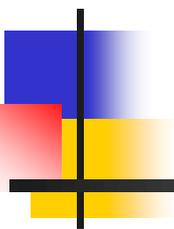


制御工学は電子回路設計の 基礎理論

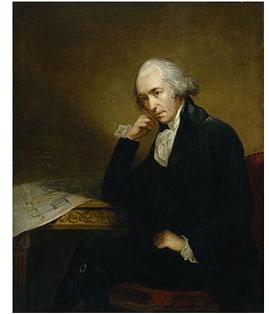


安定性の理論

群馬大学 小林春夫

ジェームズ・ワット

James Watt 1736 - 1819



- イギリスの発明家、機械技術者。
- 蒸気機関の改良を通じて
全世界の産業革命の進展に寄与。

蒸気機関技術機関設計ではシリンダーが冷却と加熱を繰り返す。熱量が大量に無駄。凝縮器を分離し熱量損失低減、蒸気機関の出力、効率、費用対効果を高めた。

出力速度が一定になる回転運動が必要

调速機 (Governor) の発明 → フィードバック制御

ガバナーとフィードバック制御

ガバナー（Governor 調速機）

蒸気機関で、回転速度を一定に保つようにした装置。
回転数が下がると自動的に弁が開き回転数を上げ、
回転数が上がると弁が閉じることで回転数を一定に保つ。

➡ フィードバック制御

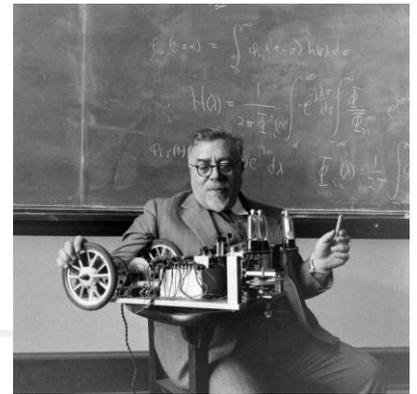
この装置は、条件により発振することがあり。
理由を調べることで制御工学が確立。

➡ フィードバック制御での安定性の問題



ノーバート・ウィーナー

Norbert Wiener 1894 - 1964



- アメリカ合衆国の数学者、サイバネティックスの創設者
- ブラウン運動、フーリエ積分、調和解析
通信工学、制御理論、ロボテクス、オートメーション
- **サイバネティックス**: 通信工学と制御工学を融し、生理学、機械工学、システム工学を統一的に扱う学問。
ギリシャ語で「船の舵を取る者」の意
フィードバックの考えが様々なところで応用・総合のために使えろと考えた。
- 「科学者は、宇宙の秩序と組織性を発見する仕事に取り組み、無秩序化という敵を相手にゲームをやっている。」

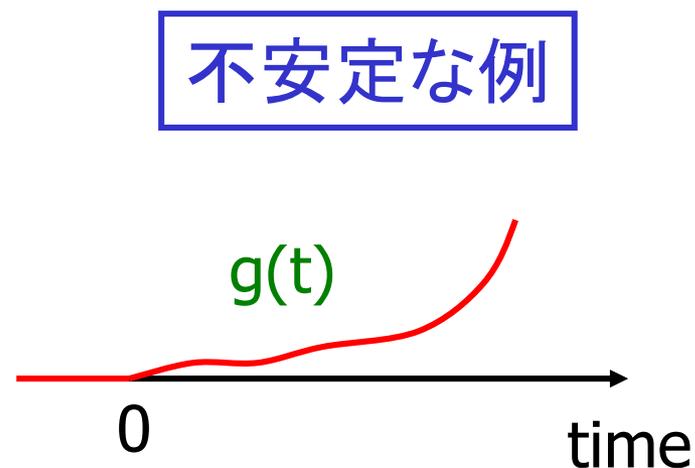
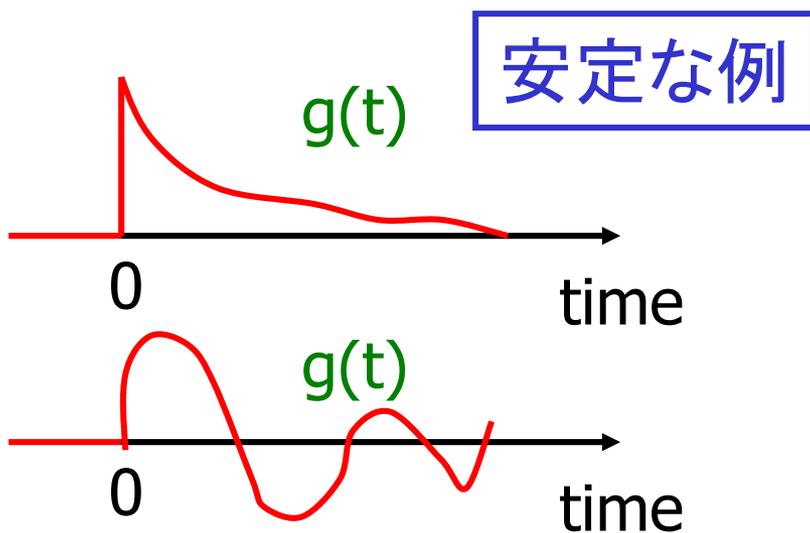
線形時不変動的システムの 安定性の定義

安定な線形時不変動的システム

⇕ 定義

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

$g(t)$: インパルス応答



2階微分方程式で表されるシステムの伝達関数(1)



$$b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t)$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} X(s)$$

$$y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} Y(s)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s X(s)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s Y(s)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s^2 X(s)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s^2 Y(s)$$

2階微分方程式で表されるシステムの 伝達関数(2)



$$b_1 s X(s) + b_0 X(s) = s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s)$$

$$(b_1 s + b_0) X(s) = (s^2 + a_1 s + a_0) Y(s)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= Y(s)/X(s) \\ &= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

2階微分方程式で表されるシステム のインパルス応答



$$X(s) = 1$$

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\therefore Y(s) = G(s) X(s)$$

$$= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$= \frac{b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

p_1, p_2 は特性方程式
(伝達関数の分母=0)
 $s^2 + a_1 s + a_0 = 0$
の根

特性方程式が異なる実根をもつ場合 (p_1, p_2 が異なる実根の場合)

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)}$$
$$= \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2}$$

K_1, K_2 は定数。
演習問題: K_1, K_2 の値を
 b_1, b_0, p_1, p_2 で表せ。



$$y(t) = K_1 \exp(p_1 \cdot t) + K_2 \exp(p_2 \cdot t)$$

安定性の必要十分条件
 $p_1 < 0$ かつ $p_2 < 0$

特性方程式が重根をもつ場合 ($p_1=p_2$, 実根の場合)

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-p_1)^2}$$
$$= \frac{L_1}{s-p_1} + \frac{L_2}{(s-p_2)^2}$$

L_1, L_2 は定数。
演習問題: L_1, L_2 の値を
 b_1, b_0, p_1, p_2 で表せ。



$$y(t) = L_1 \exp(p_1 \cdot t) + L_2 \cdot t \cdot \exp(p_1 \cdot t)$$

安定性の必要十分条件
 $p_1 (=p_2) < 0$

特性方程式が複素共役根をもつ場合 (p_1, p_2 が複素共役根の場合)

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-a)^2 + b^2}$$
$$= \frac{M_1 (s - a)}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{M_2 b}{(s-a)^2 + b^2}$$



$$y(t) = M_1 \exp(a \cdot t) \cos(b t)$$
$$+ M_2 \exp(a \cdot t) \sin(b t)$$
$$= M \exp(a \cdot t) \cos(b t + \theta)$$

安定性の必要十分条件

$$a < 0$$

$$p_1 = a + j b$$

$$p_2 = a - j b$$

M_1, M_2 は定数。

演習問題: M_1, M_2 の値を b_1, b_0, a, b で表せ。

2階微分方程式で表されるシステムの の安定性の必要十分条件

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

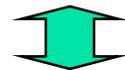
p_1, p_2 を特性方程式 (伝達関数の分母=0)

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

の根とすると、

「 p_1, p_2 の実数部が負であること」
が安定性の必要十分条件。

演習問題: 「 p_1, p_2 の実数部が負であること」



「 $a_1 > 0$ かつ $a_0 > 0$ 」
であることを示せ。

一般に n階微分方程式で表される システムの安定性の必要十分条件

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

特性方程式 (伝達関数の分母=0)

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

の根の全ての根 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ の実数部が負であることが安定性の必要十分条件。

(注) 伝達関数の分子は安定性には無関係

一般に n階微分方程式で表される システムの安定性の補足

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ が特性方程式の異なる実根のとき

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots(s-p_n)}$$
$$= \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_3}{s-p_3} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n}$$



インパルス応答 $g(t) =$
 $K_1 \exp(p_1 \cdot t) + K_2 \exp(p_2 \cdot t) + K_3 \exp(p_3 \cdot t) + \dots + K_n \exp(p_n \cdot t)$

一般に n階微分方程式で表されるシステムの安定性の必要十分条件

特性方程式 (伝達関数の分母=0)

$$S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0 = 0$$

の根の全ての根 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ の実数部が負であることが安定性の必要十分条件。

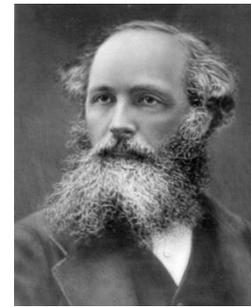
このための $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ の必要十分条件は何か。



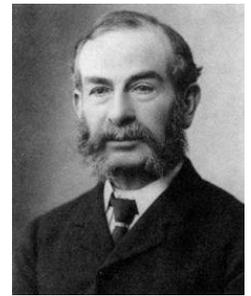
Routh - Hurwitz の安定判別

(注) 5次以上の代数方程式の一般解は存在しない。
数学者アーベル、ガロアによって証明された。

Maxwell と Routh



Maxwell



Routh

Maxwell (電磁気学のMaxwell の方程式で著名)とRouthはイギリスのCambridge 大学の同級生で首席を争ったライバル。19世紀後半に活躍。

Maxwell は制御の安定性の問題 (一般の n 階微分方程式の特性方程式の全ての根の実数部が負になる条件)が解けなかった。

懸賞問題(アダム賞)として出題した。



Routh がこの問題を解き、その内容を懸賞論文に応募した。

ジェームズ・クラーク・ マクスウェル

James Clerk Maxwell 1831 -1879



- イギリスの理論物理学者
- マイケル・ファラデーの電磁場理論をもとに
1864年 マクスウェルの方程式を導出
→ 古典電磁気学を確立。
- 電磁波の存在を理論的に予想。
伝播速度が光速と同じ、横波であることを示す。
- 土星の環、気体分子運動論、熱力学、統計力学
などの研究

「マクスウェルの悪魔」

→ 熱力学、統計力学、情報科学の根本問題

Routh の安定判別

Characteristic equation:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Routh table

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	...
s^{n-2}	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	b_3	b_4	...
s^{n-3}	$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$	c_3	c_4	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s^0	a_0				

Sufficient and necessary condition:

(i) $a_i > 0$ for $i = 0, 1, \dots, n$

&

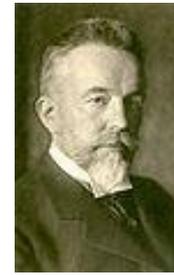
(ii) All values of Routh table's first columns are positive.

Mathematical test



Determine whether given polynomial has all roots in the left-half plane.

Stodola と Hurwitz



Stodola



Hurwitz

スイスの制御の研究者 **Stodola** は制御の安定性の条件が「特性方程式の全ての根の実数部が負になること」と見いだしたが この問題が解けなかった。

同じ大学(スイス連邦工科大学 ETH の前身)の数学者 **Hurwitz** に相談し、Hurwitz はこの問題を解いた。

Routh がこの問題を解いてから10数年後のことである。
両者ともRouth の結果を知らなかった。
後にRouth, Hurwitz の結果は同等であることが証明された。

Routh, Hurwitz の計算アルゴリズムは制御工学のテキストを見てください

Hurwitz の安定判別

Characteristic equation:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

安定であるための必要十分条件

(i) $a_i > 0$ for $i = 0, 1, \dots, n$

&

(ii) $D_i > 0$ for $i=1, 2, \dots, n-1$

$$D_1 = a_{n-1}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

⋮

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_{n-2i+1} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_{n-2i+2} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & a_{n-2i+3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & a_{n-2i+4} \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & a_{n-2i+5} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-i} \end{vmatrix}$$

早熟/悲運の天才 ガロア



エヴァリスト・ガロア(1811-1832, フランス)

論文をフランス学士院に提出、コーシーが紛失。
再提出するも預かったフーリエが急死し紛失。



一人の女性をめぐる決闘で敗れて死す(20才)



死後、その数学上の業績が認められる。

5次以上の方程式には

一般的な代数的解の公式は存在しない

ジェロラモ・カルダーノ

Gerolamo Cardano 1501 - 1576



16世紀イタリアの数学者、医者、占星術師、賭博師、哲学者

1545年「偉大なる術(アルス・マグナ)」の著書で

3次方程式の解の公式、4次方程式の解法を示す。

タルタリアに3次方程式の解法を聞く（公開しないとの約束で）

4次方程式の解はカルダーノの弟子ルドヴィコ・フェラーリが
解いたもの

3次方程式の解を示す際に

はじめて虚数の概念を導入したのはカルダーノ

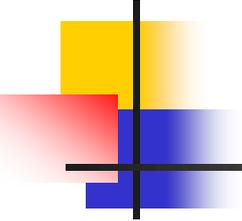
ニコロ・フォンタナ・”タルタリア”

Niccolò Fontana "Tartaglia"

1499-1557



- イタリアの数学者、工学者、測量士。
- ヴェネツィア共和国の簿記係でもあった。
- アルキメデスやユークリッドのイタリア語訳を含む多くの著書を著し、数学関係編集の分野で高く評価。
- 史上初めて数学による大砲の弾道計算を行った弾道学の祖。
- 彼の研究は、後にガリレオ・ガリレイによる落体の実験により検証された。
- 「タルタリア」は生後につけられた渾名。



制御工学

- 線形システムの安定判別

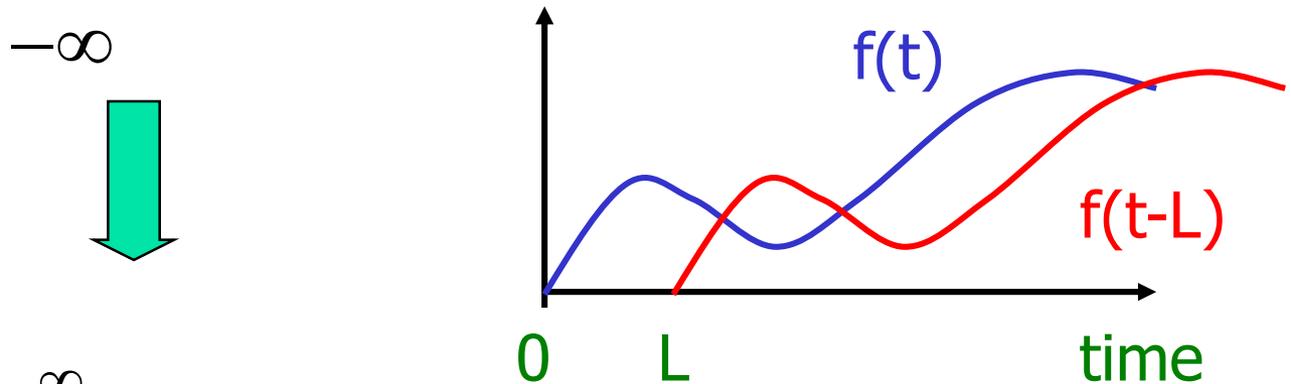
 - Nyquist の安定判別

安定なシステムをフィードバックをかけたとき、安定になるか不安定になるかを判別する。

ベクトル線図、ボーデ線図を使用

ラプラス変換の性質(補足) $f(t)$ の L 時間遅れは $F(s)$ に e^{-sL} をかける

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$



$$e^{-sL} F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-L) \exp(-st) dt$$



周波数伝達関数 $G(j\omega)$ と 伝達関数 $G(s)$

安定なシステム:

$G(j\omega)$, $G(s)$ の両方が存在

$G(j\omega)$ は周波数応答法と結びつき
物理的な意味がある。

$G(s)$ には物理的な意味はない。

$G(s)$ で $s=j\omega$ とおけば $G(j\omega)$ が求まる。

不安定なシステム:

$G(s)$ は存在する。 $G(j\omega)$ は存在しない。



Harry Nyquist (AT&T, 1889-1976)

1927年 米国ベル研究所 Harold Black により、
Negative Feedback による電子管増幅器が考案される。

出力から入力へのフィードバック量により増幅器が
安定、不安定になることが経験される。

1932年 Nyquist によりこの問題が理論的に検討され、
安定になるための条件が明らかになる。

電気通信の技術課題を解決するためのもの
 制御工学に取り入れられる。

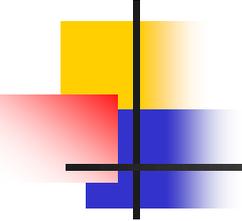
負帰還増幅器の発明者

ハロルド・ブラック

1898-1983



- 電話産業ウエスタン・エレクトリックに在籍
(※ウエスタン・エレクトリックはベル研究所で有名なAT&T社の製造部門)
 - 負帰還の発明者
 - 生涯特許は347件



Harry Nyquist

名前が残る多くの研究業績

Nyquist plot

Nyquist–Shannon sampling theorem

Nyquist frequency

Nyquist stability criterion

Nyquist ISI criterion

Johnson–Nyquist noise



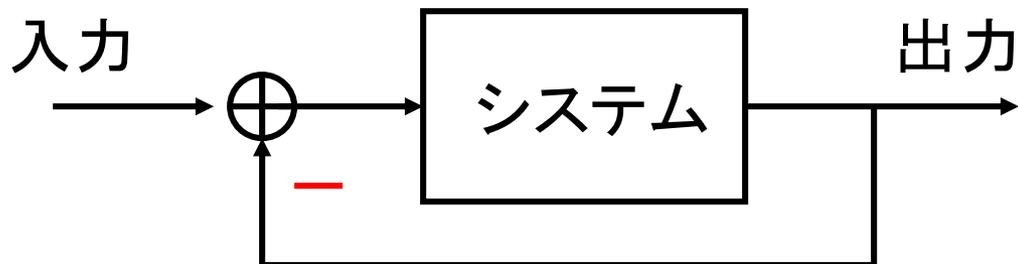
フィードバックと安定性

安定なシステムにフィードバックをかける。

➡ 安定にも不安定にもなりうる。

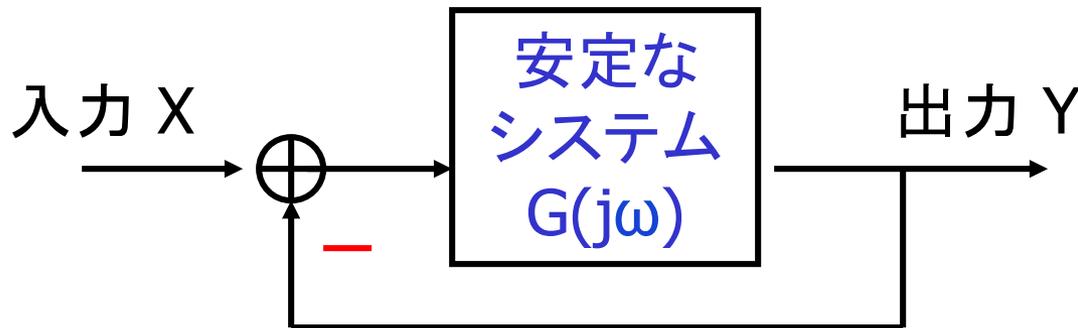
不安定なシステムにフィードバックをかける。

➡ 安定にも不安定にもなりうる。



ナイキストの安定判別の 問題設定(1)

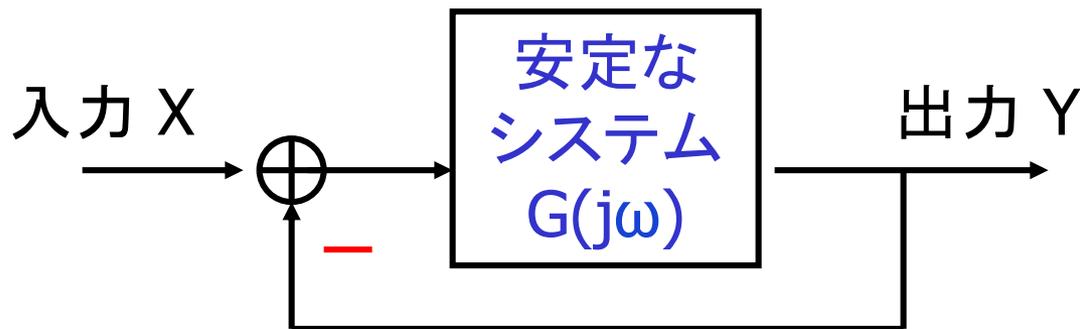
安定なシステム $G(j\omega)$ にフィードバックをかける
周波数伝達関数 $G(j\omega)$ から、
フィードバックをかけた
システム全体の安定性を判定する。



システム全体は安定 ？

ナイキストの安定判別の 問題設定(2)

周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は測定データ
(ボーデ線図、またはベクトル線図)
で与えられる。



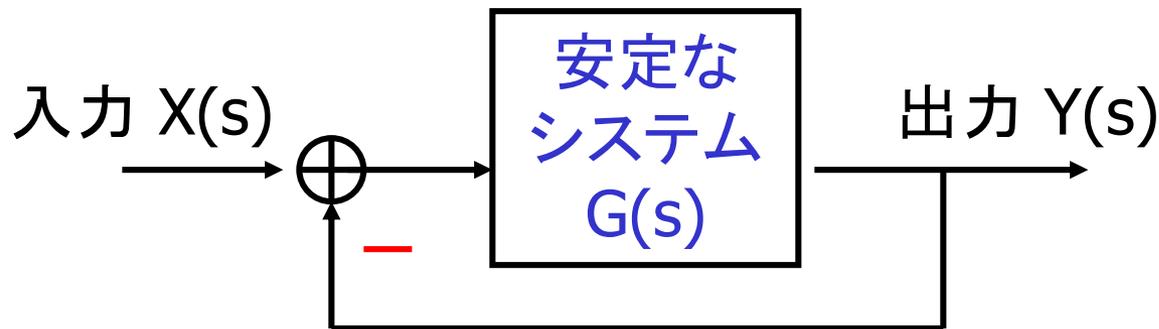
システム全体は安定 ?

Routh-Hurwitz 安定判別 との関係

$G(j\omega)$ が式 ($j\omega$ の有理多項式) で与えられたとき
 $s=j\omega$ とおき $G(s)$ を得て、

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

に対してRouth-Hurwitz の安定判別を適用。



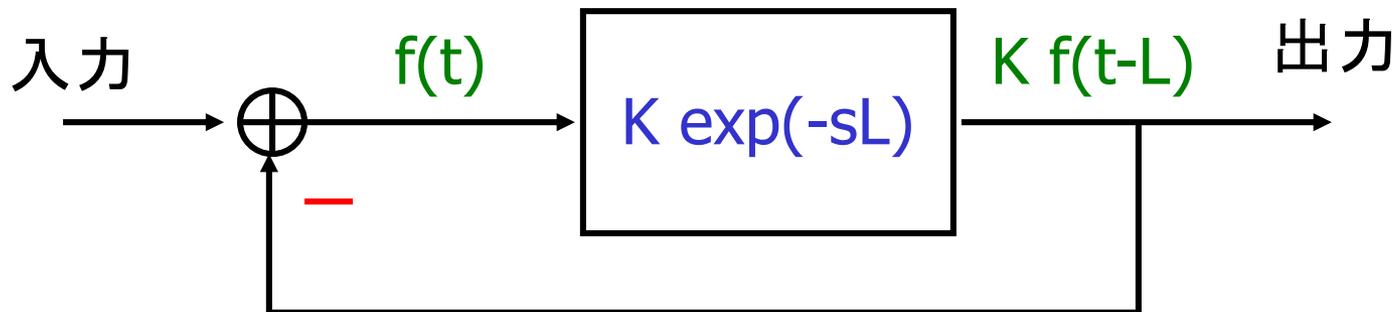
システム全体は安定 ?

Routh-Hurwitz 安定判別 の問題点(1)

$G(s)$ が s の有理多項式でない場合R-H法は適用不可

例: $G(s) = K \exp(-sL)$, $K > 0$, $L > 0$ のとき

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K \exp(-sL)}{1+K \exp(-sL)}$$



(注) 安定のための必要十分条件は $K < 1$ (後述)

Routh-Hurwitz 安定判別 の問題点(2)

$G(j\omega)$ が測定データのみで式で表されていない場合
R-H法は**適用不可**

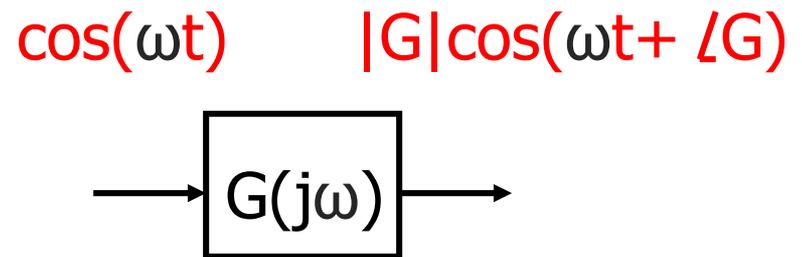
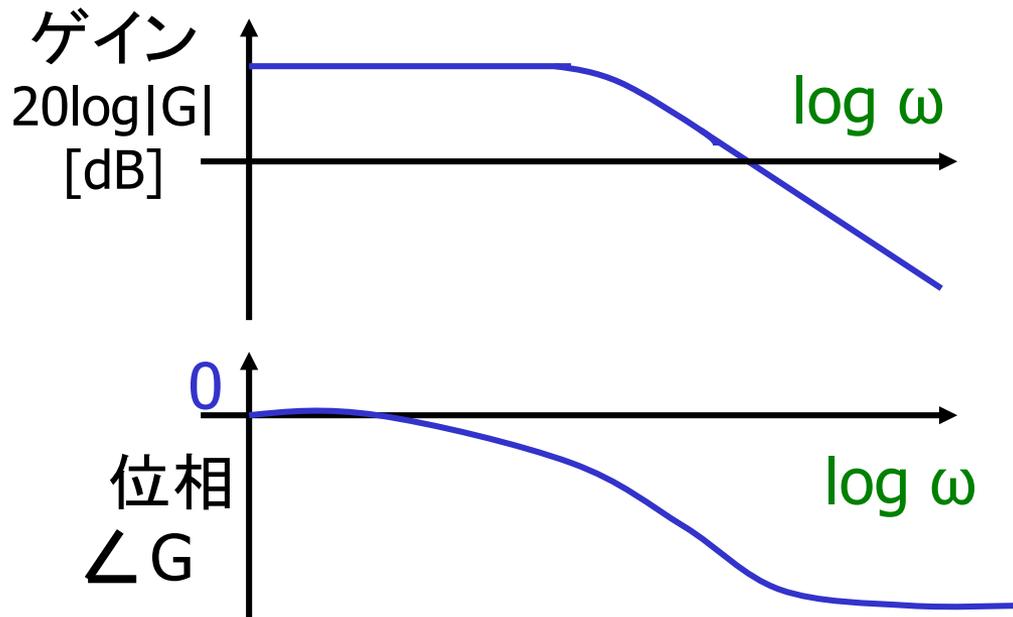
例: $G(j\omega)$ のボーデ線図またはベクトル線図の
測定データとして与えられている場合



システム全体は安定？

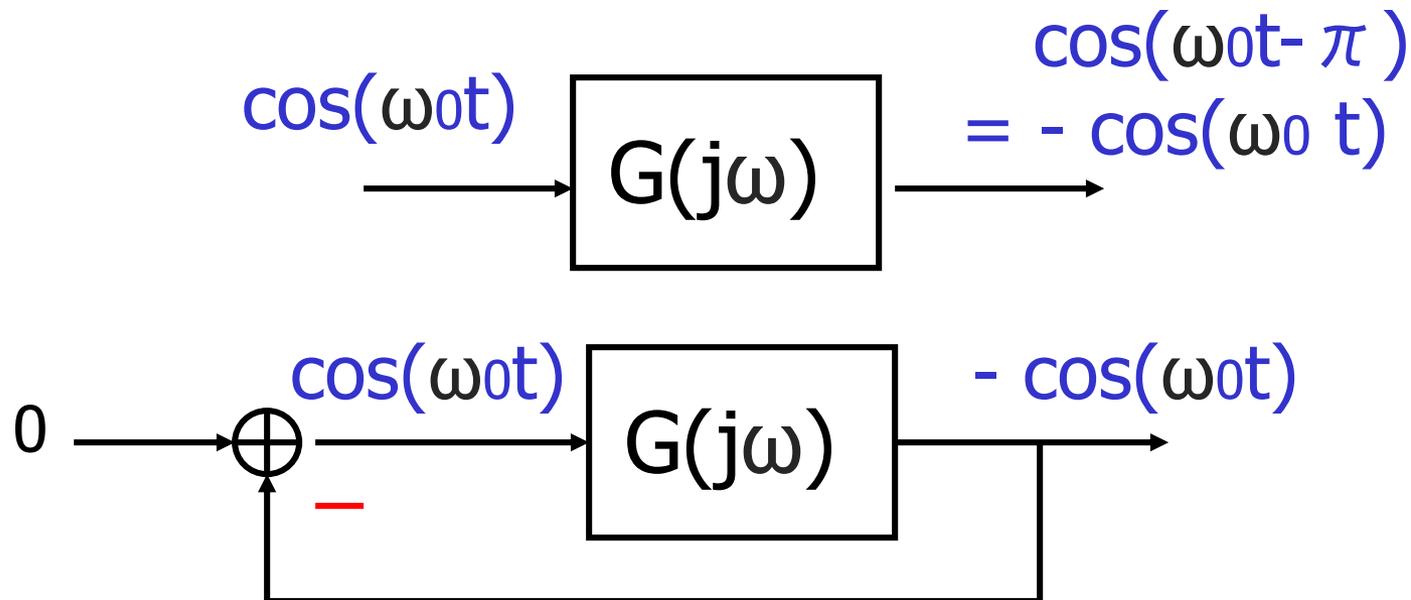
典型的システムの周波数特性 (ゲイン特性、位相特性)

多くの(安定な)システムでは周波数 ω が大きくなると
ゲイン $|G(j\omega)|$ が小さくなる、
位相 $\angle G(j\omega)$ がマイナスの値で大きくなる。



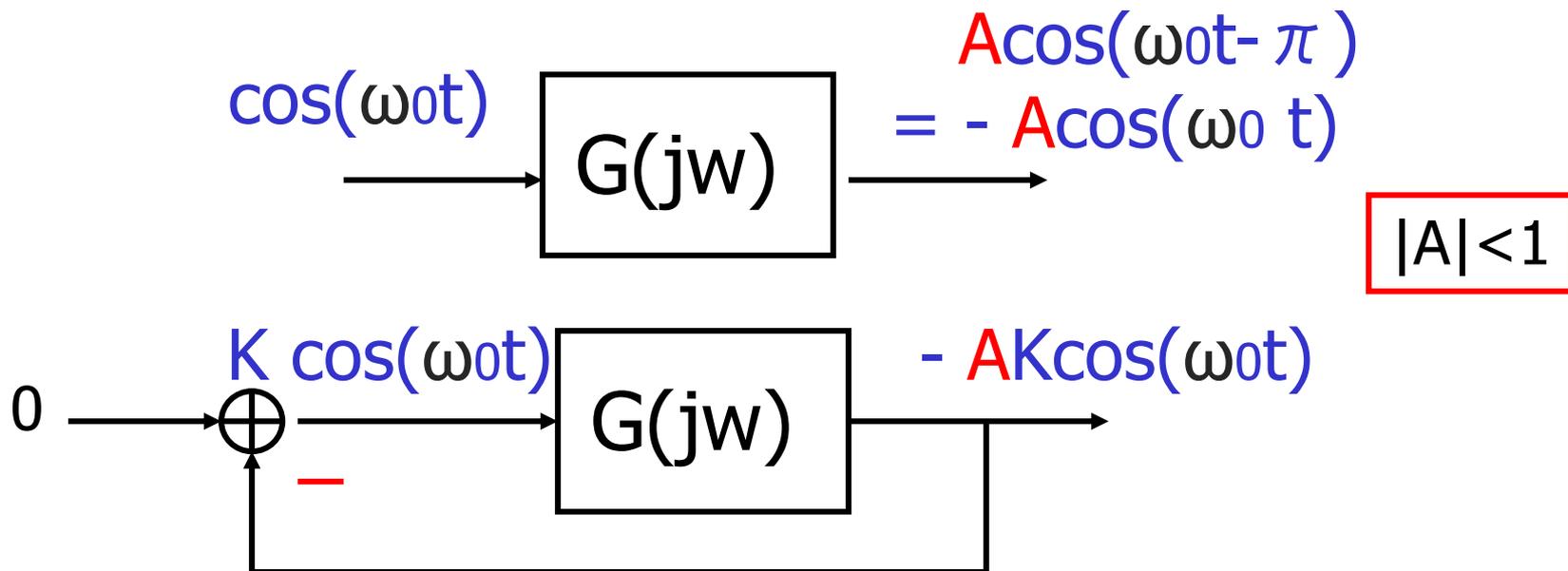
位相遅れ π の周波数で ゲインが1の場合

ある周波数 $\omega = \omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| = 1$ の場合、
フィードバックシステムは周波数 ω_0 で発振する。



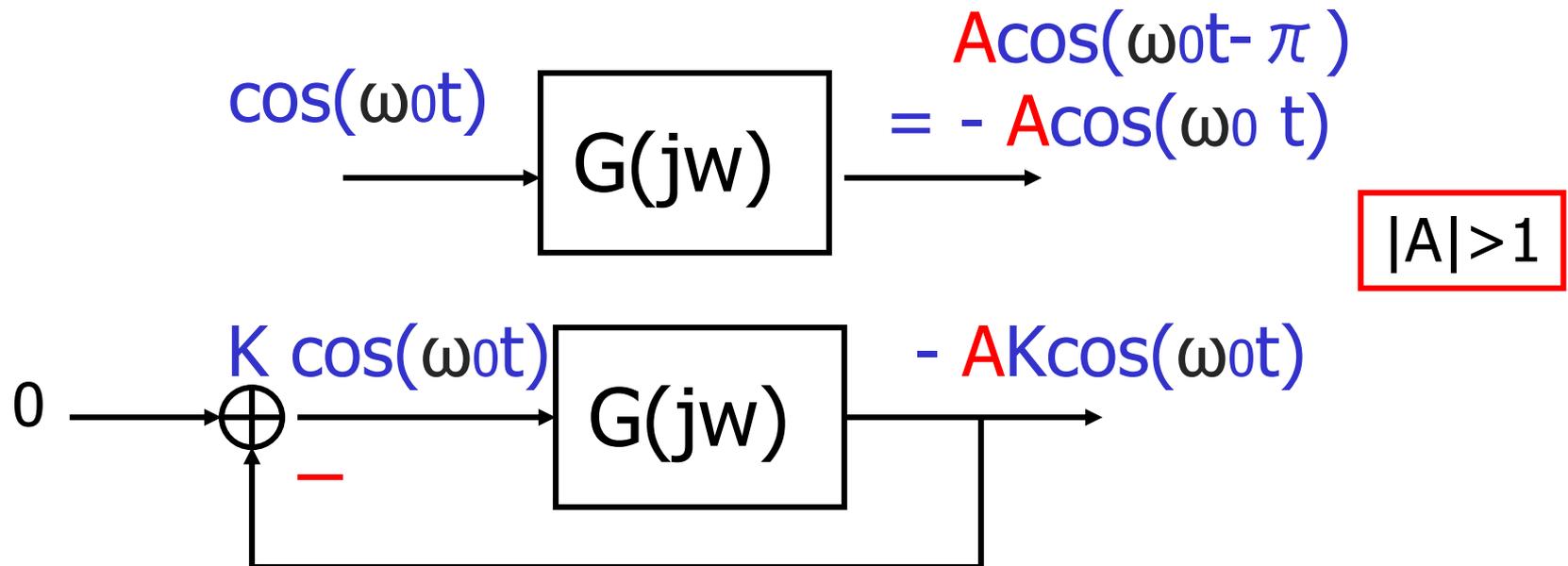
位相遅れ π の周波数で ゲインが1より小さい場合

ある周波数 $\omega = \omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| < 1$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。



位相遅れ π の周波数で ゲインが1より大きい場合

ある周波数 $\omega = \omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| > 1$ の場合、
フィードバックシステムは不安定である。



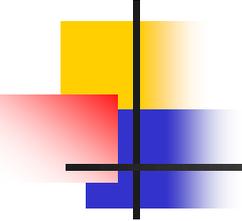
ゲインの線形表記の場合の 安定判別

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき

(I) $|G(j\omega_0)| < 1$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。

(II) $|G(j\omega_0)| = 1$ の場合、
..
安定限界である。

(III) $|G(j\omega_0)| > 1$ の場合、
..
不安定である。



ゲインのdB表記の場合の 安定判別

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき

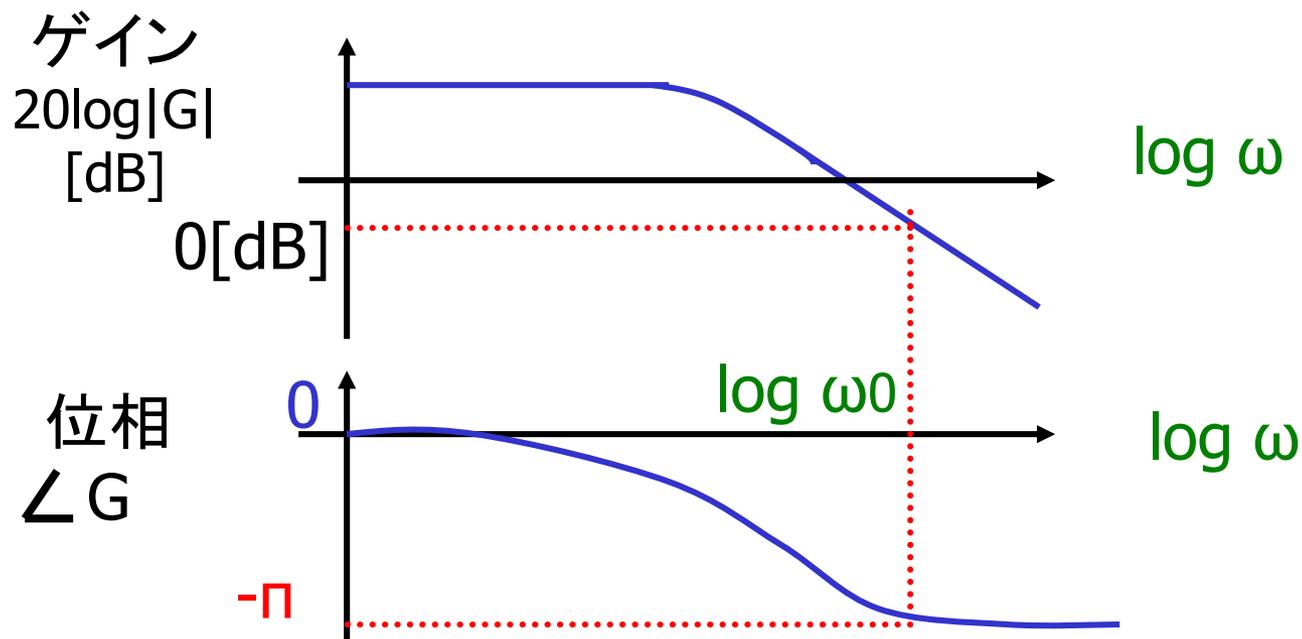
(I) $20 \log |G(j\omega_0)| < 0$ dB の場合、
フィードバックシステムは安定である。

(II) $20 \log |G(j\omega_0)| = 0$ dB の場合、
.. 安定限界である。

(III) $20 \log |G(j\omega_0)| > 0$ dB の場合、
.. 不安定である。

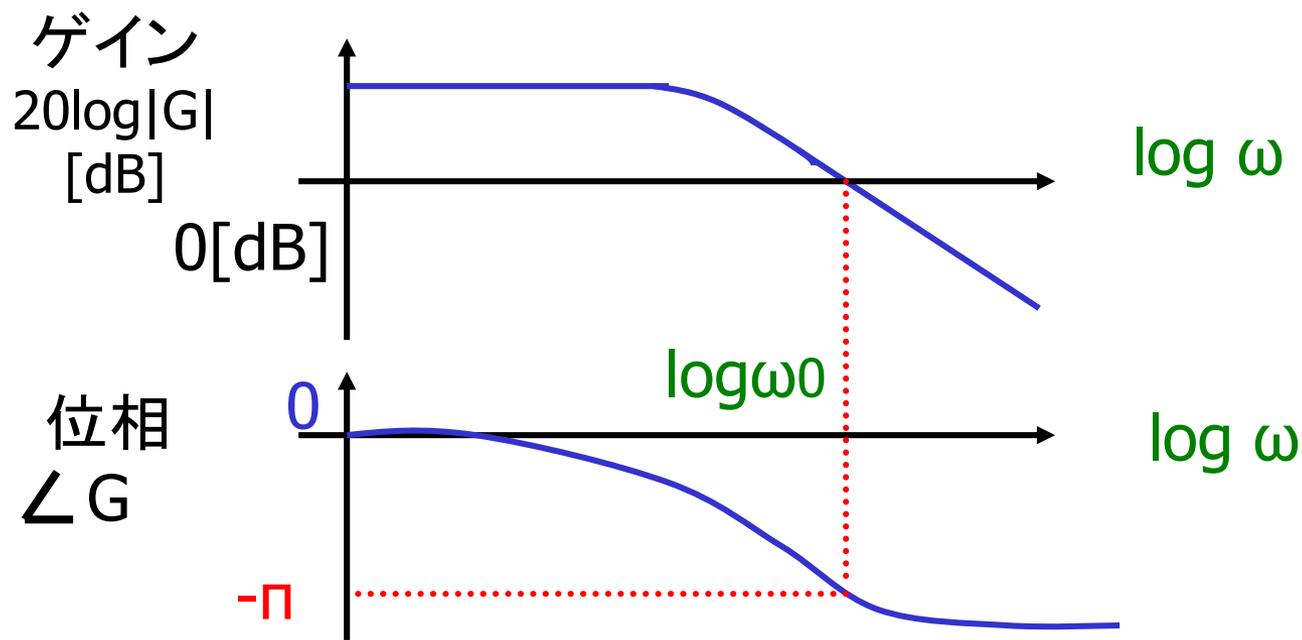
ボーデ線図による安定判別(1)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $20 \log |G(j\omega_0)| < 0 \text{ dB}$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。



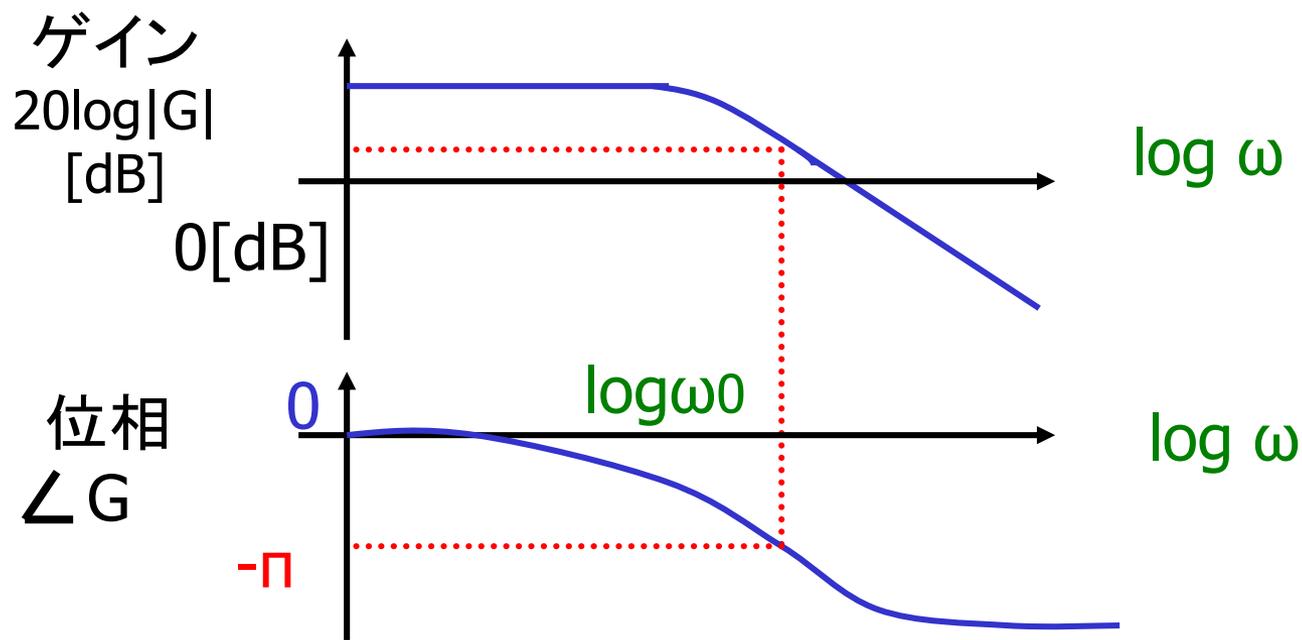
ボート線図による安定判別(2)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $20 \log |G(j\omega_0)| = 0 \text{ dB}$ の場合、
フィードバックシステムは安定限界である。



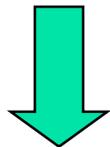
ボート線図による安定判別(3)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $20 \log |G(j\omega_0)| > 0 \text{ dB}$ の場合、
フィードバックシステムは不安定である。

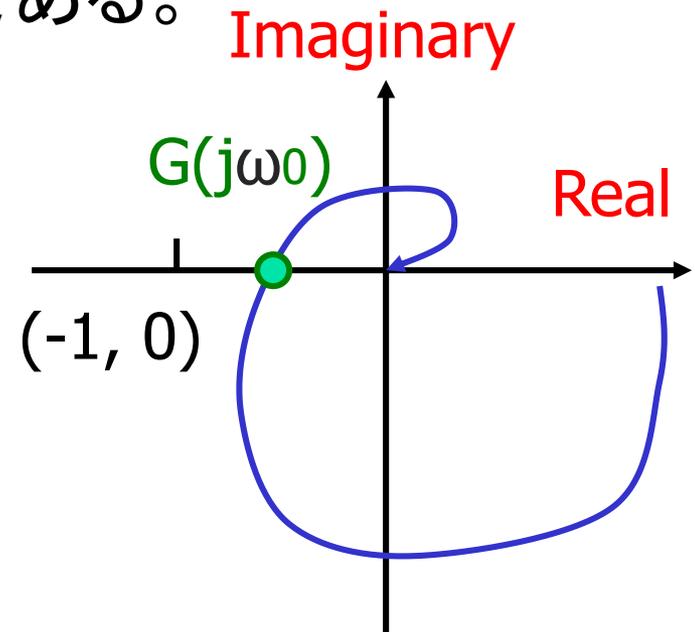


ベクトル線図による安定判別(1)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| < 1$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。

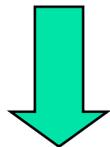


$G(j\omega)$ のベクトル線図が
 $(-1, 0)$ の内側を通るとき
フィードバックシステムは安定。

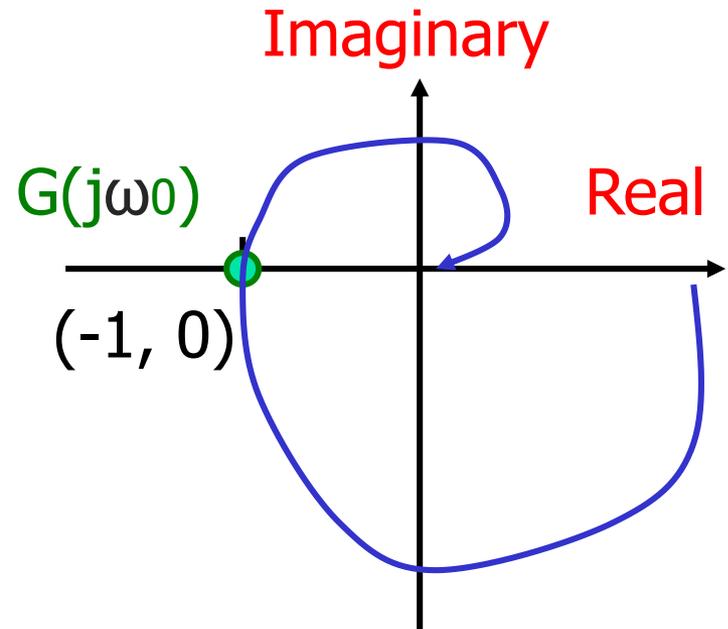


ベクトル線図による安定判別(2)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| = 1$ の場合、
フィードバックシステムは安定限界である。

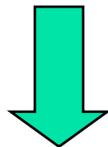


$G(j\omega)$ のベクトル線図が
 $(-1, 0)$ 上を通るとき
フィードバックシステムは
安定限界。

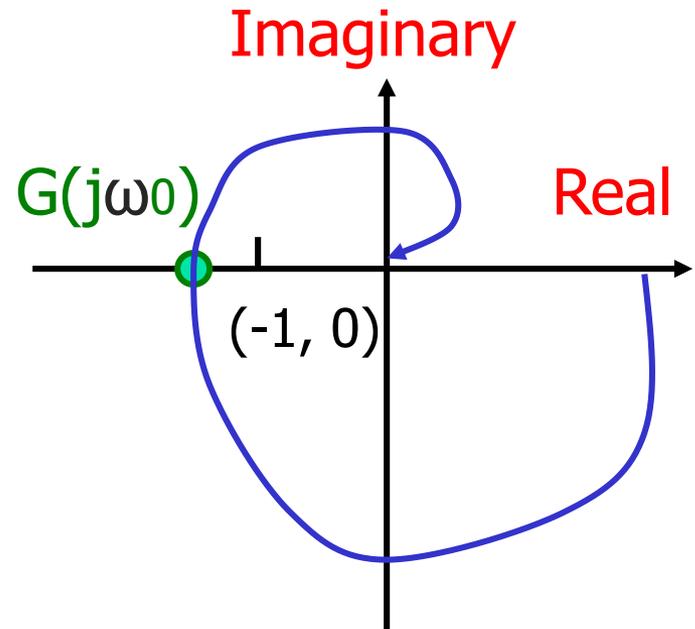


ベクトル線図による安定判別(3)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| > 1$ の場合、
フィードバックシステムは不安定である。



$G(j\omega)$ のベクトル線図が
 $(-1, 0)$ の外側を通るとき
フィードバックシステムは
不安定。

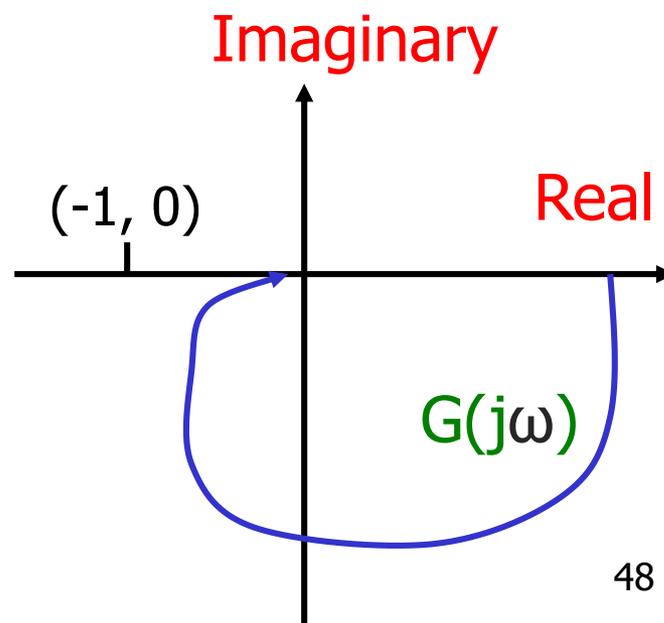
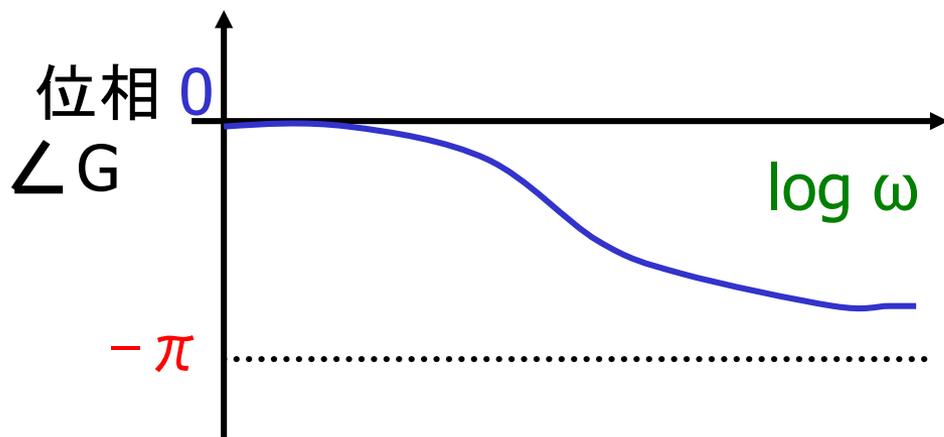


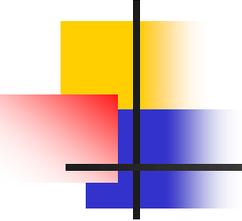
位相遅れが π までにならないとき

$\angle G(j\omega_0) = -\pi$ なる ω_0 が存在しないとき
フィードバックシステムは安定である。

例: $G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$ のとき

例: 位相線図、ベクトル線図が
次のような形をしているとき



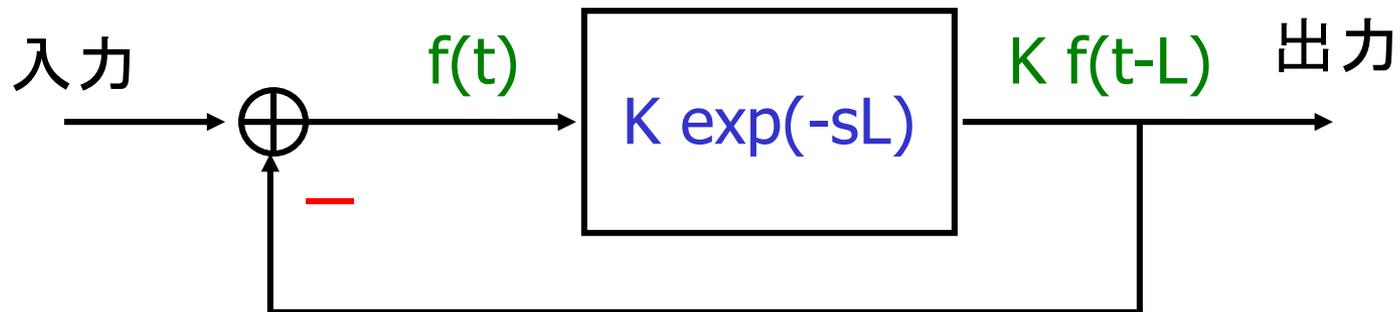


制御工学

- 安定度： 安定なシステムをフィードバックをかけて安定になった場合、
「どの程度安定性の余裕があるか」
ゲイン余裕・位相余裕
ベクトル線図、ボーデ線図を用いる。

Nyquist の安定判別 例題

$G(s) = K \exp(-sL)$, $L > 0$ のとき、下図のフィードバックシステムが安定になるための $K (> 0)$ の条件を求めよ。



注: $G(s)$ が s の有理多項式でない場合
R-H法は適用不可

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K \exp(-sL)}{1+K \exp(-sL)}$$

$K \exp(-j\omega L)$ のボーンデ線図

ゲイン
 $20\log|G|$
[dB]

0[dB]



ω

$K < 1$
(安定)

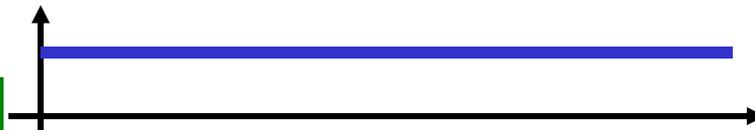
0[dB]



ω

$K = 1$
(安定限界)

0[dB]

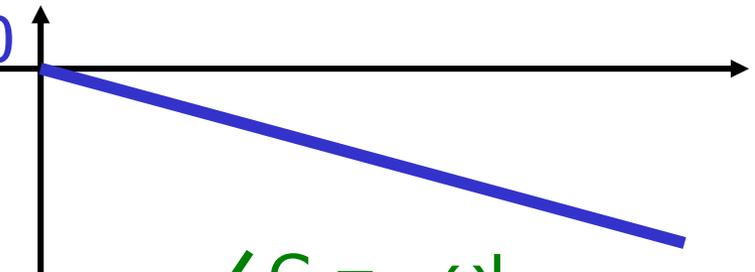


ω

$K > 1$
(不安定)

位相
 $\angle G$

0



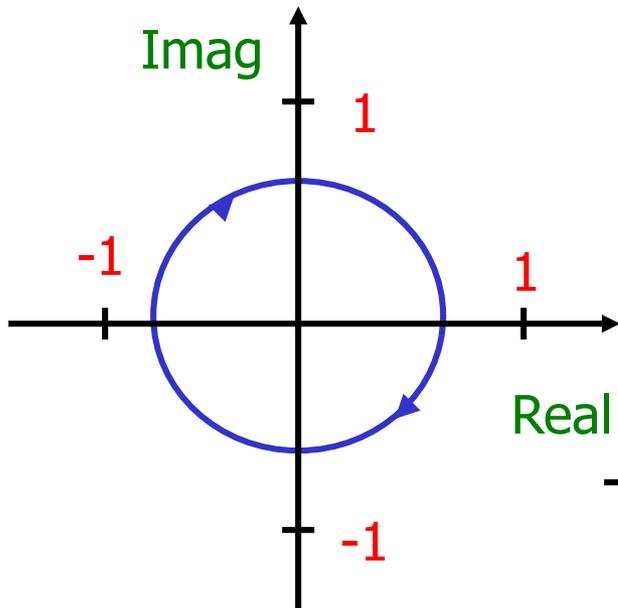
ω

$$\angle G = -\omega L$$

線形位相
Linear Phase

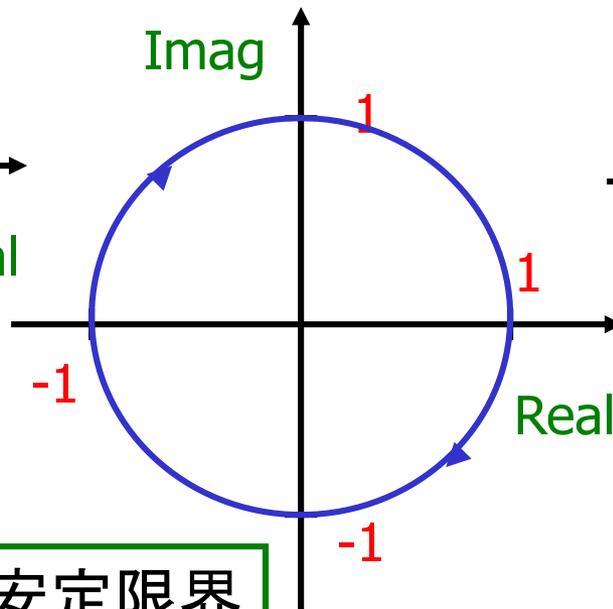
$K \exp(-j\omega L)$ のベクトル線図

$K < 1$



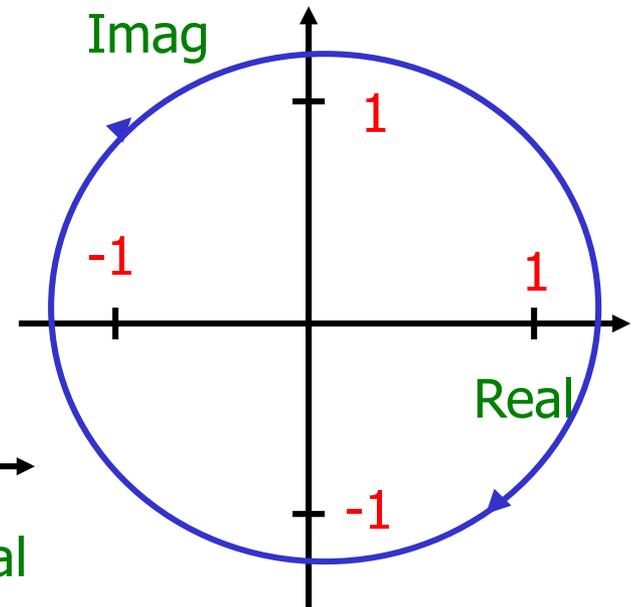
安定

$K = 1$



安定限界

$K > 1$



不安定

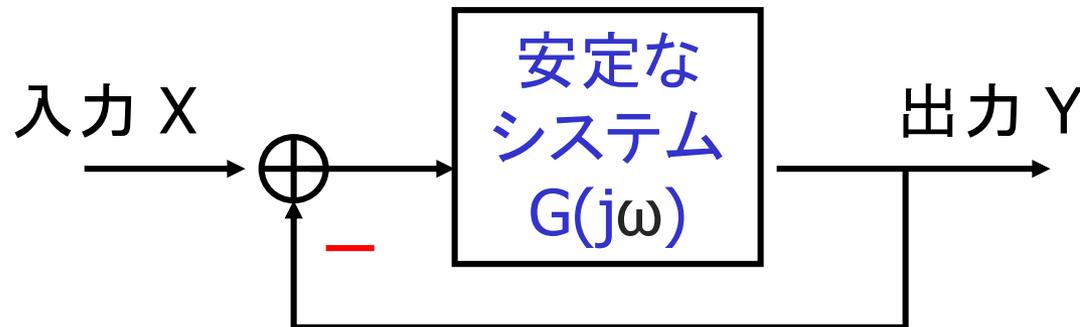
フィードバック・システムの安定度 (ゲイン余裕、位相余裕)

安定なシステム $G(j\omega)$ にフィードバックをかける。

ある周波数 $\omega = \omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき

$|G(j\omega_0)| < 1$ の場合、

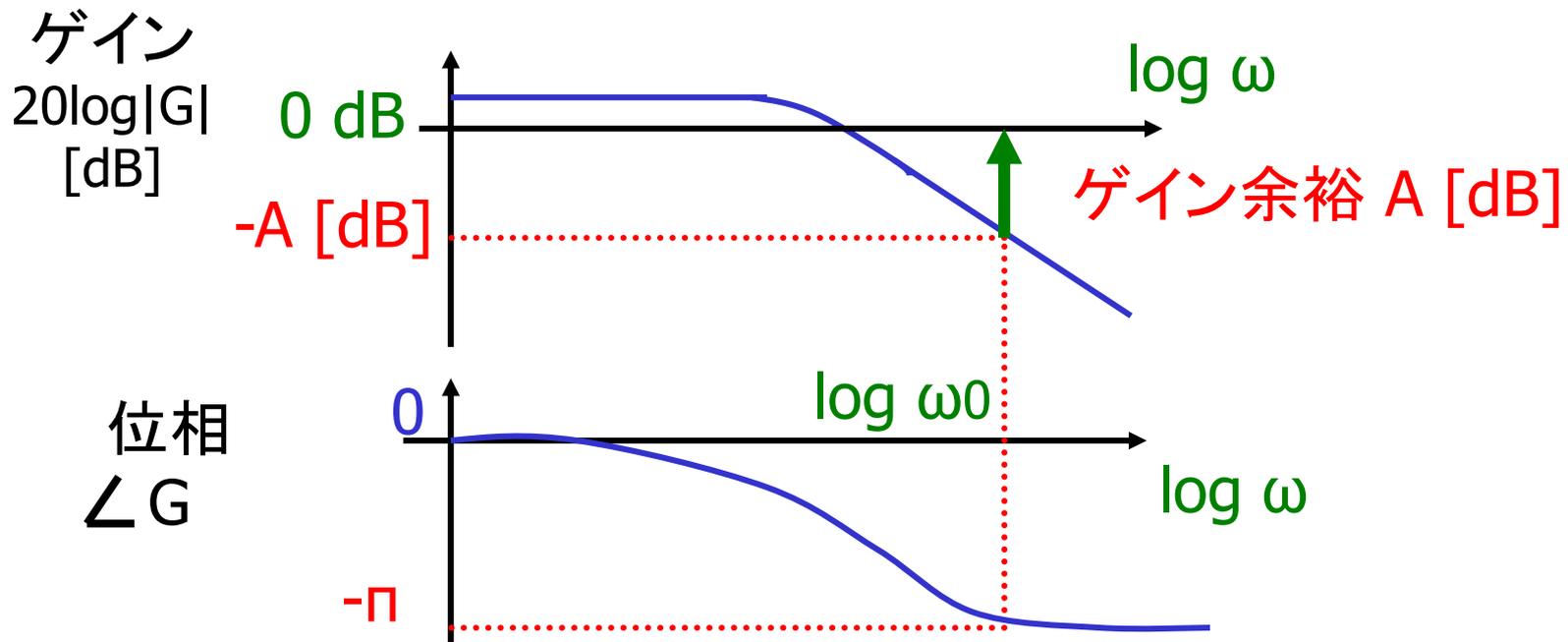
フィードバックシステムは安定である。



システム全体は安定の場合、「どの程度」安定か？

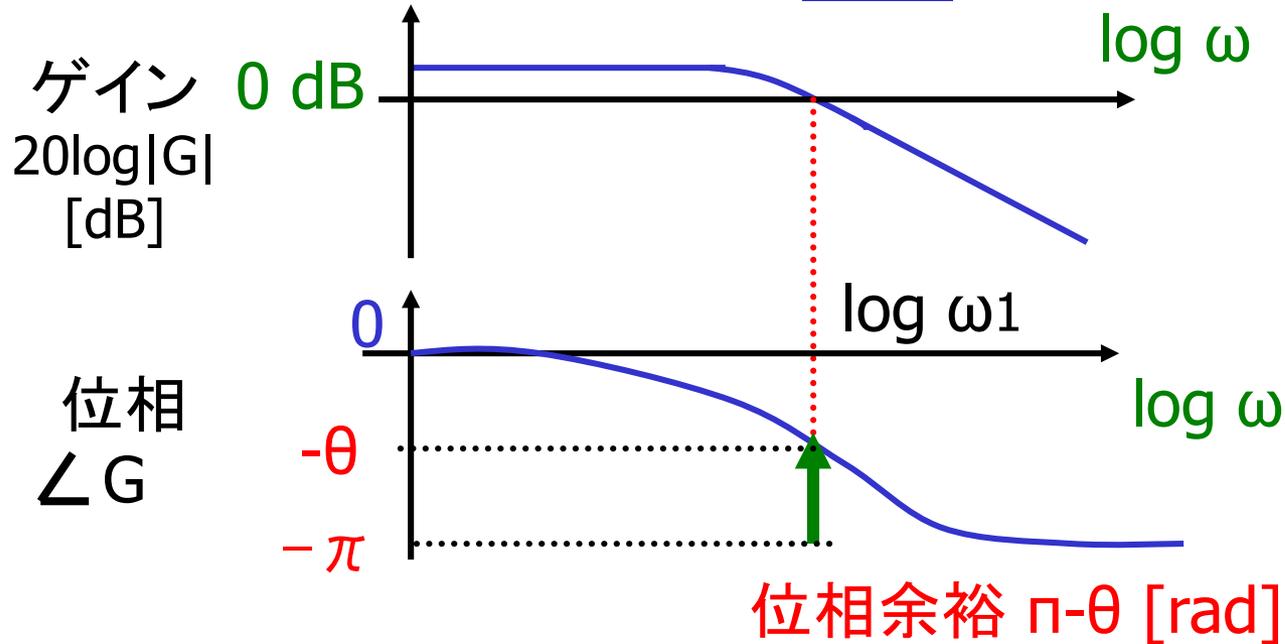
ゲイン余裕 (Gain Margin) とボーデ線図

ある周波数 $\omega = \omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $20 \log |G(j\omega_0)| < 0 \text{ dB}$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。



位相余裕 (Phase Margin) とボーデ線図

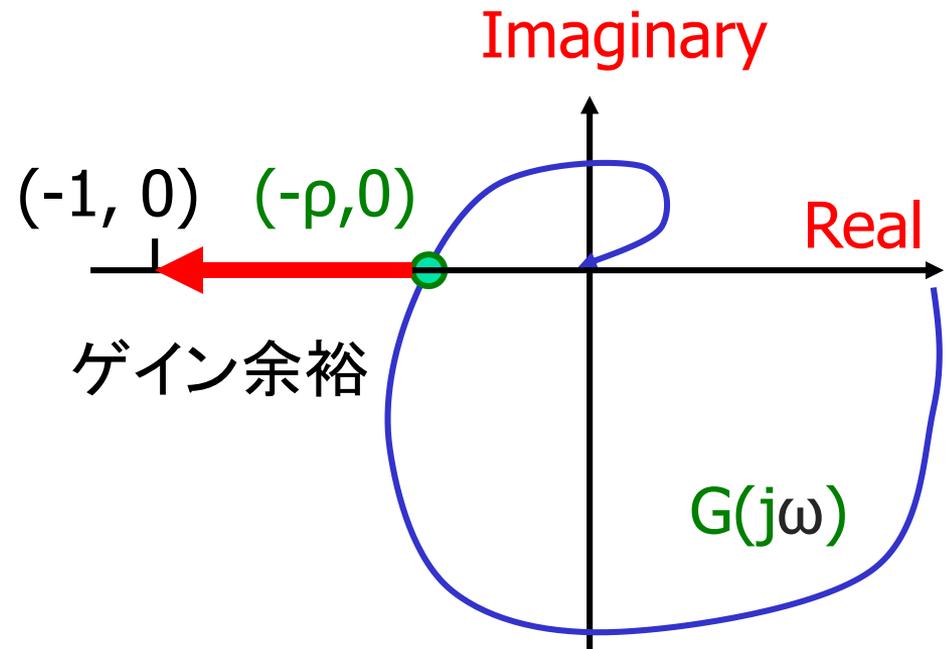
ある周波数 $\omega = \omega_1$ で $20 \log |G(j\omega_1)| = 0 \text{ dB}$
 $\angle G(j\omega_1) > -\pi$ のとき
フィードバックシステムは安定である。



ゲイン余裕 (Gain Margin)と ベクトル線図

$G(j\omega)$ のベクトル線図が $(-1, 0)$ の内側を通るとき
フィードバックシステムは安定。

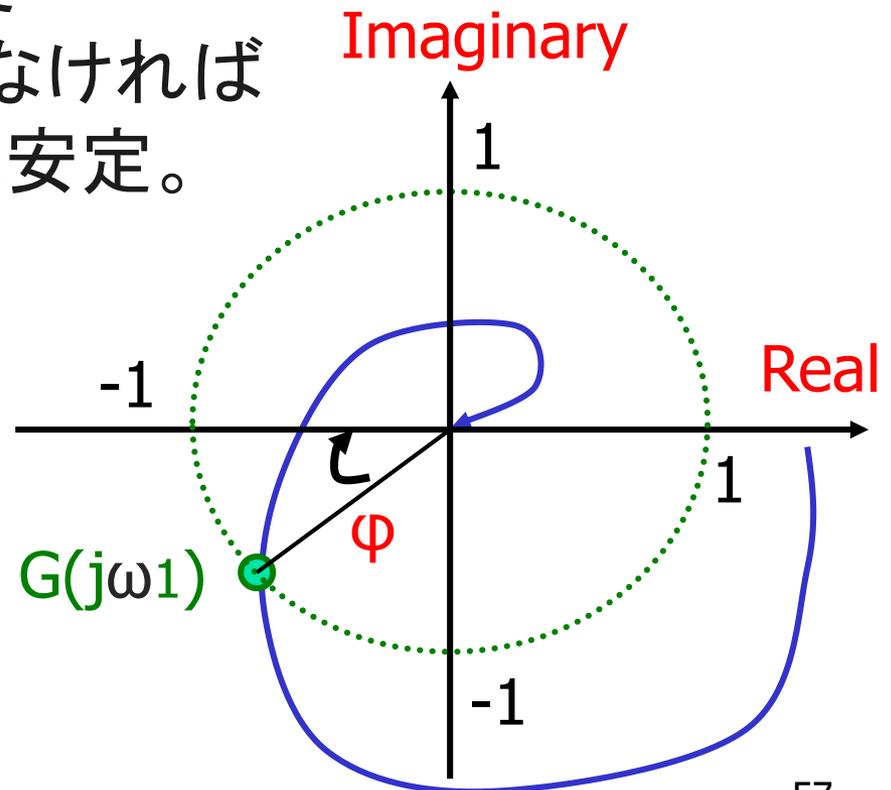
$$\text{ゲイン余裕} = -20 \log \rho \text{ [dB]}$$



位相余裕 (Phase Margin) と ベクトル線図

$G(j\omega)$ のベクトル線図で
単位円上を交差する点で
位相が $-\pi$ まで回っていないならば
フィードバックシステムは安定。

$$\text{位相余裕} \\ \varphi = \pi + \angle G(j\omega_1)$$



アレクサンドル・リアプノフ

Aleksandr Lyapunov 1857-1918



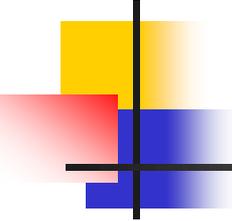
ロシアの数学者, 物理学者 (帝政ロシア時代)

1892年 博士論文"運動の安定性の一般問題" モスクワ大学

非線形システムの安定性 → リアプノフ関数

数学において、力学系や自励系を成す常微分方程式系における不動点の安定性を証明のために使用。

安定性理論や制御理論で重要な数学的ツール



「計測」と「制御」は双対の関係

「計測なくして制御なし」

計測技術と制御技術は表裏一体の関係

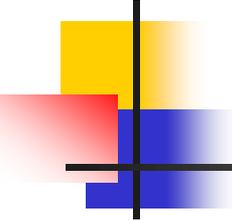
カルマンフィルタ(観測、計測)

最適制御(制御)

数式上双対の関係が示されている

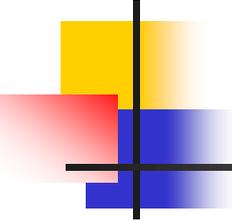
“You can't control what you can't measure.”

(Tom DeMarco)



付録

フーリエ変換とラプラス変換



Fourier 変換の限界

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

は安定なシステム、すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

の場合にのみ適用できる。

上記条件を満たさないときはFourier 積分の値が存在しない。

Joseph Fourier

1768-1830



ナポレオン時代のフランス人
エジプト遠征につきそう。
エジプト学の研究者でもある。
政治的にも活躍。

Laplace の後を継いで大学教授になる。

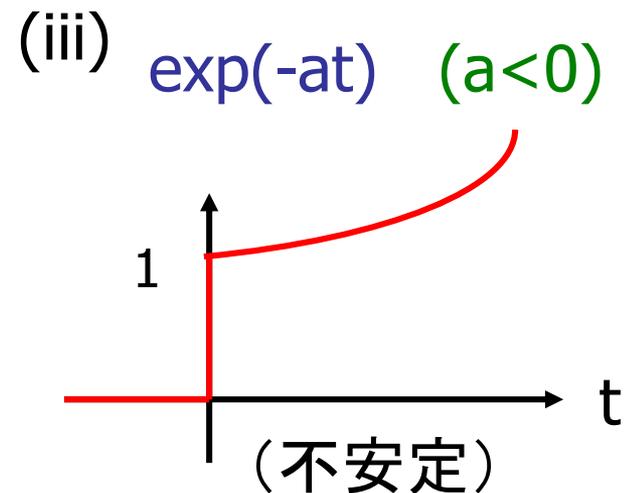
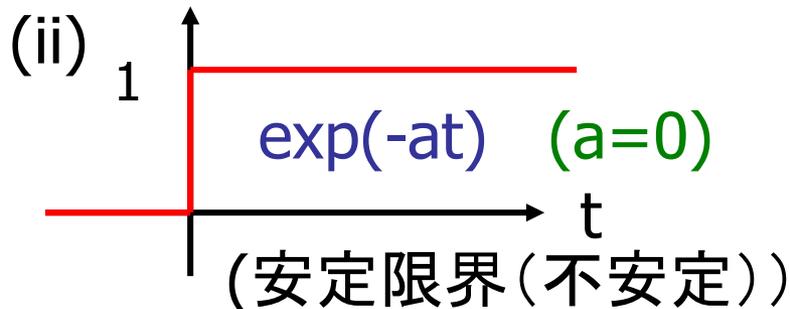
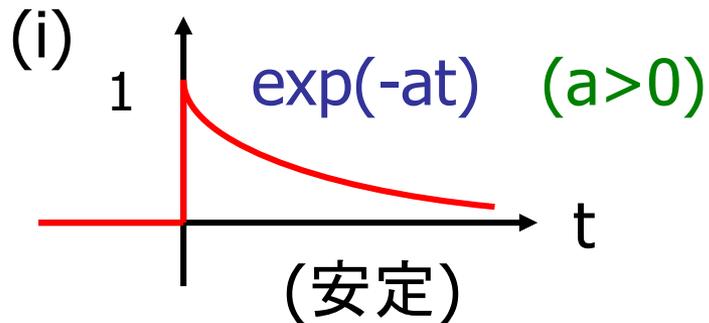
Fourier 級数展開の理論は最初はフランス科学界
に受け入れられなかった。

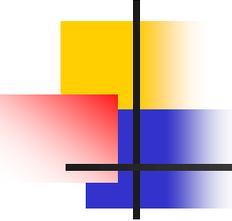
Joseph Fourier upset the French Academy in 1807.

線形システムのインパルス応答

$\exp(-at)$ は重要な関数

インパルス応答 $g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0) \end{cases}$





$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0) \end{cases}$$

のフーリエ積分

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-at)\exp(-j\omega t)dt = \int_0^{\infty} \exp(-(a + j\omega)t)dt$$

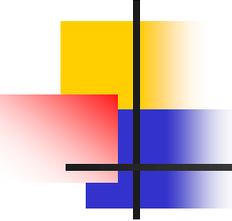
$$= \frac{-1}{j\omega + a} [\exp(-(a + j\omega)t)]_0^{\infty} = \frac{1}{a + j\omega} [1 - \exp(-(a + j\omega)\infty)]$$

(注) $|\exp(-(a + j\omega)t)| = |\exp(-at)| |\exp(-j\omega t)|$

$$0 \quad (a > 0)$$

$$= |\exp(-at)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 \quad (a = 0)$$

$$\infty \quad (a < 0)$$


$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0) \end{cases}$$

のフーリエ積分

- (i) $a > 0$ のとき $G(j\omega) = 1/(a + j\omega)$
- (ii) $a = 0$ のとき $G(j\omega)$ の値は存在しない。
- (iii) $a < 0$ のとき $G(j\omega)$ の値は存在しない。

(ii)の補足: $a = 0$ のとき

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt$$

$$= \frac{1}{\omega} [\sin(\omega t) + j \cos(\omega t)]_0^{\infty}$$

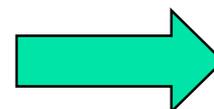


有限確定の値が
存在しない。

“定積分の値が存在する”の意味

- 歌手の吉幾三氏が

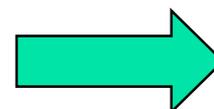
「オラが村には電気がない」



電気が物理的にない、電気がゼロだの意味。

- 数学者の高木貞治先生が

「この定積分には値がない」



積分に有限確定な値が存在しないとの意味。

- おなじ「ない」でも意味が異なる。

- 定積分の値が存在する。



その定積分に有限確定な値が存在する。

高木貞治 (たかぎ ていじ)

1875 - 1960

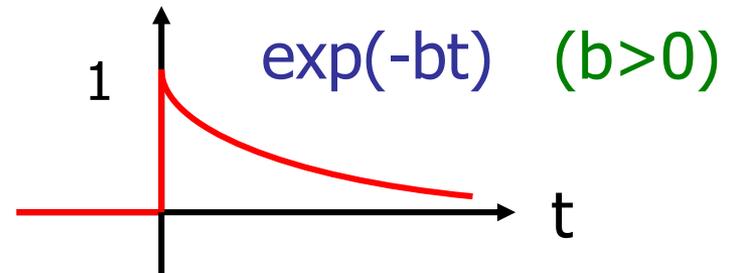
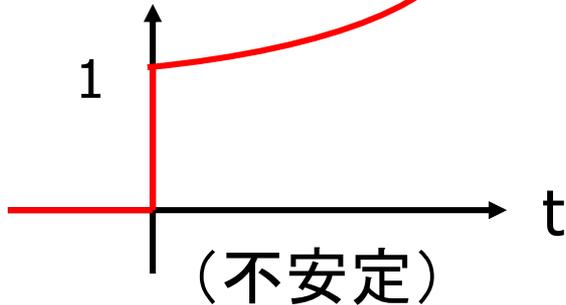


日本の数学者、東京帝国大学教授。
帝国大学理科大学(現在の東京大学理学部)数学科へ。
卒業後にドイツへ3年間留学, ヒルベルトに師事。
代数的整数論の研究では類体論を確立。
クロネッカーの青春の夢を解決。
ヒルベルトの23の問題のうち、第9問題と第12問題を解決。
『解析概論』『初等整数論講義』『代数的整数論』など
多くの数学教科書。

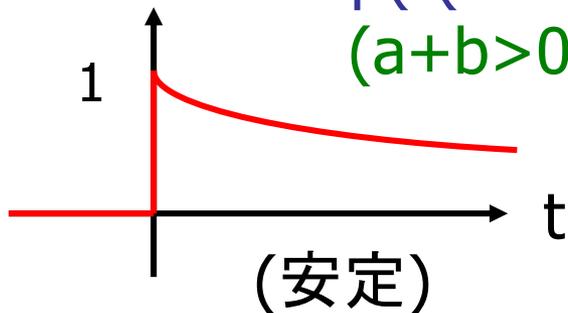
『解析概論』は私も学生時代に読みました。

Laplace変換の導入

$$g(t) = \exp(-at) \quad (a < 0)$$



$$g(t) \exp(-bt) = \exp(-(a+b)t) \quad (a+b > 0)$$

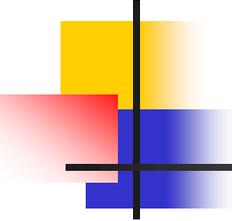


$g(t)$: 不安定

$g(t) \exp(-bt)$: 安定

$g(t) \exp(-bt)$ に
Fourier 変換を行う。

↓
Laplace変換



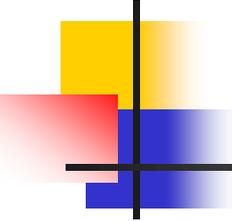
ラプラス変換の定義

$$G(b + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-bt) \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-(b + j\omega)t) dt$$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-st) dt$$

ここで
 $s = b + j\omega$



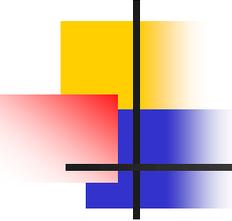
逆ラプラス変換の定義

$$g(t)\exp(-bt) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(b + j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(b + j\omega) \exp((b + j\omega)t) d\omega$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} G(s) \exp(st) ds$$

ここで
 $s=b+j\omega$



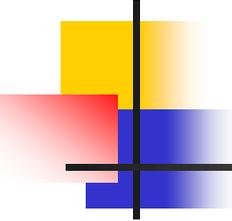
周波数伝達関数と伝達関数(1)

安定なシステムのインパルス応答 $g(t)$

周波数伝達関数 $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

周波数伝達関数 $G(j\omega)$ の $|G(j\omega)|$, $\angle G(j\omega)$ は
物理的な意味(周波数応答)をもつ。



周波数伝達関数と伝達関数(2)

安定または不安定なシステムの

インパルス応答 $g(t)$

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-st) dt$$

$G(s)$ は周波数伝達関数 $G(j\omega)$ のような物理的意味はもたない。
ではなぜ $G(s)$ を考えるのか。

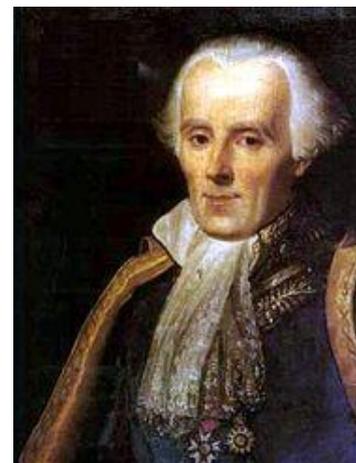
ピエールシモン・ラプラス

Pierre-Simon Laplace 1749-1827

フランスの数学者

「天体力学」「確率論の解析理論」の名著

ラプラス変換の考案者



決定論者。これから起きるすべての現象は、
これまでに起きたことに起因する。

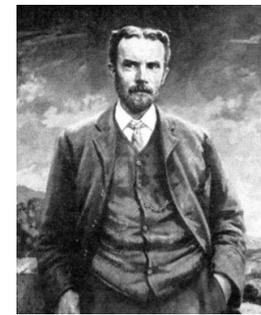
ある特定の時間の宇宙のすべての粒子の運動状態
が分かれば、これから起きる現象は計算できる。



後に量子力学により否定される。

オリヴァー・ヘヴィサイド

Oliver Heaviside 1850 - 1925



- イギリスの電気技師、物理学者、数学者
- 電気回路での複素数の導入
インピーダンスの概念の導入、
「ヘヴィサイドの演算子法」の開発
- インダクタンスやコンダクタンスなど、
回路理論用語のいくつかを提唱
- ベクトル解析とベクトル演算を発明
- マクスウェル方程式： 当時は20の式から構成
現在の4つのベクトル形式の式に直す