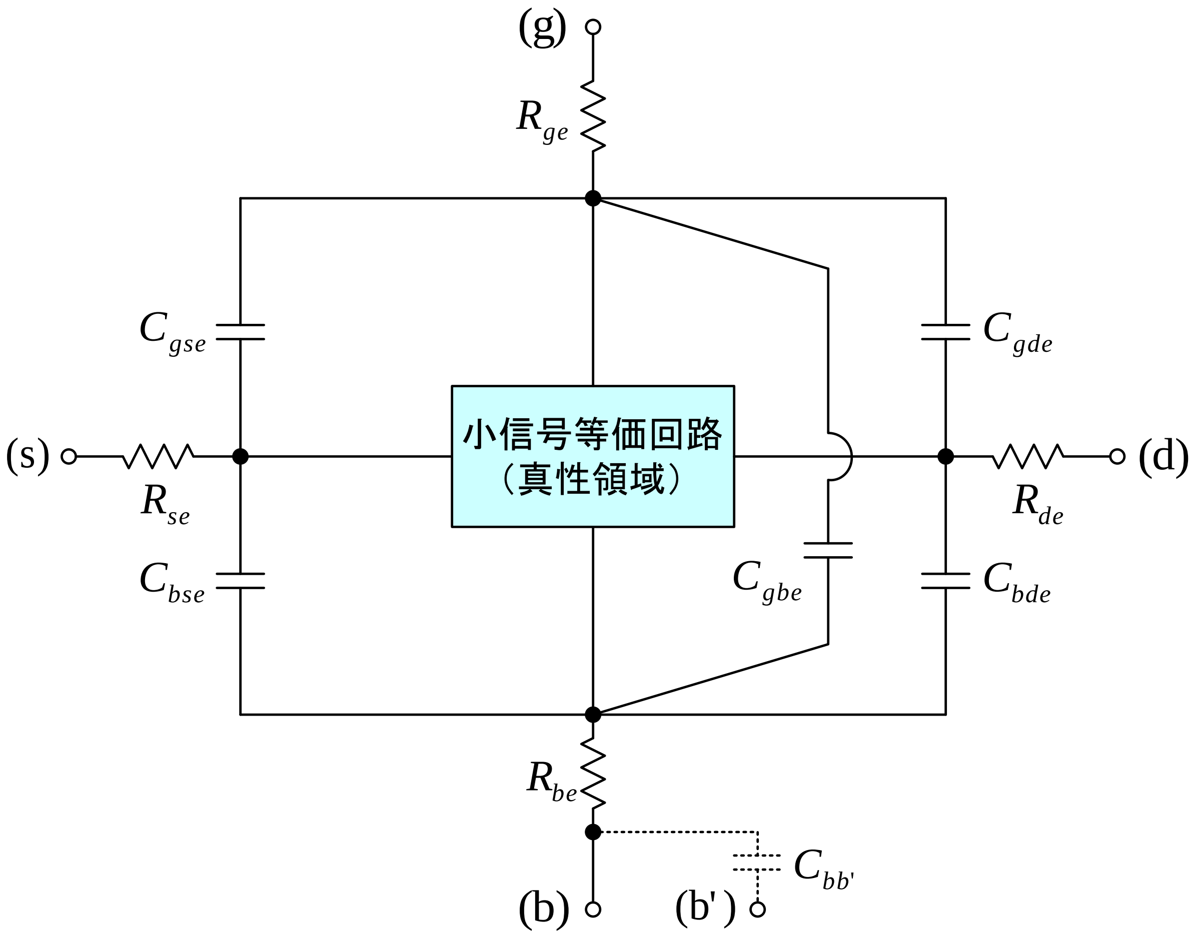
$$C_{bde} = A_D C'_{jd} + l_D C''_{jdf} + WC''_{jdc}$$

$$C_{bb'} = A_W C'_{jW} + l_W C''_{jW}$$

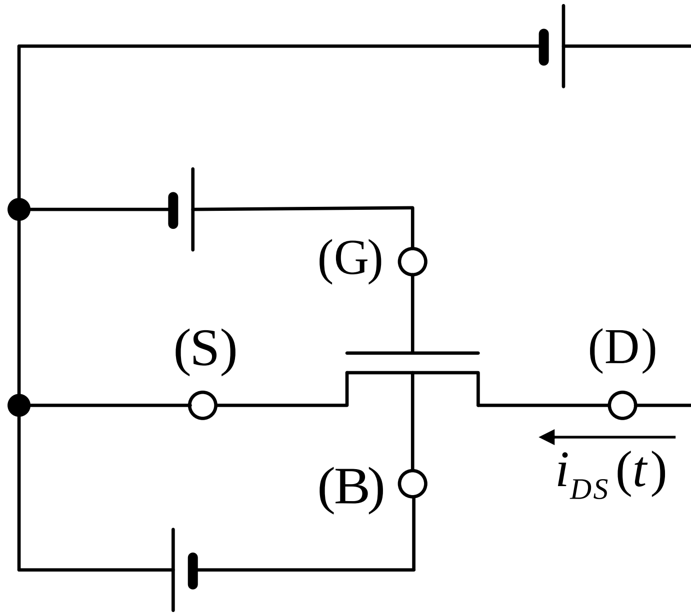
C'_{js} :ソース・ボトムの単位面積当りの接合容量
C'_{jd} :ドレイン・ボトムの単位面積当りの接合容量
C''_{jsf} :ソース外側の単位長さ当りのサイド・ウォール容量
C''_{jsc} :ソース内側（チャネル側）の単位長さ当りのサイド・ウォール容量
C''_{jdf} :ドレイン外側の単位長さ当りのサイド・ウォール容量
C''_{jdc} :ドレイン内側（チャネル側）の単位長さ当りのサイド・ウォール容量
C'_{jW} :ウエル・ボトムの単位面積当りの容量
C''_{jW} :ウエル側壁の単位長さ当りの容量

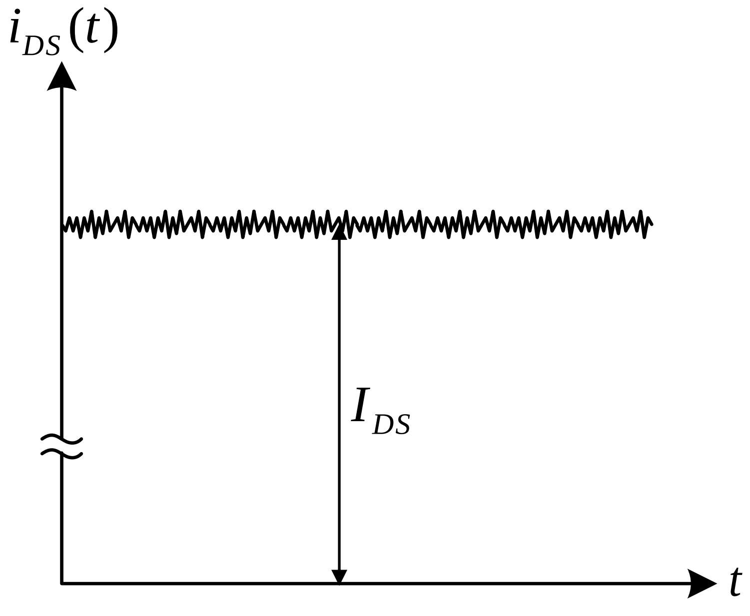
A_S :ソース・ボトム面積
A_D :ドレイン・ボトム面積
l_S :ソース外側全長
l_D :ドレイン外側全長
W :チャネル幅
A_W :ウエル・ボトム面積
l_W :ウエル・サイド・ウォール長さ

MOSトランジスタ小信号等価回路
（外部容量と抵抗を含む）



ノイズを含むドレイン電流



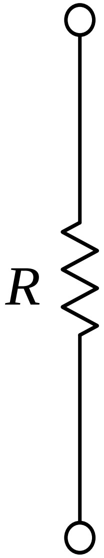


$i_{DS}(t) = I_{DS} + i_n(t)$

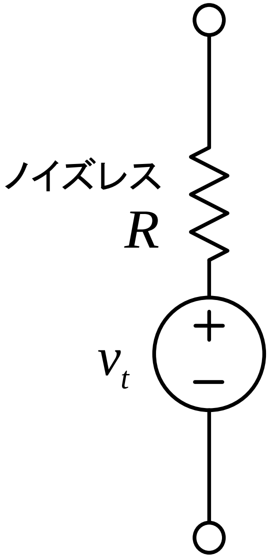
I_{DS} : 理想バイアス電流

$i_n(t)$: ノイズ電流（平均ゼロ）

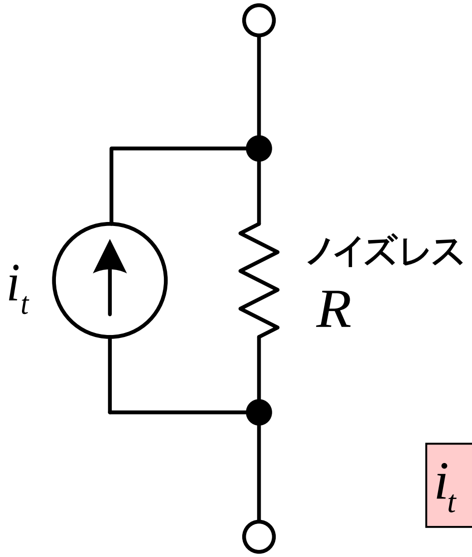
ノイズ抵抗



ノイズ抵抗



テブナン・ノイズ
等価回路



$$\boxed{i_t = v_t / R}$$

ノートン・ノイズ
等価回路

パワー･スペクトル密度

電流ノイズのパワー･スペクトル密度$S_i(f)$

$$\Rightarrow \quad S_i(f) = \overline{i_n^2} / \text{バンド幅（A}^2/\text{Hz）　（バンド幅} \to 0\text{）}$$

電圧ノイズのパワー･スペクトル密度$S_v(f)$

$$\Rightarrow \quad S_v(f) = \overline{v_n^2} / \text{バンド幅（V}^2/\text{Hz）　（バンド幅} \to 0\text{）}$$

$$i_t = v_t / R$$

$$\overline{i_t^2} = \overline{v_t^2} \Big/ R^2$$

電流・電圧の自乗平均は以下で表される。

$$\overline{i_n^2} = \int_{f_1}^{f_2} S_i(f) df, \qquad \overline{v_n^2} = \int_{f_1}^{f_2} S_v(f) df$$

ここで、バンド幅は、f_1〜f_2である。サーマル･ノイズ（ホワイト･ノイズ）の場合、

$$S_{vt} = 4kTR\text{、} \qquad S_{it} = 4kT\frac{1}{R}$$

となる。このノイズは、Johnson noiseまたはNyquist noiseと呼ばれる。

これは、キャリアの熱によるランダムな動きによる。

ﾄﾞﾚｲﾝ･ﾉｲｽﾞ電流ﾊﾟﾜｰ･ｽﾍﾟｸﾄﾙ密度vs.周波数

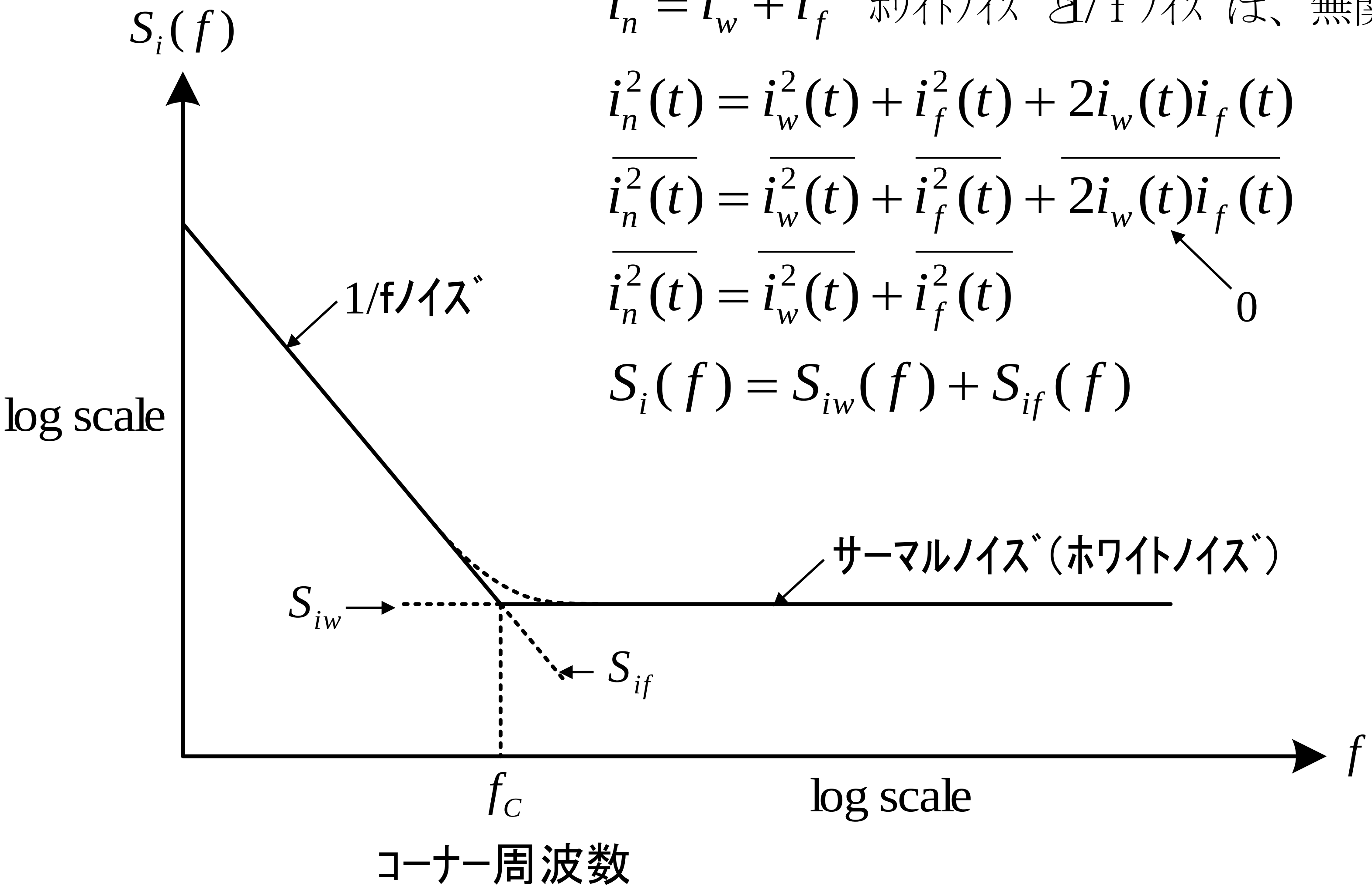
$i_n = i_w + i_f$　ﾎﾜｲﾄﾉｲｽﾞと1/ f ﾉｲｽﾞは、無関係

$$i_n^2(t) = i_w^2(t) + i_f^2(t) + 2i_w(t)i_f(t)$$

$$\overline{i_n^2(t)} = \overline{i_w^2(t)} + \overline{i_f^2(t)} + \underbrace{\overline{2i_w(t)i_f(t)}}_{0}$$

$$\overline{i_n^2(t)} = \overline{i_w^2(t)} + \overline{i_f^2(t)}$$

$$S_i(f) = S_{iw}(f) + S_{if}(f)$$



ホワイト･ノイズ

強反転領域で速度飽和がない場合、ドレイン電流は、

$$I_{DS} = -\mu W Q_I'\left(V_{CB}(x)\right)\frac{dV_{CB}(x)}{dx}$$

となる。これをソースからドレインまで積分すると、以下になる。

$$I_{DS} = -\frac{W}{L}\mu\int_{V_{SB}}^{V_{DB}} Q_I'\left(V_{CB}(x)\right)dV_{CB}(x)$$

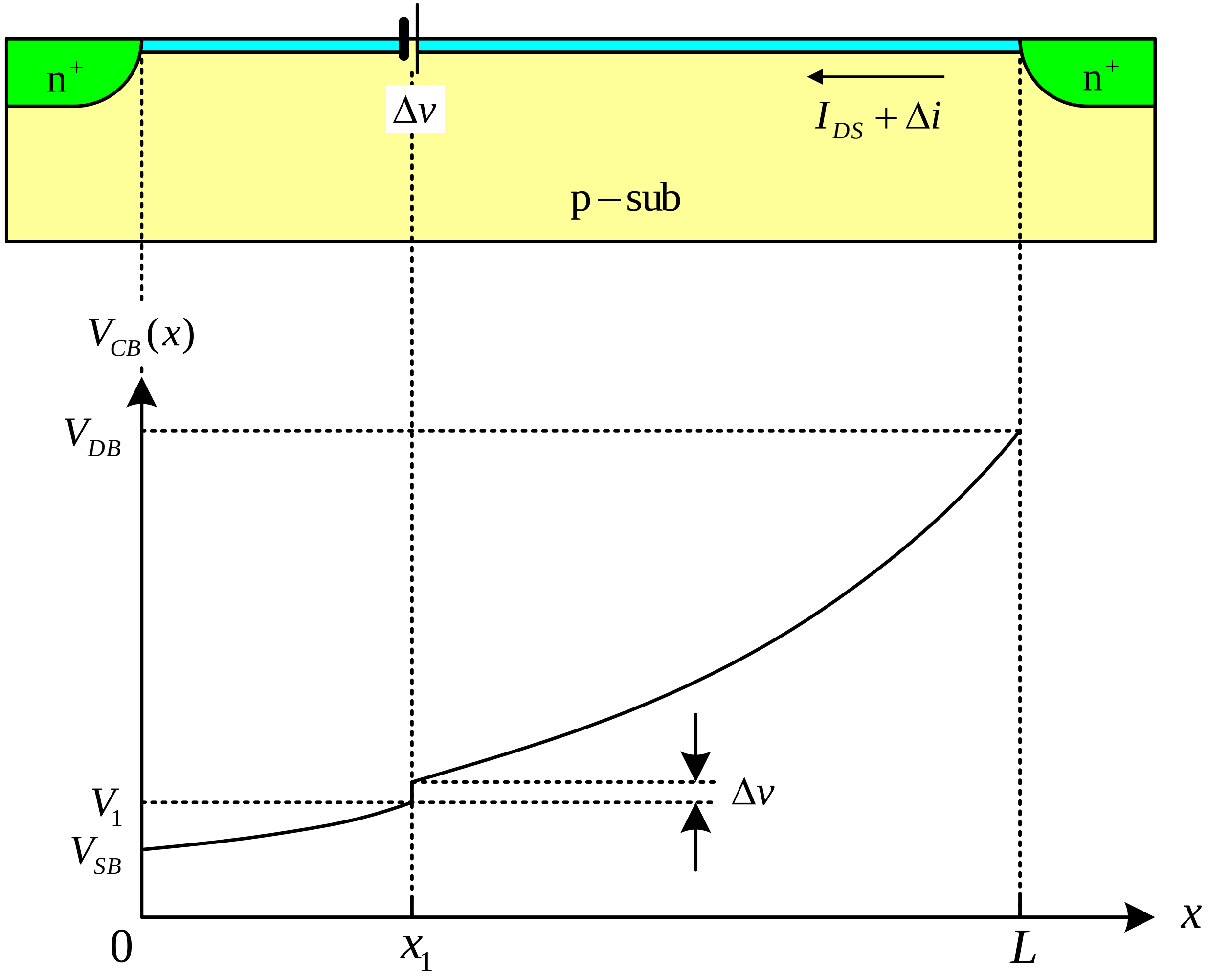
チャネル内の点x_1の周りの微小エレメントΔxの抵抗をΔRとすると、$\Delta V_{CB} = I_{DS}\Delta R$であるから、

$$\Delta R = \frac{\Delta x}{-\mu W Q_I'\left(V_{CB}(x_1)\right)}$$ 右辺は正：$Q_I' < 0$

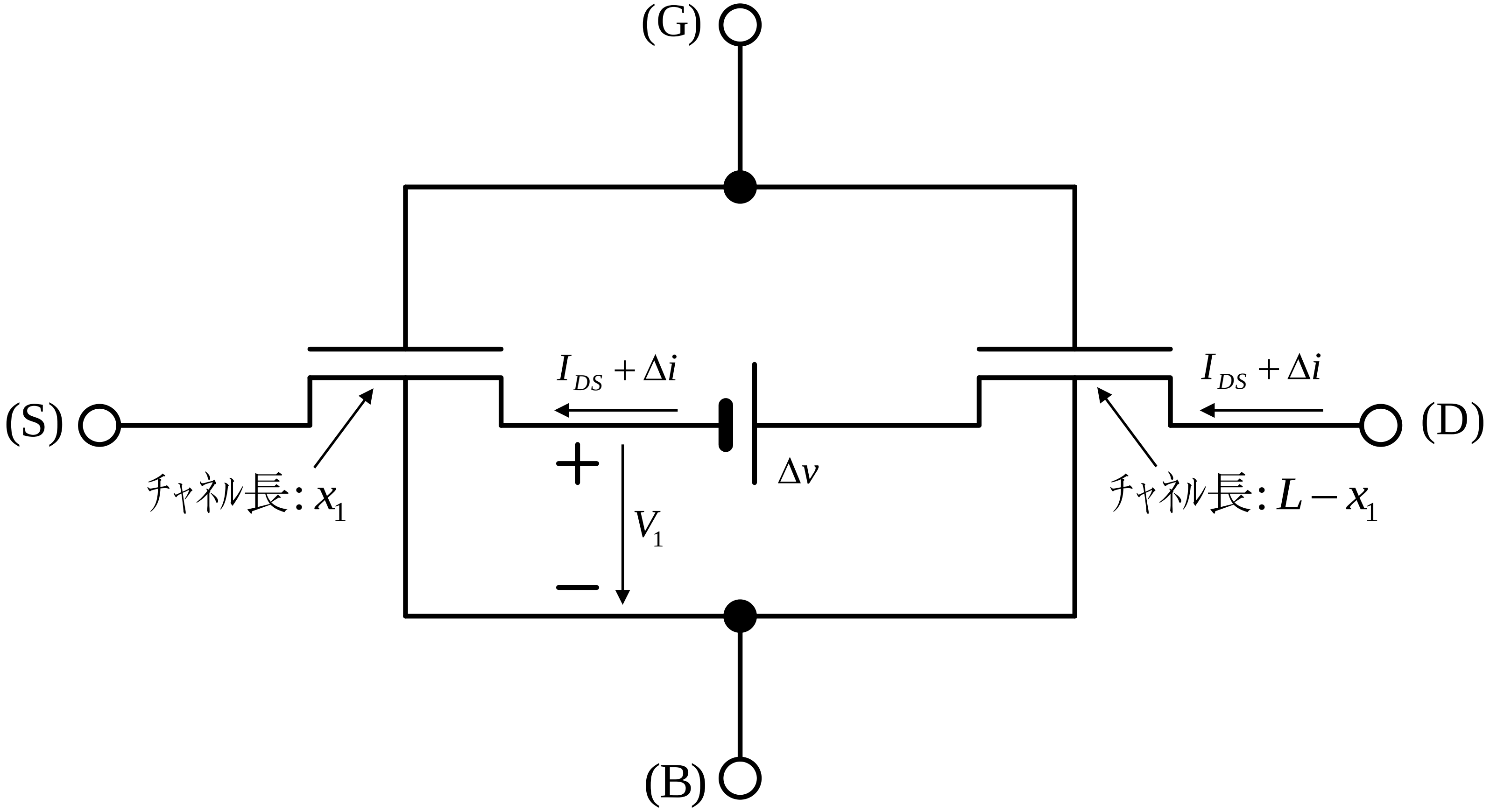
チャネルの微小要素がΔRの抵抗として振舞うと仮定すると、パワー・スペクトル密度$4kT\Delta R$を持つ微小ノイズ電圧Δv_tを観測でき、バンド幅Bを持つΔv_tの自乗平均値は、以下で表される。

$$\overline{\left(\Delta v_t\right)^2} = 4kT\Delta RB = \frac{4kT\Delta x}{-\mu W Q_I'\left(V_{CB}(x_1)\right)}B$$

チャネル内での仮想電圧Δv



チャネル内での仮想電圧Δv（回路表現）



チャネル内にΔvがある場合の電流式（1）

チャネル内に仮想電圧Δvが存在する場合の電流は、

$$I_{DS}+\Delta i=-\frac{W}{x_1}\mu\int_{V_{SB}}^{V_1}Q_I^{'}\left(V_{CB}(x)\right)dV_{CB}(x)$$

$$I_{DS}+\Delta i=-\frac{W}{L-x_1}\mu\int_{V_1+\Delta v}^{V_{DB}}Q_I^{'}\left(V_{CB}(x)\right)dV_{CB}(x)$$

となる。x_1を消去し、Δvが非常に小さいことから、以下を得る。

$$I_{DS}+\Delta i=-\frac{W}{L}\mu\left(\int_{V_1+\Delta v}^{V_{DB}}\quad+\int_{V_{SB}}^{V_1}\quad\right)=-\frac{W}{L}\mu\left(\int_{V_{SB}}^{V_{DB}}\quad-\int_{V_1}^{V_1+\Delta v}\quad\right)$$

$$=-\frac{W}{L}\mu\int_{V_{SB}}^{V_{DB}}Q_I^{'}\left(V_{CB}(x)\right)dV_{CB}(x)+\frac{W}{L}\mu\int_{V_1}^{V_1+\Delta v}Q_I^{'}\left(V_{CB}(x)\right)dV_{CB}(x)$$

$$=-\frac{W}{L}\mu\int_{V_{SB}}^{V_{DB}}Q_I^{'}\left(V_{CB}(x)\right)dV_{CB}(x)+\frac{W}{L}\mu Q_I^{'}\left(V_{CB}(x_1)\right)\Delta v$$

チャネル内にΔvがある場合の電流式（2）

前式の第一項はΔvが存在しない場合の電流I_{DS}であり、第二項がΔiに当り、以下で表される。

$$\Delta i = \frac{W}{L}\mu Q_I^{'}\left(V_{CB}(x_1)\right)\Delta v$$

上式はΔvをdcと見なしたが、Quasi－staticな状態でも成立つ。ここで、

x_1を中心とするチャネル内の微小要素を横切って発生するサーマル･ノイズ電圧を考える。バンド幅Bを持つ全サーマル･ノイズ電圧の一部分をΔv_tとすると、それに対応するドレイン電流変化Δi_tは、上式の類推から

$$\Delta i_t(t) = \frac{W}{L}\mu Q_I^{'}\left(V_{CB}(x_1)\right)\Delta v_t(t)$$

となる。Δ$i_t(t)$の自乗平均値は、以下で表される。

$$\overline{\left(\Delta i_t\right)^2} = \left[\frac{W}{L}\mu Q_I^{'}\left(V_{CB}(x_1)\right)\right]^2 \overline{\left(\Delta v_t(t)\right)^2} = -4kT\frac{\mu}{L^2}WQ_I^{'}\left(V_{CB}(x_1)\right)\Delta x \cdot B, \quad \because \overline{\left(\Delta v_t\right)^2} = \frac{4kT\Delta x}{-\mu WQ_I^{'}\left(V_{CB}(x_1)\right)}B$$

ホワイト・ノイズのパワー・スペクトル密度（１）

$\overline{(\Delta i_t)^2}$は、$x_1$におけるドレイン電流ノイズへの寄与分となる。ここで、Δxを微分量に変えて、$\overline{(\Delta i_t)^2}$の式をチャネル長に渡って積分すると、以下になる。

$$\overline{i_t^2} = -4kT\frac{\mu}{L^2}\left(\int_0^L Q_I^{'} W dx\right)B$$

これはバンド幅Bにおける全ノイズ電流の自乗平均値を表す。上記積分が、全反転層電荷Q_Iを表すことを考慮すると、ホワイト・ノイズのパワー・スペクトル密度S_{iw}は、以下となる。

$$S_{iw} = 4kT\frac{\mu}{L^2}(-Q_I)$$

ここで、準定常状態での強反転モデルのQ_Iを用いると、S_{iw}は、

$$S_{iw} = 4kT\left[\frac{W}{L}\mu C_{ox}^{'}(V_{GS}-V_T)\frac{2}{3}\frac{1+\eta+\eta^2}{1+\eta}\right]$$

となる。

ホワイト・ノイズのパワー・スペクトル密度（２）

非飽和の場合、$\eta = 1, (V_{DS} = 0)$であるから、S_{iw}は以下となる。

$$S_{iw} = 4kT\left[\frac{W}{L}\mu C_{ox}^{'}\left(V_{GS} - V_T\right)\right], \qquad V_{DS} = 0$$

一方、小信号ソース・ドレイン・コンダクタンスg_{sd}が以下となるので、

$$g_{sd} = \frac{W}{L}\mu C_{ox}^{'}\left(V_{GS} - V_T - \alpha V_{DS}\right), \quad V_{DS} \le V_{DS}^{'}$$

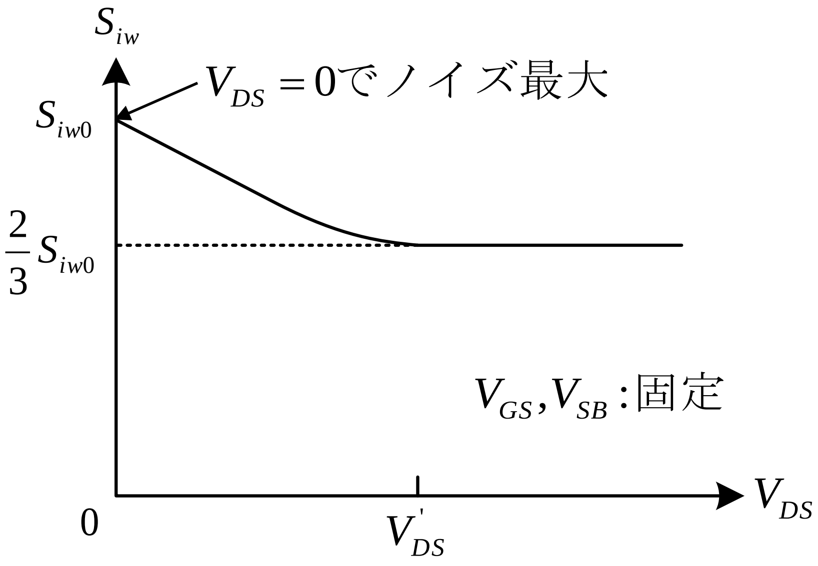
$S_{iw} = 4kTg_{sd}$になる。これは、

$S_{it} = 4kT\dfrac{1}{R}$と一致$\Rightarrow R = 1/g_{sd}$

飽和の場合、$\eta = 0$となり、S_{iw}は

$$S_{iw} = 4kT\left[\frac{2}{3}\frac{W}{L}\mu C_{ox}^{'}\left(V_{GS} - V_T\right)\right]$$

となる。ここで、$V_{DS} > V_{DS}^{'}$



等価入力ノイズ電圧のパワー･スペクトル密度

等価入力ノイズ電圧 $v_{n,eq}$

⇒ノイズ電流の修正量を生じさせるために、仮想ノイズレス・トランジスタのゲートとソース間に必要とされるノイズ電圧

$$i_t = g_m v_{n,eq} \quad \Rightarrow \quad i_t^2 = g_m^2 v_{n,eq}^2$$

この関係から、等価入力ノイズ電圧のパワー･スペクトル密度S_{vw}は、以下となる。

$$S_{vw} = \frac{S_{iw}}{g_m^2}$$ （注） $g_m = 0, \quad (V_{DS} = 0),$ しかし、$S_{vw} g_m^2$は有限

等価入力ノイズ抵抗

⇒サーマル･パワー･スペクトル密度がS_{vw}であるような仮想抵抗

$$S_{vw} = 4kTR_n$$ （注） $R_n = \infty, \quad (V_{DS} = 0)$

弱反転領域におけるパワー･スペクトル密度（1）

弱反転領域でも以下の関係が成立する。

$$S_{iw} = 4kT\frac{\mu}{L^2}\left(-Q_I\right)$$

$$I'_{DS} = \frac{W}{L}\mu\phi_t\left(-Q'_{I0}\right)\left(1-e^{-\frac{V_{DS}}{\phi_t}}\right)$$

$$= \frac{W}{L}\mu\phi_t\left(-Q'_{I0}\right), \quad V_{DS} > 5\phi_t$$

ここで、Q_Iは以下で表される。

$$Q_I = WL\frac{Q'_{I0}+Q'_{IL}}{2}$$

$$Q'_{I0} = -\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}}\phi_t e^{\left(\psi_{sa}(V_{GB})-2\phi_F\right)/\phi_t} \bullet e^{-V_{SB}/\phi_t}, \quad Q'_{IL} = -\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}}\phi_t e^{\left(\psi_{sa}(V_{GB})-2\phi_F\right)/\phi_t} \bullet e^{-V_{DB}/\phi_t}$$

Q'_{I0}とQ'_{IL}の式をQ_Iに代入して整理すると、以下を得る。

$$Q_I = \frac{WL}{2}Q'_{I0}\left(1+e^{-\frac{V_{DS}}{\phi_t}}\right) = -\frac{L^2}{2\mu\phi_t}I'_{DS}\left(1+e^{-\frac{V_{DS}}{\phi_t}}\right) \quad \Rightarrow \quad S_{iw} = \left[2qI'_{DS}\left(1+e^{-\frac{V_{DS}}{\phi_t}}\right)\right]$$

弱反転領域におけるパワー・スペクトル密度（2）

S_{iw}は、$2qI'_{DS}$（$V_{DS} > 5\phi_t$）になる。
上記はサーマル・ノイズを仮定して導出されたが、これはショット・ノイズから導出されるものと同じになる。

ショット・ノイズのパワー・スペクトル密度: $2qI \quad (I:\text{dc電流})$

また、弱反転領域での、等価入力ノイズ電圧、等価入力ノイズ抵抗は、強反転領域と同様に定義できる。

ショット・ノイズとは
$\Rightarrow$キャリアがポテンシャル・バリア（ソースからチャネル）を横切ることによって引き起こされる。
$\Rightarrow$到達電荷のディスクリート性による。

フリッカー・ノイズ（１）

[I] Si-SiO_2近傍のトラップによるキャリアのトラップ/デトラップ

$\Rightarrow$表面ポテンシャルの変動，チャネル内キャリアのランダムな変動（キャリア数変動）

（１）周波数依存性

$\Rightarrow$パワー・スペクトル密度$\propto 1/f^c$，　$c: 0.7 \sim 1.2$(n−チャネル)

（２）界面電荷Q_0'によるフラット・バンド電圧への寄与分Q_0'/C_{ox}'

$\Rightarrow$ゲートに直列なノイズ電圧に等価であり、$1/C_{ox}'$に比例，ノイズの自乗平均値$\propto (1/C_{ox}')^2$

（３）ゲート面積依存性

$\Rightarrow$より大きなゲート面積$WL \Rightarrow$変動をより平均化

$$S_{vf}(f) = \frac{K_1}{C_{ox}'^2}\frac{1}{WL}\frac{1}{f^c},$$

K_1：バイアス依存なし、プロセス依存有り

$$S_{if}(f) = g_m^2 S_{vf}(f)$$

フリッカー・ノイズ（２）

[Ⅱ] キャリアと格子との相互作用の変動による移動度変動

⇒ 等価入力ノイズ電圧のパワースペクトル密度は、以下になる。

$$S_{vf}(f) = \frac{K(V_{GS})}{C'_{ox}} \frac{1}{WL} \frac{1}{f}$$

$K(V_{GS})$はゲート電圧依存性を持つ。C'_{ox}の逆比例関係は、ユニバーサルに受入れられない。

前記[Ⅰ]と[Ⅱ]は、全ての反転領域で作用しており、どちらかが主となる。

①ｎチャネルデバイス

⇒キャリア数変動が主：$K_1 = 5\times10^{-31}$～$1\times10^{-30}\,\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{cm}^{-2}$

②ｐチャネルデバイス

⇒ 移動度変動が主: $K(V_{GS}) = 6\times10^{-26}$～$2\times10^{-23}\,\mathrm{V}^2, |V_{GS} - V_T| \approx 1V$

強反転領域では、$K(V_{GS})$は$|V_{GS} - V_T|$に対し、ほぼ線型で増大する。

弱反転領域では、$K(V_{GS})$は$|V_{GS}|$の減少と共に増大する。

スモール・ディメンジョン効果

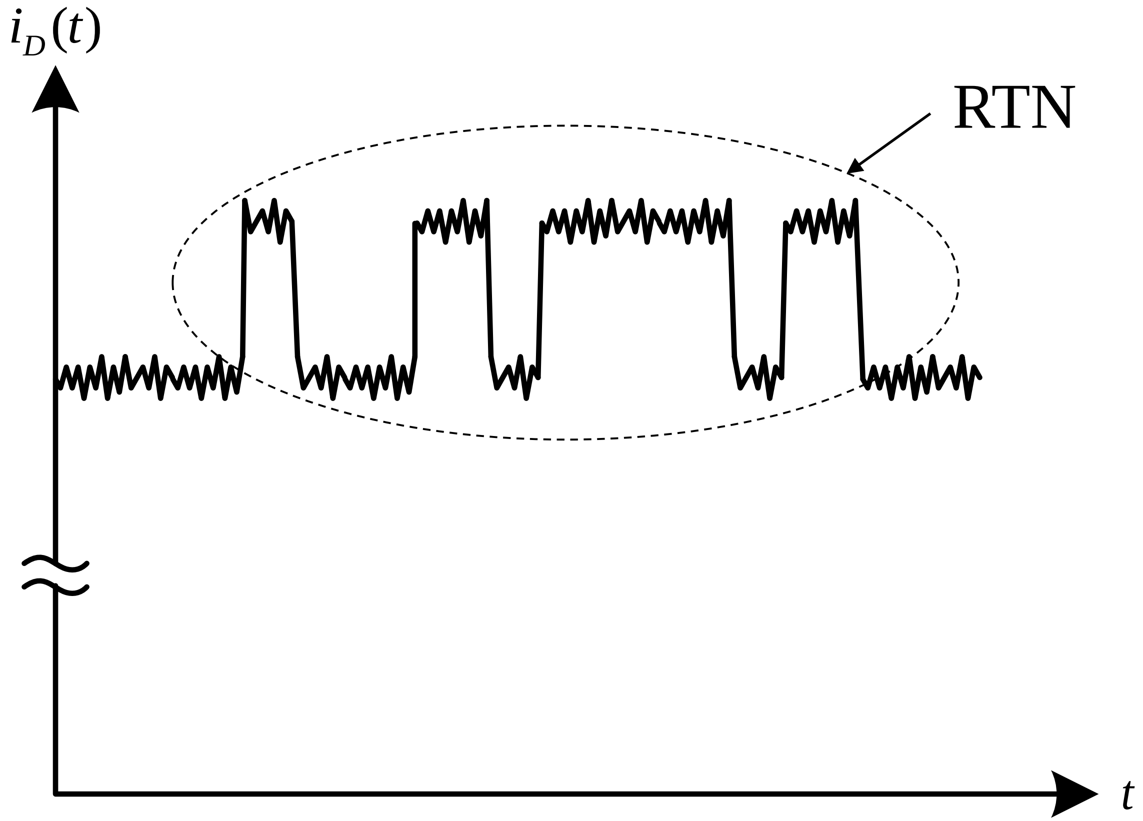
- 速度飽和/ホット・キャリア
  - 等価キャリア温度>格子温度⇒サーマル・ノイズ増加
- ホット・キャリア
  - 基板電流発生
    - 低基板電流⇒ショット・ノイズ発生
    - 高基板電流⇒基板電位変動によるドレイン電流ノイズ（g_{mb}）発生
  - 界面準位/酸化膜中トラップ発生（ドレイン近傍）
    - 線型領域でフリッカー・ノイズ増加
- スモール・ゲート（$WL \fallingdotseq 1\mu m^2$）（但し、ホット・キャリア発生無し）
  - 界面準位での電荷のトラップ/デトラップの平均化が不十分

    ⇒フリッカー・ノイズ増加

    ⇒極端に小さいゲート・デバイスでRTN発生

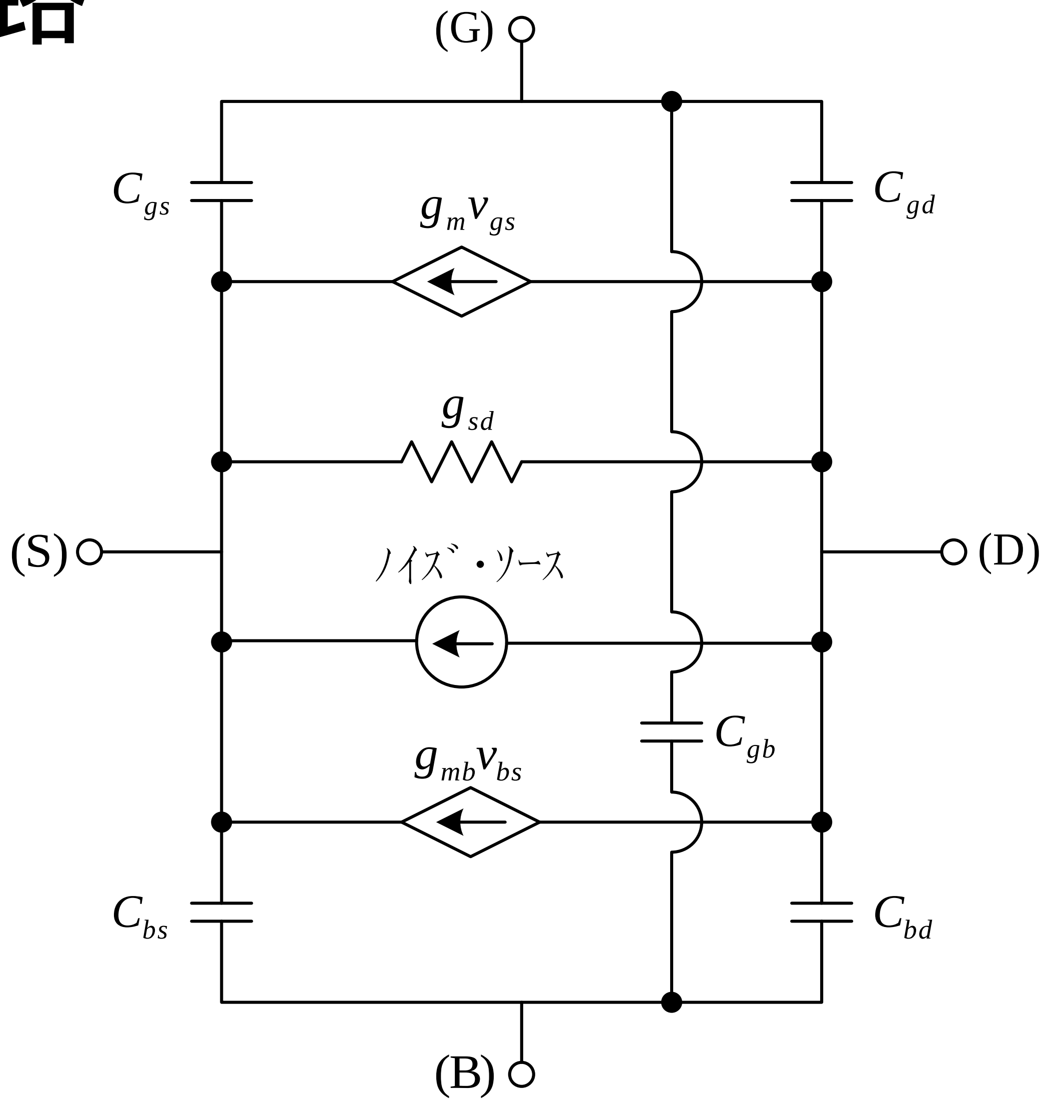
    （RTN: Random Telegraph Noise）

ランダム・テレグラフ・ノイズ



・極端に小さいゲート・デバイスで観測されるRTN
（例えば、ノイズの大きさはドレイン電流の0.1%程度又はそれ以上）
・大きなゲート・デバイスで観測されるフリッカー・ノイズはRTNの重畳されたもの

ノイズ等価回路

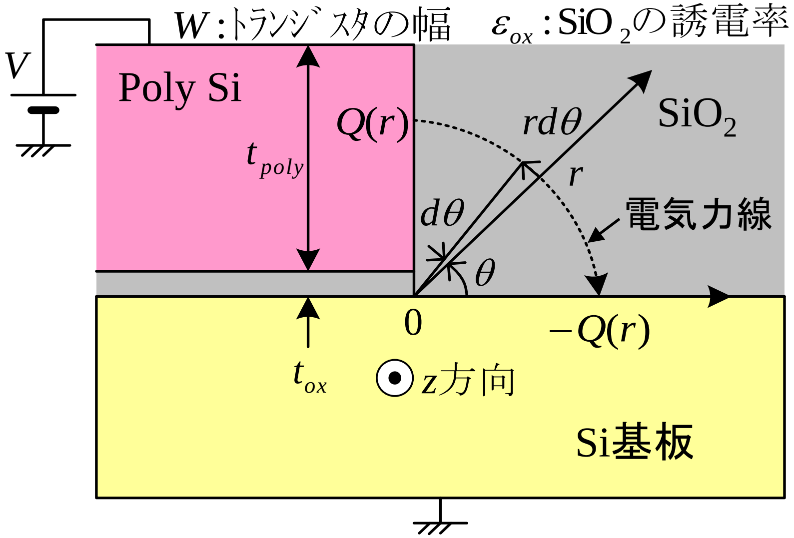


付録

ゲート･フリンジ容量導出

ゲート·フリンジ容量の導出

W:トランジスタの幅　ε_{ox}:SiO_2の誘電率



θ方向のラプラスの式（円柱座標）

$$\frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{d\theta^2}=0 \qquad (\phi\text{:ポテンシャル})$$

θ方向の電界

$$\int \frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{d\theta^2} r d\theta = \frac{1}{r}\frac{d\phi}{d\theta} \equiv -E_\theta$$

E_θは$\theta=\pi/2$において次の関係を満たす。

$$E_\theta(r)\Big|_{\theta=\pi/2} = Q(r)/\varepsilon_{ox}$$

E_θを積分：$\theta=0 \to \theta=\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} E_\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{Q(r)}{\varepsilon_{ox}} d\theta$$

$$\text{左辺} = \int_0^V \frac{1}{r} d\phi = \frac{V}{r}, \quad \text{右辺} = \frac{\pi Q(r)}{2\varepsilon_{ox}}$$

$$\therefore Q(r) = \frac{2\varepsilon_{ox}V}{\pi r}$$

全電荷Q_{total}は

$$Q_{total} = \int_0^W \int_{t_{ox}}^{t_{poly}+t_{ox}} Q(r) dr dz$$

$$= \frac{2\varepsilon_{ox}V}{\pi}\int_0^W \int_{t_{ox}}^{t_{poly}+t_{ox}} \frac{1}{r} dr dz$$

$$= \frac{2\varepsilon_{ox}VW}{\pi} \ln\left(1+\frac{t_{poly}}{t_{ox}}\right)$$

従って、フリンジ容量C_{of}は、

$$C_{of} = \frac{Q_{total}}{V} = \frac{2\varepsilon_{ox}W}{\pi}\ln\left(1+\frac{t_{poly}}{t_{ox}}\right)$$