集積電子回路
2020年10月27日
11月10日

電気電子工学特別講義Ⅱ
回路の回り道　～回路論2 時間の導入

ザインエレクトロニクス株式会社
源代 裕治
yuji.gendai@gunma-u.ac.jp

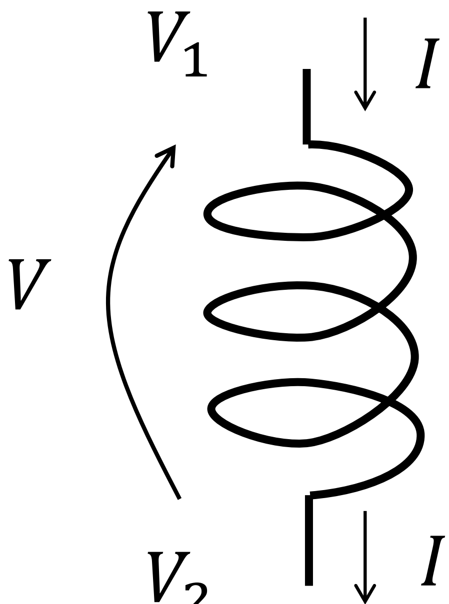
第4章 時間の導入

4.1 交流理論へ至る道

『時間』とは何か?

回路においてはブランチ特性を記述するため導入される

誘導性ブランチ=inductor L

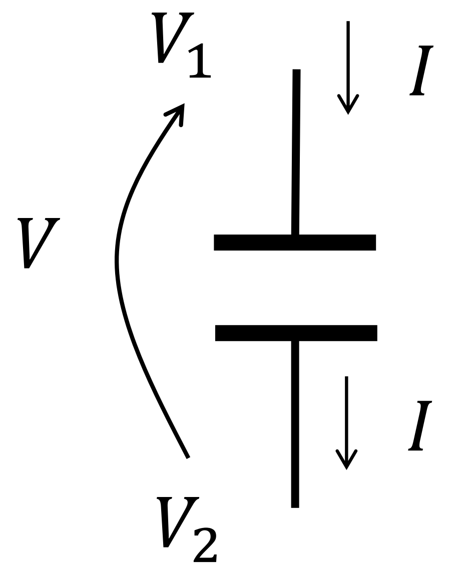


$$\boxed{V = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

電流の変化率(時間微分)に比例する電圧を発生するブランチを誘導性ブランチという。

IとVが交換されている関係

容量性ブランチ=capacitor C



$$\boxed{I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}}$$

電圧の変化率(時間微分)に比例する電流が流れるブランチが容量性ブランチである。

容量属性

$$\boxed{I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}}$$

電流の単位: A (Ampere)
電圧の単位: V (Volt)
時間の単位: s (second)

容量の単位: F (Farad) = A s / V

回路で用いる単位系で常用されるSIでは、単位換算不要で、数値がそのまま計算に使えるように決められている。

$$\boxed{\frac{I}{C} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}}$$

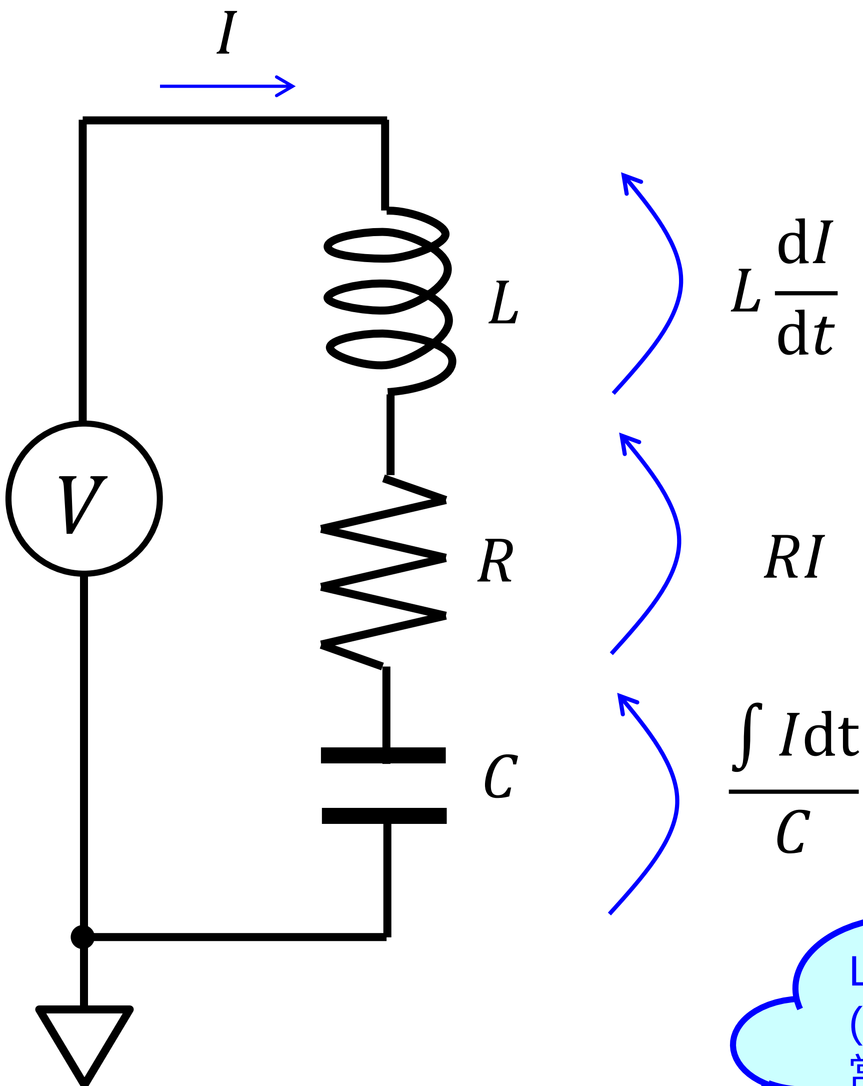
両辺をCで割っただけだが、回路設計では、こちらの形の方で考えることの方が多い。
右辺は**スルーレート(slew rate)**と呼ばれる。回路の速度制約となったり、波形乱れの要因に見えたりする。

$$\boxed{V = \frac{\int I\,dt}{C} = \frac{Q}{C}}$$

左右の辺を交換して積分すると、上式となる。容量の電流を時間で積分すると電圧となる。単位は A s。定数分の不定性が残るが、気にせずひっくるめて電荷Qとする。

電荷の単位: C (Culomb) = A s

LRCの直列回路の方程式 Kirchhoffの法則は時間素子が入っても成り立つ。



KCLから、3素子すべてに同じ電流Iが流れる。

各素子の両端電圧はブランチの定義から決まるが、容量特性は電流の積分に書き直す。

KVLから、回路方程式として、

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{\int I\mathrm{d}t}{C}=\mathrm{V}$$

が得られる。微分方程式に直すため、両辺を微分すると、

$$L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{C}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

LCが入って来ると、回路(composite branch) は常微分方程式(ODE)の言葉で語られる。

ならば、

微分方程式の言葉をちょっとだけ学ぼう(1/2)

といっても、世界は広い。ドイツ語も中国語もスワヒリ語もある。とは言え、とりあえずは常微分方程式(ODE: Ordinary Differential Equation)の中でも、**定数係数線形**という国で暮らせれば十分である。

- 線形ODEの解は、斉次(homogeneous)方程式の解(**一般解**)と**特解**の和で表される。

我々が扱うODEの一般型

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = u \qquad (1)$$

に対し、右辺(電圧源もしくは入力)を0としたものを斉次方程式(あるいは同次方程式)という。その解を区別するため変数名を変えよう。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ay = 0 \qquad (2)$$

このとき、(1)式を満たす解xに(2)式の解yを足したものも(1)式の解である。

$$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t} + a(x+y) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax\right) + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ay\right) = u$$

そこで、(1)式の解をともかくひとつ(特解)と、(2)式の解全体(一般解)を求めれば、(1)式の解全体が求まる(、と期待される)。

回路の場合は、入力uがオーディオ信号だったりRF信号だったりするので、厳密解を求める必要はめったにない。それよりは一般解の特性(そのうち減衰するのか発振するのかとか)や、入力と特解との関係が問題となる。

c.f. 極配置

消滅する一般解

例えば右図の場合、KVLから

$$C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+\frac{V}{R}=0$$

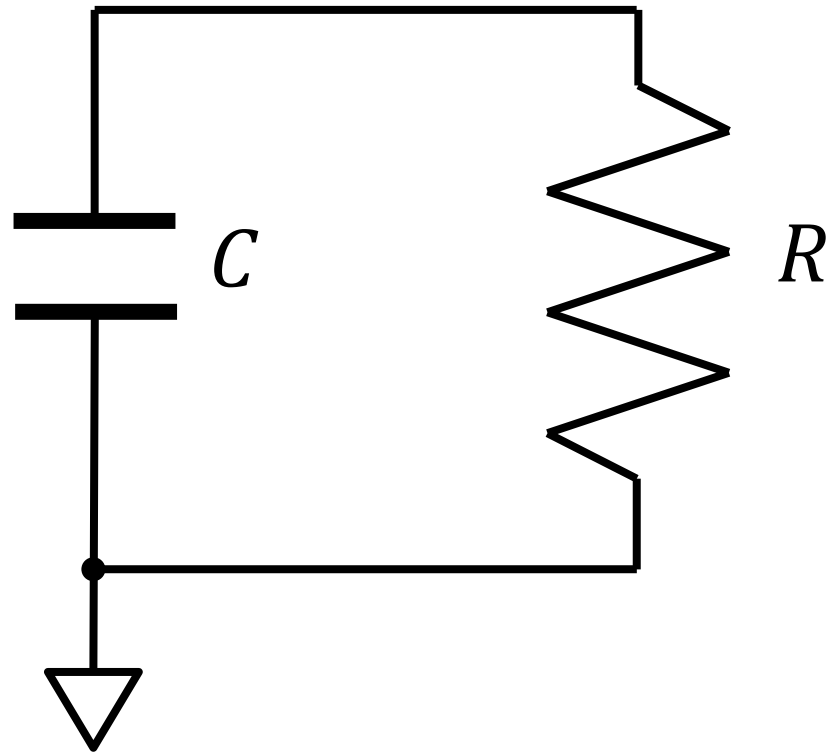
なる斉次方程式が得られる。この方程式は、直接積分型に変形して解ける。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{V}{CR}$$

$$\therefore V=K_0\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)$$

ここでK_0は積分定数であるが、一般解のパラメータでもある。$t=0$で$V(0)=V_0$の条件から、$K_0=V_0$と決まる。一般解に初期条件与えると解が一意に求まる、という現象の認識は大切である。
しかし回路屋にとって、もっと有用な知見は、式の形から時間経過とともに、初期値V_0に関わらず、一般解が0に収束して行く現象である。

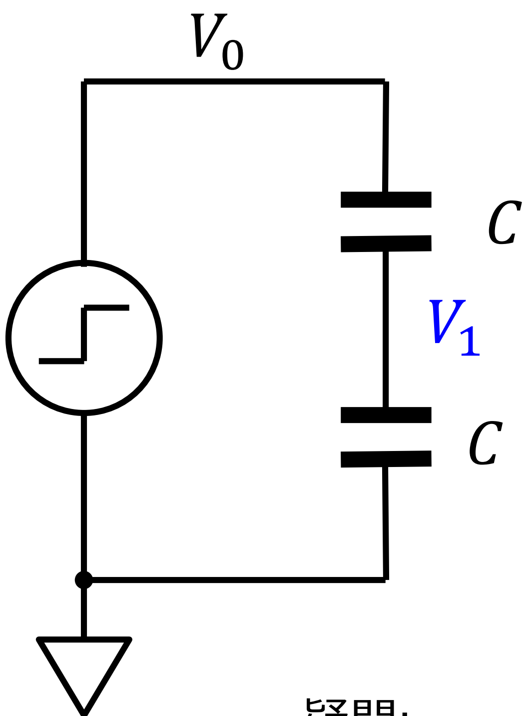
初期条件　$V(0)=V_0$

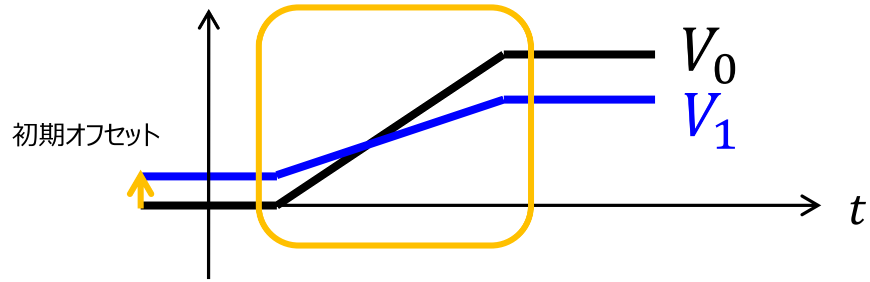


この観測から、初期状態は時間とともに消滅する、と期待する。
もちろん、いつでもは成り立たない命題である。

初期状態が消滅しない回路の例

初期値を無視することの影響を一般的に見るのは難しいにしろ、一例くらいは挙げておこう。





V_1変化量はV_0変化量の半分、

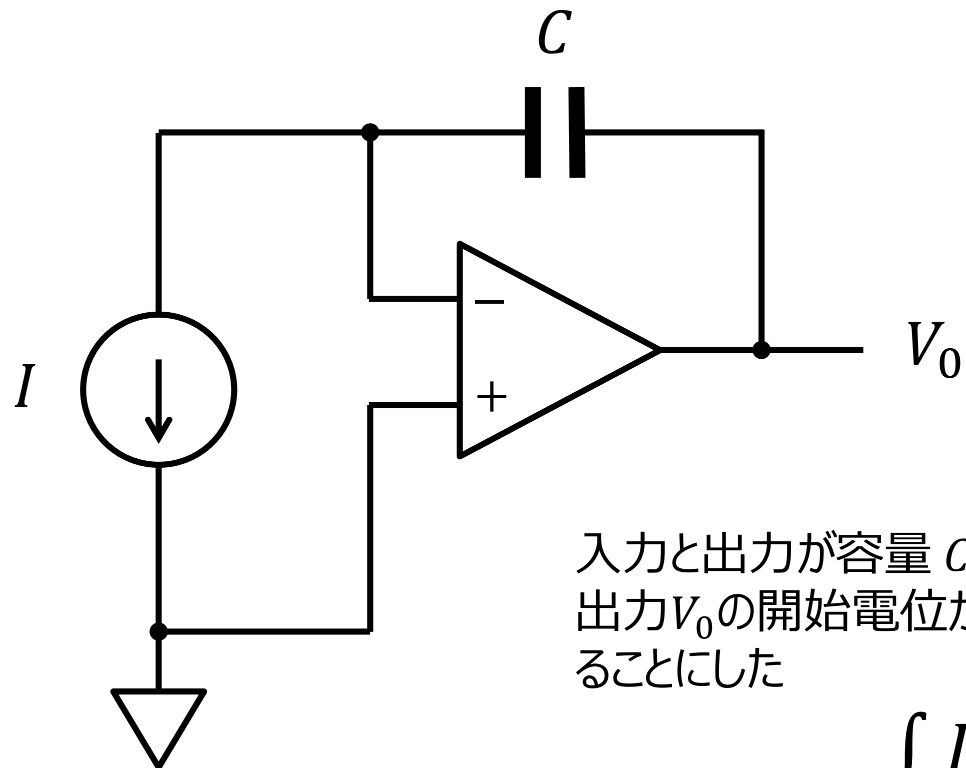
と言う点ではOhmの法則が成り立っているが、初期電位にオフセットがある場合、絶対電圧の比は一定ではない。

疑問:

①実回路ではどうなると考えられるか。
②シミュレータでは、どう扱われるか。
③両者は一致するだろうか。そうでない場合には、どうすれば良いだろうか。

完全積分器

初期値を無視できない回路の別の例。いつか実際に遭遇するかも知れない。



入力と出力が容量 C で完全に分離されているので、出力V_0の開始電位が決められない。以前無視することにした

$$V_0 = \frac{\int I\,dt}{C}$$

の積分定数に対応する。

ところで、線形って?

◆時間とともに変化する信号$u(t)$と$v(t)$があったとする。信号は電圧のこともあれば電流のこともある。任意の定数aとbをもちいて合成した信号$\mathrm{a}\,u(t)+b\,v(t)$に対し、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{a}\,u(t)+b\,v(t))=a\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+b\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

が成り立つ。足してから微分しても、微分してから足しても結果は同じということである。積分についても同様である。微分積分は線形なのである。

可換な図式

$$\begin{tikzcd}
u(t), v(t) \arrow[r, "\substack{\text{線形演算}\\ \text{定数倍と加算}}"] \arrow[d, "\substack{\text{関数対応}\\ F}"'] & \mathrm{a}\,u(t)+b\,v(t) \arrow[d, "\substack{\text{関数対応}\\ F}"] \\
F\big(u(t)\big), F(v(t)\ ) \arrow[r, "\substack{\text{線形演算}\\ \text{定数倍と加算}}"] & \begin{matrix} F(a\,u(t)+b\,v(t)) \\ aF\big(u(t)\big)+b\,F(v(t)\ ) \end{matrix}
\end{tikzcd}$$

どちらの経路を辿っても同じ結果にたどり着くとき、関数対応Fを線形と呼ぶ。

微分方程式の言葉を学ぼう(2/2)

- 高階ODEは、ベクトル型1階ODEに書き直せる。

ODE中最高次の微分を**階**と呼ぶ。
これはベクトル型に書き換えた次数と一致する。

たとえば、LRCの直列回路の式

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

を、$I_0 = I, I_1 = \frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}t}$ とおいて書き直すと、

導関数を独立変数
扱いするなんて、、、

$$L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{I_0}{C} - RI_1 + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/(LC) & -R/L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

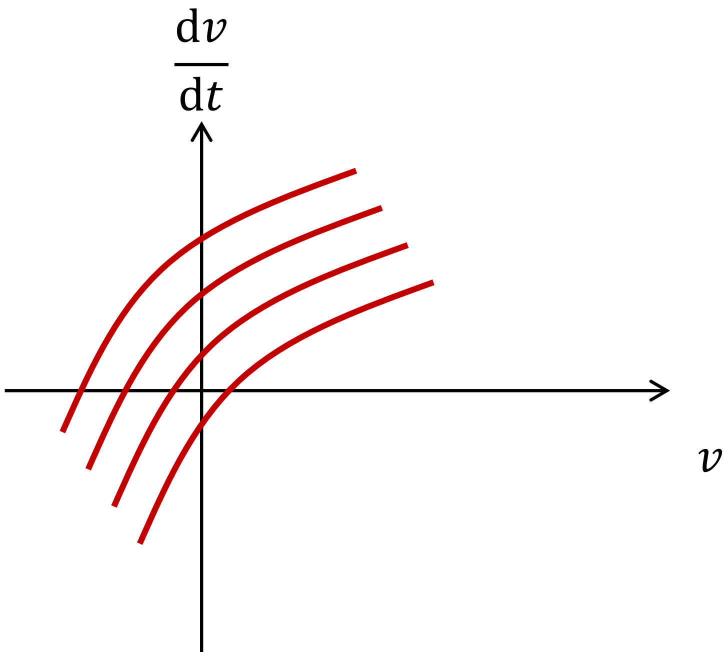
これは、1階のODE $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + u$ で、スカラーをベクトルに置き換えた形である。ある程度までスカラーの感覚で解の性質が想像できる。

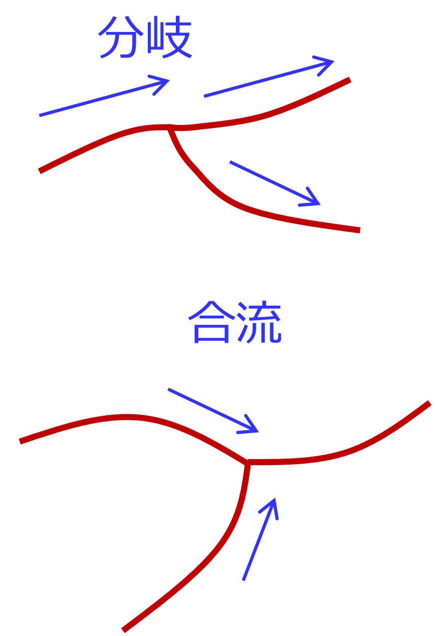
I_0とI_1に**初期値**を与えて数値積分すれば、任意の入力に対し解が求まる。

微分方程式の解の一意性について

一意性には、解をひとつ見つければ、他には探す必要がないというご利益がある。

相平面(一般には多次元)





ODEの解を、その導関数を縦軸にとった平面(相平面という)にプロットすると、時間を媒介変数とする開曲線が描ける。初期値を変えることで、何本もの開曲線が描ける。解曲線上の任意の点は、そこを初期値とするODEの解である。

相平面は回路を考えるときにも活用できる。たとえばPLL動作を調べるときに有用である。

開曲線は一般には交わらない曲線群である。もし開曲線に分離や合流があると、その場所で解の一意性が崩れることになる。このようなことは滅多に起きない(と期待できる)のである。特に、定係数線形ODEでは発生しない。

反対に、どのような分岐や合流があるかを調べるとODEを特徴付けができる。

微分演算の固有関数

$x = \exp(s\ t)$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = s\ x$$

となる。線形演算で、関数の形が変わらず単に定数倍になる関数は特別である。演算子毎に定まって来るので、それを固有関数(eigenfunction)と呼ぶ。また、その固有関数に対応する定数を固有値(eigenvalue)と呼ぶ。指数関数は微分演算の固有関数なのである。

固有関数から作った線形和 $x = h_1 \exp(s_1 t) + h_2 \exp(s_2 t)$を、微分の線形結合

$$a\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\ t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cx$$

微分演算子Dを用いると形式的に$(aD^2 + bD + c)x$とも書ける。

に代入すると、

$$(a{s_1}^2 + bs_1 + c)h_1\exp(s_1 t) + (a{s_2}^2 + bs_2 + c)h_2\exp(s_2 t)$$

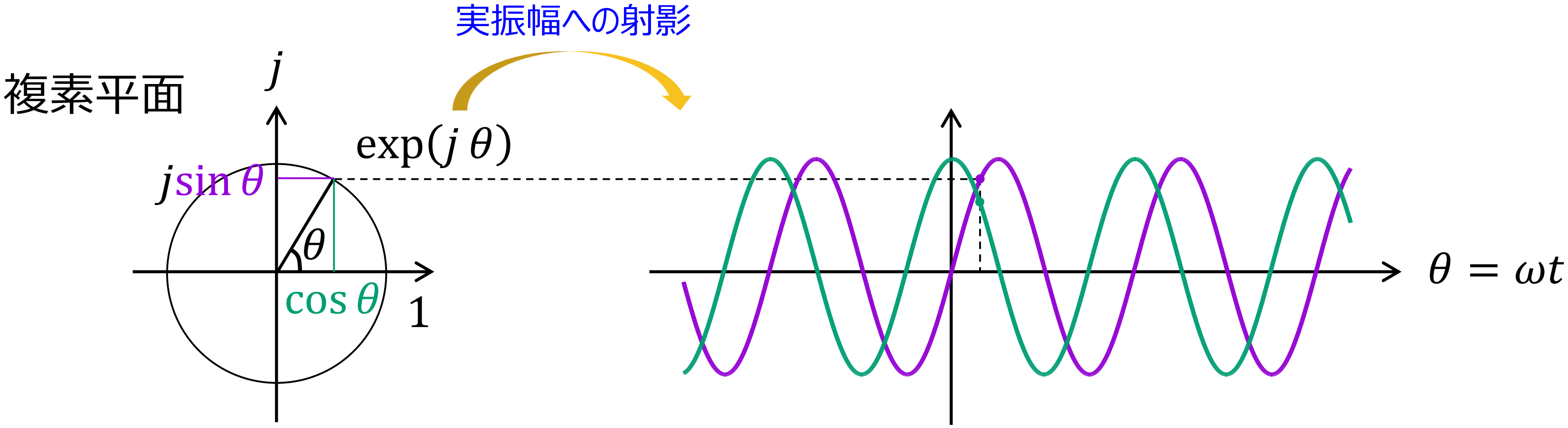
となる。これは、元関数の固有値は変えず、微分を固有値で置き換えた多項式を掛けた物である。固有関数の世界では、微分方程式が代数方程式に置き換わるのである。

指数関数のうち $s = j\omega$ と置いたものは回路論において更に特別な役割を果たす。
広く用いられている用語は見当たらないので、ここでは円関数と呼ぼう。
この固有値の虚部ωは角周波数と呼ばれることは既知であろう。

円関数$\exp(j\omega t)$について

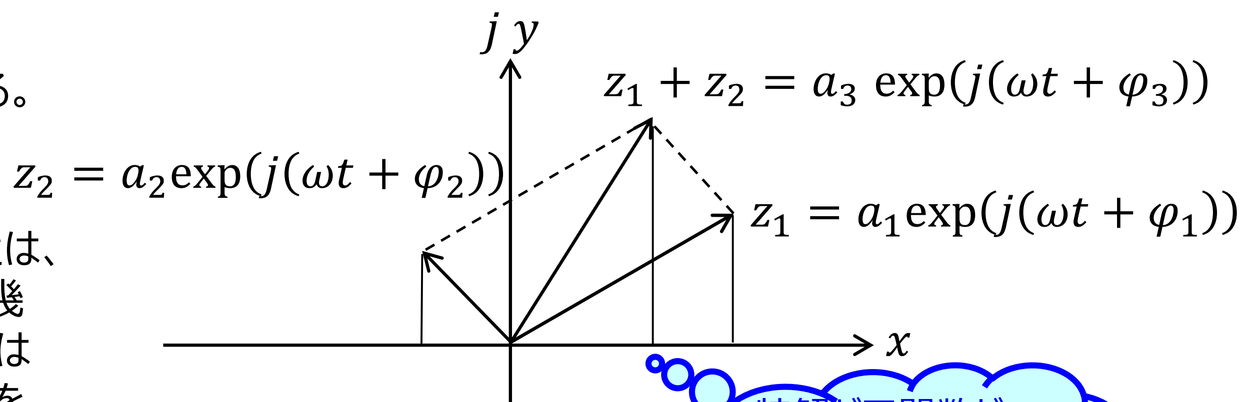
$$\exp(j\omega t) = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

関数$\exp(j\omega t)$は、複素平面上の単位円をぐるぐるまわる関数である。そこでこれを円関数と呼ぼう。円関数は、その虚部と実部がsinとcosで表される。それが有名なEulerの公式(関係式と呼ぶべきか)であるが、むしろsin,cosの定義と考える方が自然であろう。



単一周波数の信号は一般に、
$\exp(j\omega t)$の振幅と位相を調整して、
$z = a\exp\big(j(\omega t + \varphi)\big)$と表現される。
これも円関数と呼ぼう。

単一周波数の二つの信号を足すことは、複素平面ではベクトル和(複素和の幾何学的解釈)で表される。相対位置は変わらないので、$t = 0$に固定して図を描けば良い。



特解が円関数だとした場合の、ODEの各項の和を考えている。

交流理論

(1)式の解は、その実部も(1)式の解である。

LRCの直列回路の式

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{\int I\mathrm{d}t}{C}=\mathrm{V} \qquad (1)$$

で、$V=V_0\exp(j\omega t)$の場合を考える。解の電流を$I=I_0\exp(j\omega t)$として、これを(1)式に代入すると、

$$\left(j\omega L+R+\frac{1}{j\omega C}\right)I_0\exp(j\omega t)=V_0\exp(j\omega t)$$

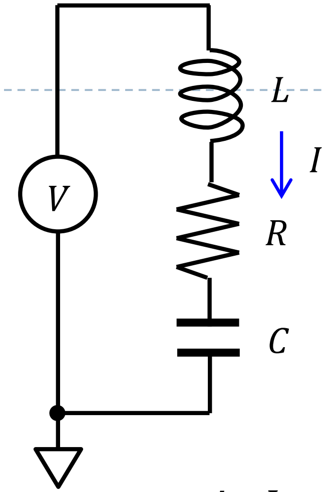
となる。これから

$$\left(j\omega L+R+\frac{1}{j\omega C}\right)I_0=V_0 \qquad (2)$$

が求まる。抵抗のOhmの法則と比べると、回路素子で

$$L\ \leftarrow j\omega L$$
$$C\ \leftarrow \frac{1}{j\omega C}$$

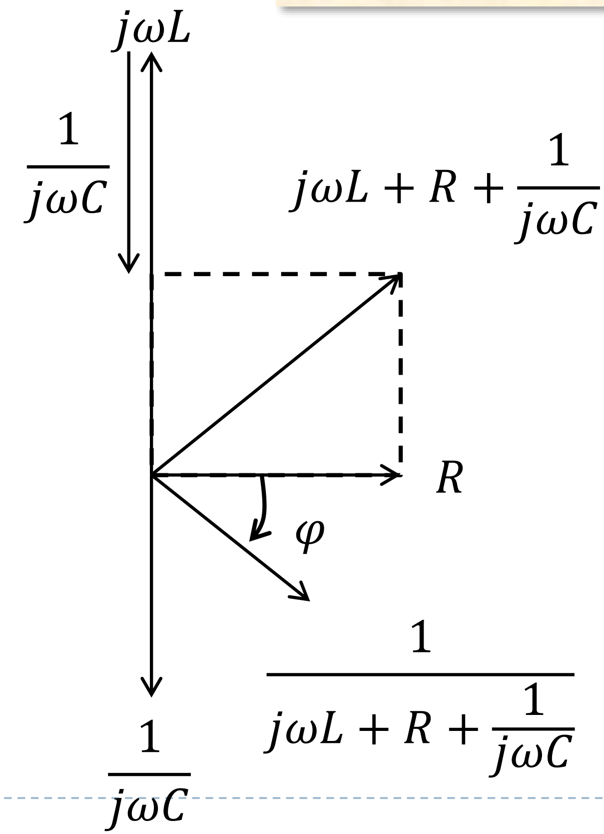
なる置き換えをしたものと同じであることが分かる。
(2)式の関係を複素平面で解釈すると右図になる。



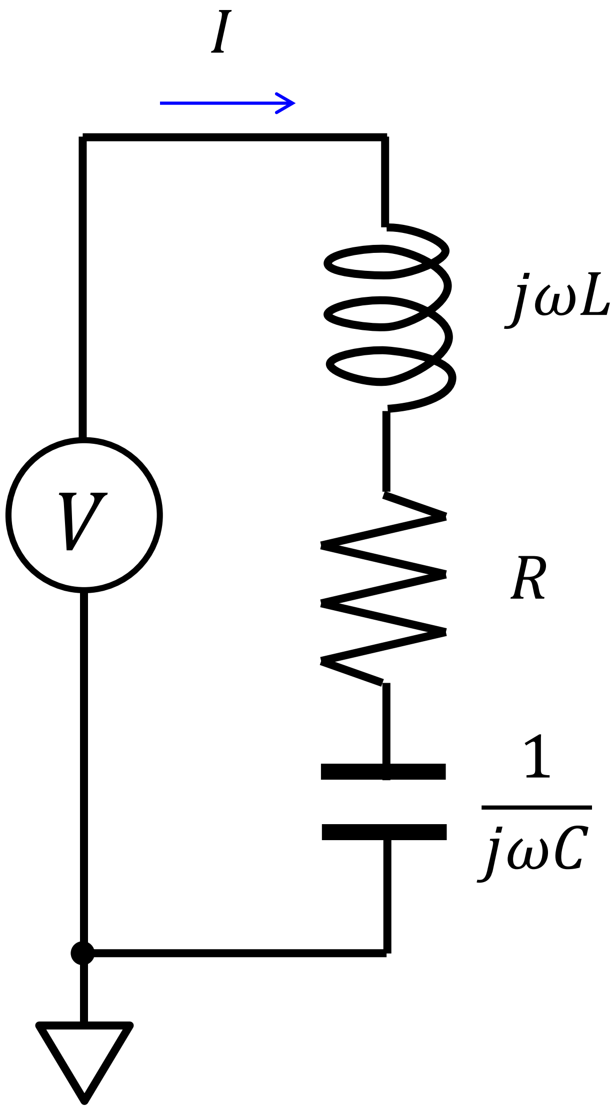
(1)式を微分演算子Dで表現すると

$$\left(LD+R+\frac{1}{CD}\right)I=V$$

となる。ここに$D=j\omega$の代入をすると(2)式になる。相違点として、微分演算子は可換ではない(右側に作用する)が、固定係数では見えてこない。
違う世界が、おなじ構造を持っているのだ。



Impedanceの概念



信号源を角周波数ωの円関数に限定すると、LやCを最初から $j\omega L$ や $\frac{1}{j\omega C}$ とおいて合成ブランチZを考えることができる。形式的に、時間導入前の合成抵抗と同じ計算ができる。例えば左図の直列抵抗は

$$Z = \frac{V}{I} = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}$$

と表される。このように複素数に拡張したブランチ特性(IV特性)を**インピーダンス**(impedance)という。単位は抵抗と同じΩであるが、角周波数(あるいは$\omega = 2\pi f$で表される周波数f)に依存する**複素数値**である。

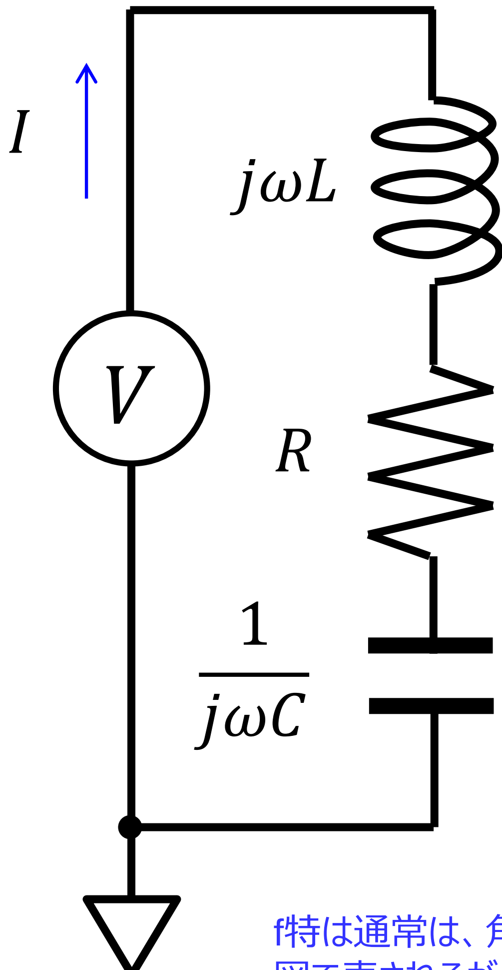
振幅と**位相**で捉えることも多い。
両方を自在に活用できるように
なって欲しい。

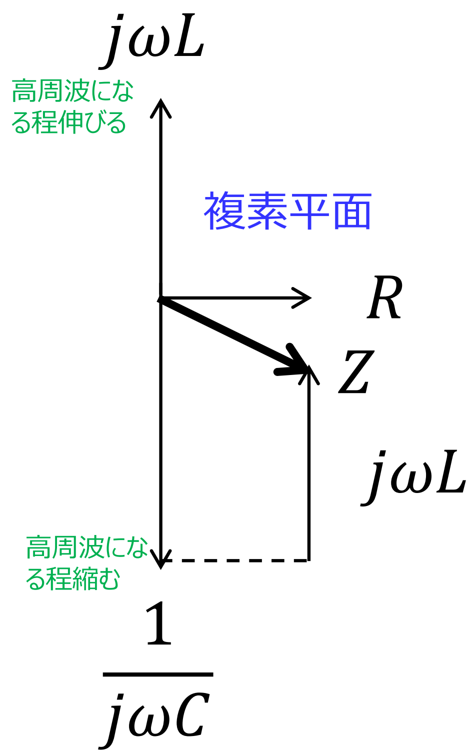
インピーダンスは便利な概念であるが、「固有関数に対する特性多項式※を計算しているのだ」というのが大学レベルの理解であるべきだと思う。

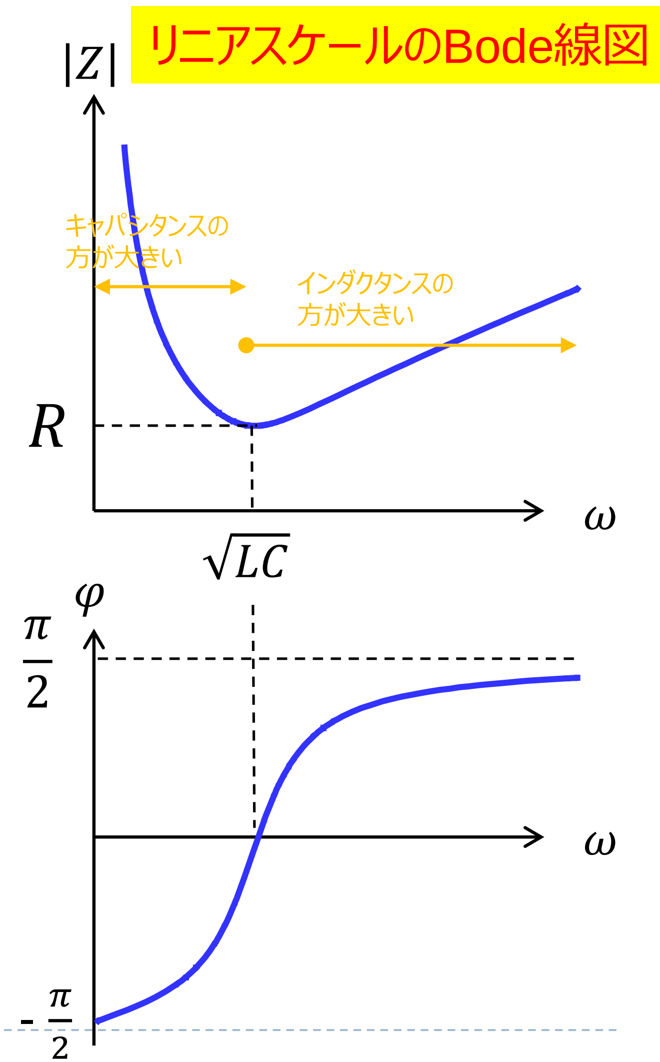
※適切な用語が見つからないので用語は多少濫用している。

Impedanceの周波数依存

ωを変えて行くとimpedanceの周波数依存が見える。例えば左下の直列回路でLの項とCの項はω依存が逆向きであるから、どこかの角周波数ωで$j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=0$が成り立つ筈である。それは $\omega^2=1/LC$の時で、$|Z|$は最小値$Z=R$をとる。





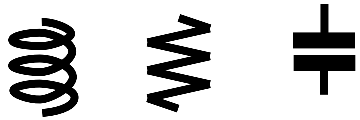


f特は通常は、角周波数が対数、振幅はdBのBode線図で表されるが、右図は全てリニア表現である。どちらの表記にも慣れることをお勧めする。

可換な図式 of alternating currents

角周波数ωを持つ円関数に対する図式

ブランチ特性



$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ R $\frac{\int \mathrm{d}t}{C}$

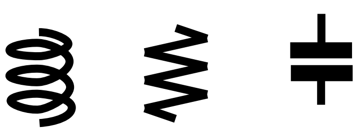
Kirchhoff's law

回路ネットワーク

微分形式の
回路方程式(ODE)

Eigenvalue

Eigenvalue



$j\omega L$ R $\frac{1}{j\omega C}$

Kirchhoff's law

代数形式の
回路方程式
(algebraic equation)

インピーダンス関連用語集

impedance　$Z = R + jX$

　resistance　R

　reactance　X

admittance　$Y = {}^{1}/_{Z} = G + jB$

　conductance　G

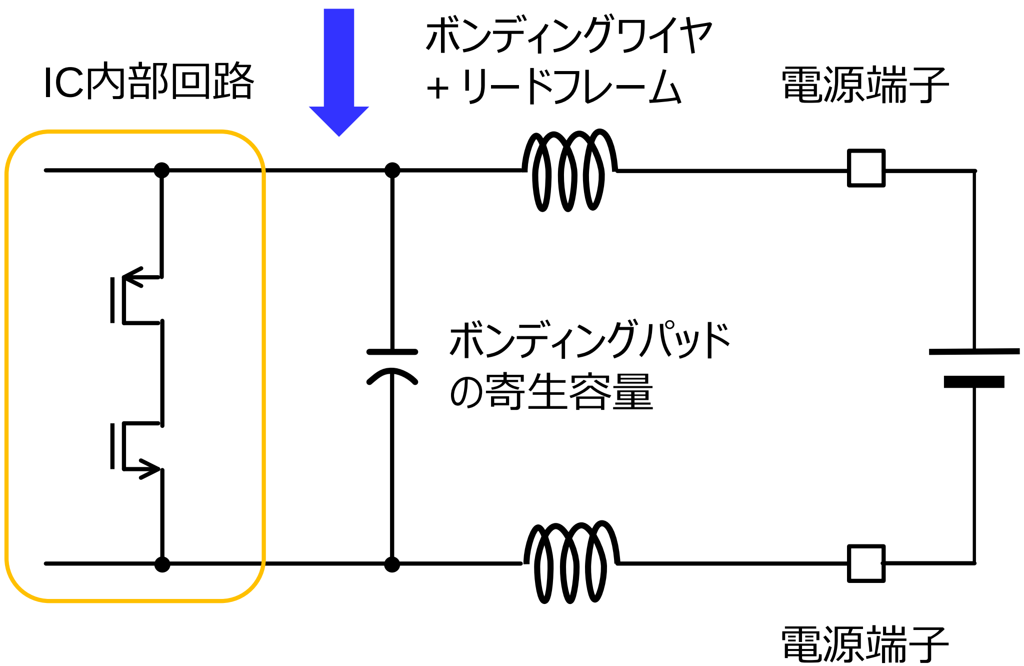
　susceptance　B

素子	ブランチ特性	記号
抵抗(resister)	resistance	R
容量(capacitor)	capacitance	C
コイル(inductor)	inductance	L

immittance: impedanceとadmittanceの総称

パッケージ共振

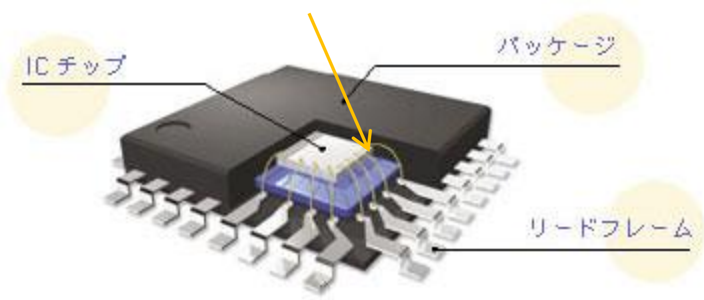
LC並列共振回路(タンク回路)



矢印の点から見ると、IC内部回路もざっくり容量に見える。ボンディングパッドの寄生容量と合わせたキャパシタンスが$\frac{1}{j\omega C}$になるとする。

ICと基板との接続には、ボンディングワイヤやリードフレームがあり、これがインダクタに見える。
(基板上には図示していないデカップリングコンデンサがあるが、パッケージ共振周波数では殆どインダクタになっている。)
合計のインダクタンスが$j\omega L$になるとする。

ボンディングワイヤ



http://resource.renesas.com/resource/lib/jpn/fab/index.html

矢印の点から見たインピーダンスは、キャパシタとインダクタの並列回路である。そのインピーダンスは、$Z = \frac{1}{j\omega C+\frac{1}{j\omega L}} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$となる。

実際にも、共振周波数で巨大な電源揺れが観測され、問題となる。

4.2 円関数から周期関数へ

Fourier級数展開

回路の駆動信号$u(t)$が周期Tの波形である場合、$u(t)$は下記の固有関数展開を持つ。

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(j2\pi kt/T)$$

周期関数のこのような展開を**Fourier級数展開**という。線形ODEの円関数駆動に関しては同じ固有値を持つ円関数解が求まるから、Fourier級数展開を用いると、任意の周期関数に対する級数解が求まることになる。

円関数系には次の驚くべき特性がある。これを**直交性**と呼び、固有関数族に広く成り立つ特性である。

$$\int_0^T \exp(j2\pi kt/T)\exp(-j2\pi lt/T)dt = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq l \\ T & \text{if } k = l \end{cases}$$

直交関数による展開では、係数a_kは

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\exp(-j2\pi kt/T)dt$$

なる表現を持つ。一般にkが0から正負に離れるにつれ(高周波になるほど) a_kの絶対値は小さくなる傾向にあるが、どこで展開を打ち切っても近似係数は変えなくても良いのである。対照的に、Tailor展開の場合は次数を上げると、すべての係数を変更する必要がある。

可換な図式

線形ODEを微分演算子Dの有理式$K(D)$を用いて

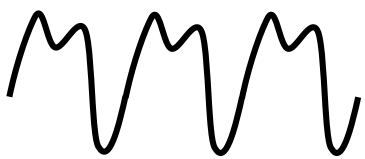
$$K(D)x = u$$

と表現すると、係数は

$$b_n = \frac{a_n}{K(j\omega n)}$$

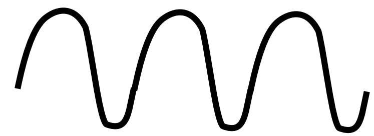
で与えられる。

周期関数



周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

ODEを解く



周期は同じく $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Fourier Expansion

Fourier Expansion

$$u = \sum_n a_n \exp(j\omega n t)$$

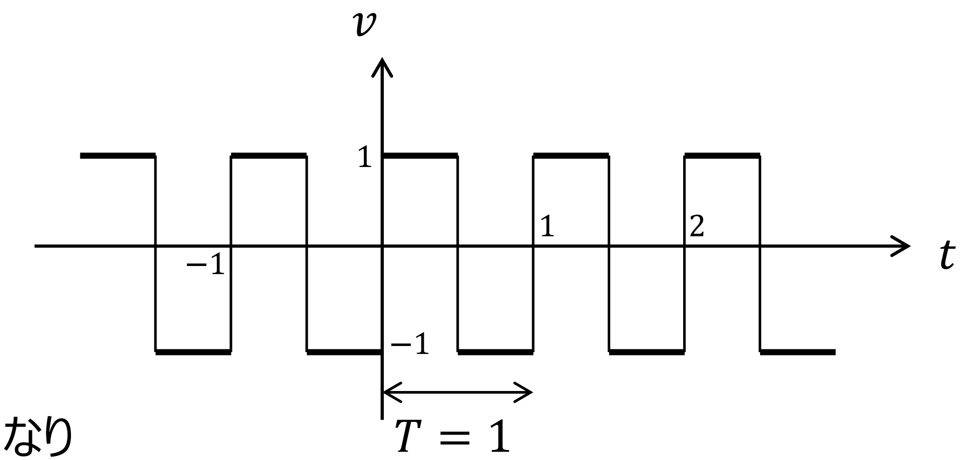
代数計算

$$x = \sum_n b_n \exp(j\omega n t)$$

厳密には両経路で、一般解分の違いが発生しうる。

矩形波のFourier級数展開(1)

右図に示される周期$T = 1$の矩形波のFourier級数展開を計算してみよう。



電気信号を考えるときは、無限に繰り返すというイメージが強いが、数学的には周期関数とは、その周期内でのみ定義された関数と考える方が自然である。

右の矩形波の場合、簡単な区間積分になり

$$a_k = \int_0^{0.5} \exp(-j2\pi kt)dt - \int_{0.5}^{1} \exp(-j2\pi kt)dt$$

$$= \frac{j\left(-1 + (-1)^k\right)}{k\pi}$$

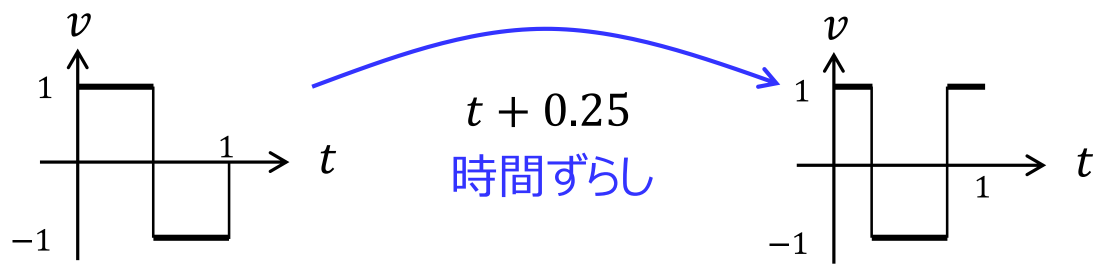
この結果を分かり易く表現すると、kの偶奇によってa_kが場合分けされ、

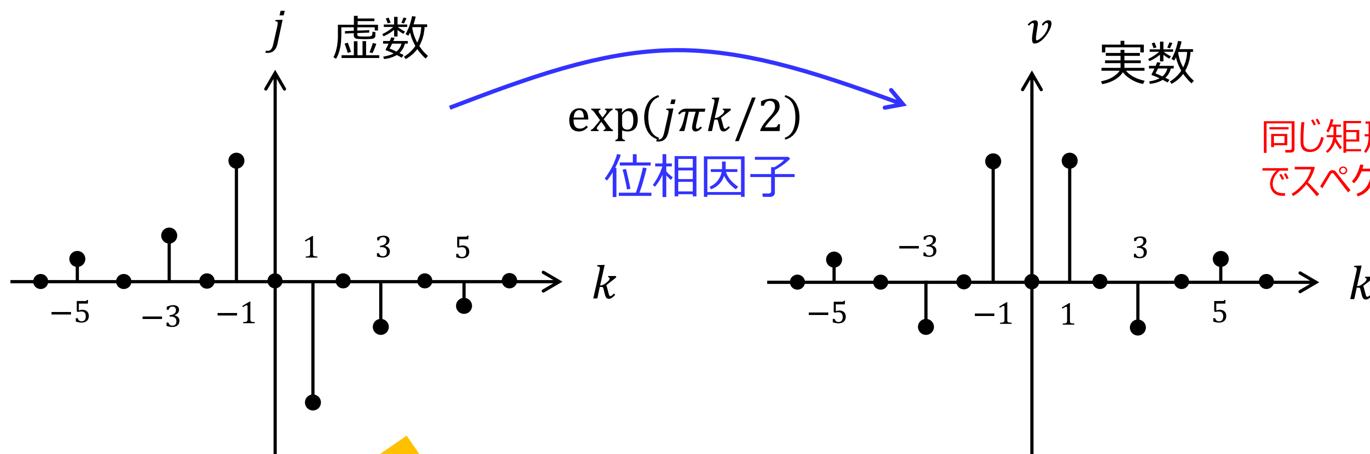
$$a_k = \begin{cases} 0 & k\text{が偶数} \\ j\dfrac{-2}{k\pi} & k\text{が奇数} \end{cases}$$

となる。

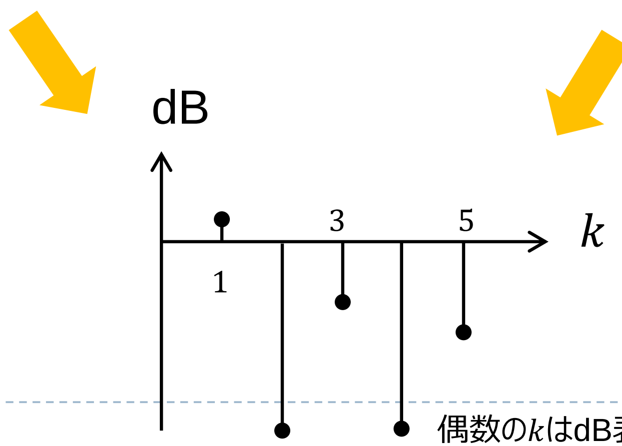
結果が純虚数になるのは、点対称な実関数で一般に成り立つ性質である。
実信号なのに、純虚数の係数が出て来るのは奇妙に思うかも知れないが、この一手間が料理をおいしくする秘訣だったりする。

矩形波のスペクトラム　Fourier展開の係数





同じ矩形波でも時間ずらしでスペクトラムが異なる。



良く用いられるのが、係数のパワー(絶対値の自乗, kは正に折り返し)をdB表示したものである。
位相因子に依らない結果が得られるが、kごとの違い(スペクトラム情報の半分)も失われてしまう。

偶数のkはdB表示ではレンジアウトする。

矩形波のFourier級数展開(2)

前述の矩形波では係数の点対称性 $a_k = -a_{-k}$ が成り立つので、Fourier級数からcos項が消える。多少端折って計算すると、

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(j2\pi kt)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2j\, a_k \sin(2\pi kt)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2\pi(2n-1)t)$$

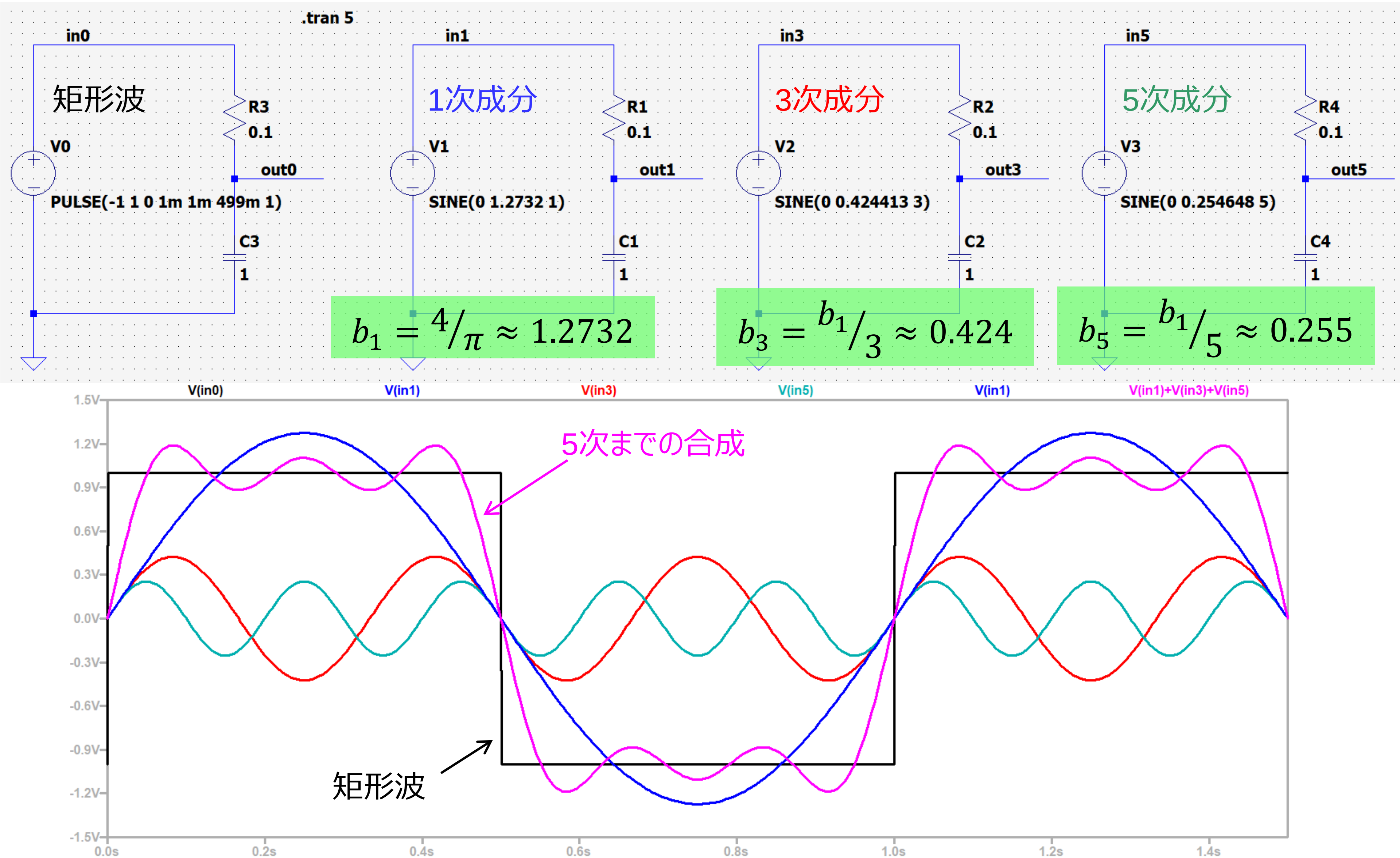
最初のいくつかの係数

$$\frac{4}{\pi}, \frac{4}{3\pi}, \frac{4}{5\pi}, \cdots$$

無事、実数値になる展開式が得られた。
この結果を電気屋は『矩形波は奇数次の高調波成分のみを持つ』と解釈する。
$k = 2n - 1$である。

ここで負の周波数が消える代わりに、係数が2倍になっていることに注意しよう。
殆どの文献や教科書、さらには測定器においても、この流儀(負の周波数は用いない流儀)が採用されている。Fourier展開を実数の範囲で閉じているうちはそれで良いのだが、その習慣が、逆に多くの誤解を生み出している。

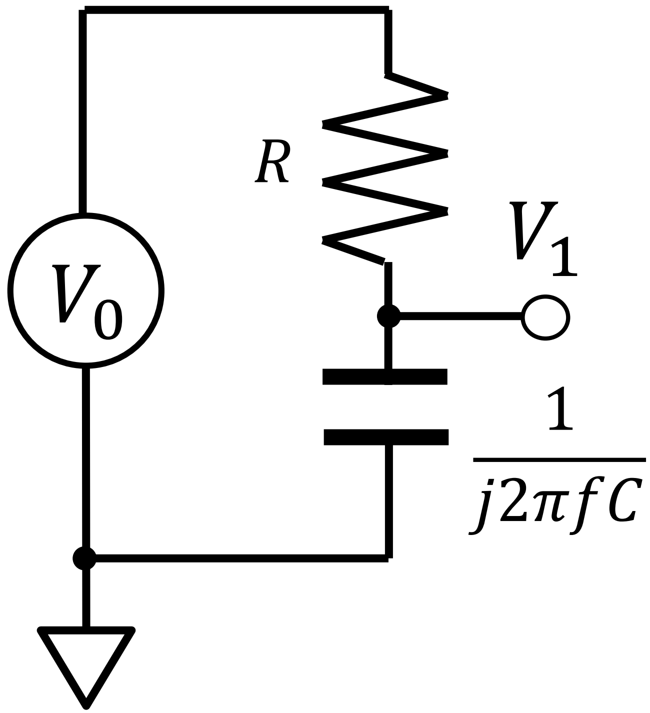
矩形波展開の合成



c.f. Gibbsの現象

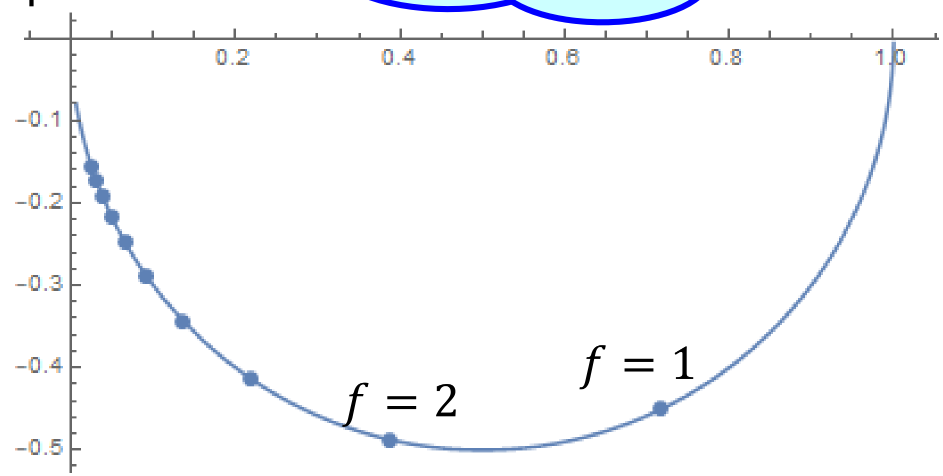
1次LPFの伝達特性

BodeにしろNyquistにしろ、
交流理論でのプロットだ。



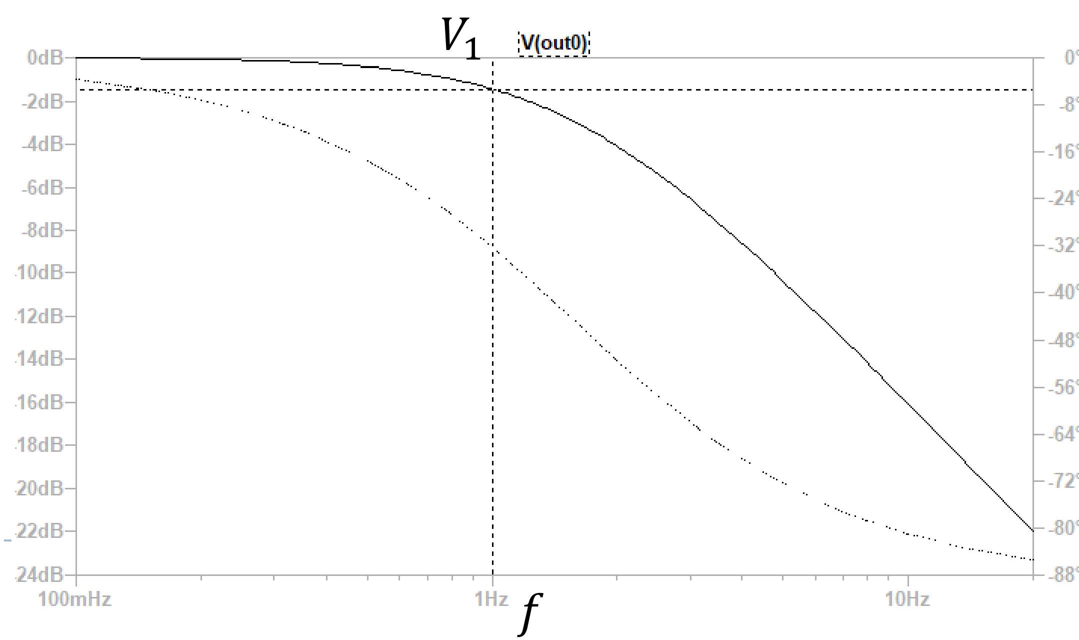
Nyquist Plot

LPF1_nyq.nb



Bode Plot

LPF1_bode.asc

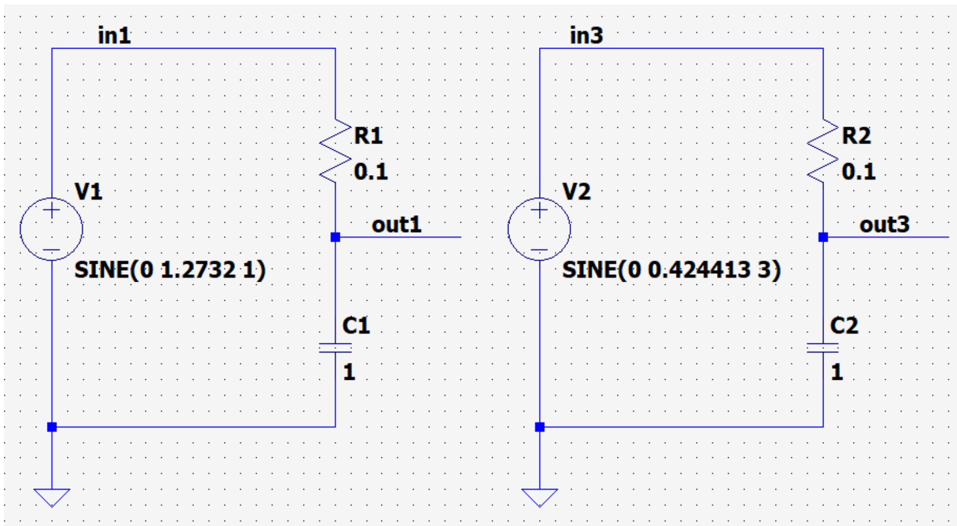


$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{1}{1 + j2\pi fCR}$$

$\omega = 2\pi f$

右図は$R = 0.1, C = 1$でプロット

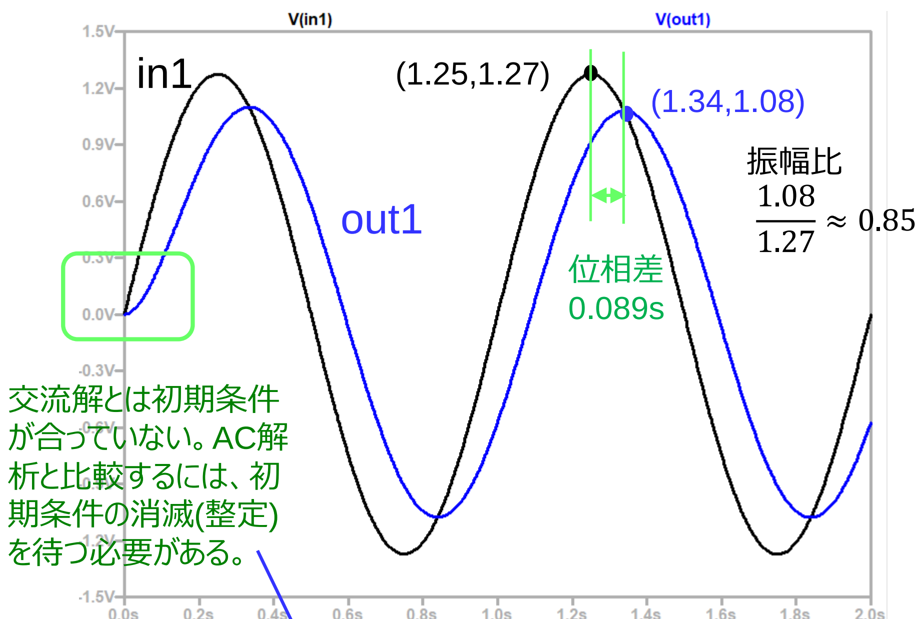
正弦波のLPF出力

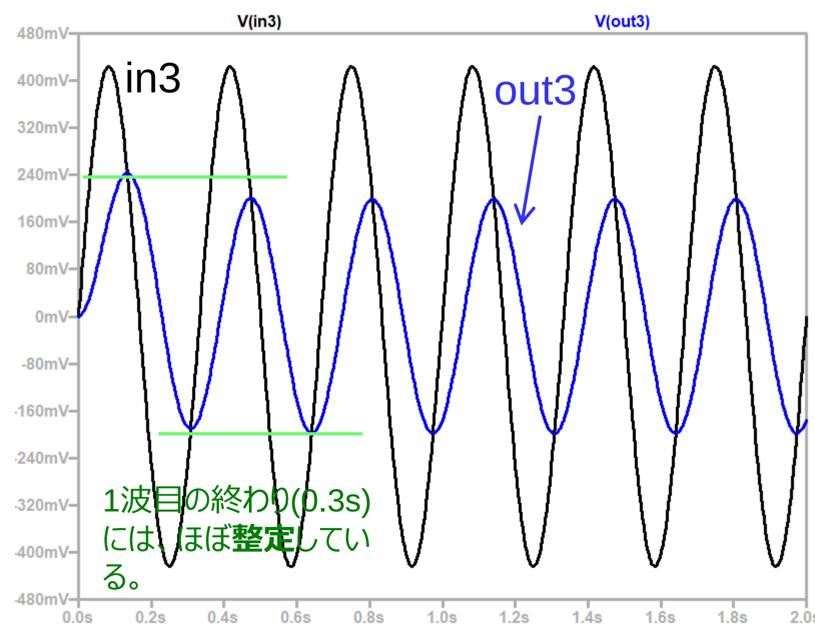


$f = 1\mathrm{Hz}$における出力は

$$\left|\frac{1}{1 + j2\pi fRC}\right| = \left|\frac{1}{1 + j2\pi 0.1}\right|$$
$$\approx 0.8467\exp(-j2\pi 0.089)$$

従って、1Hzの正弦波成分は0.85倍され、位相は時間換算で0.089s遅れる筈である。
3Hz成分も、同様に減衰と遅延が計算できる。

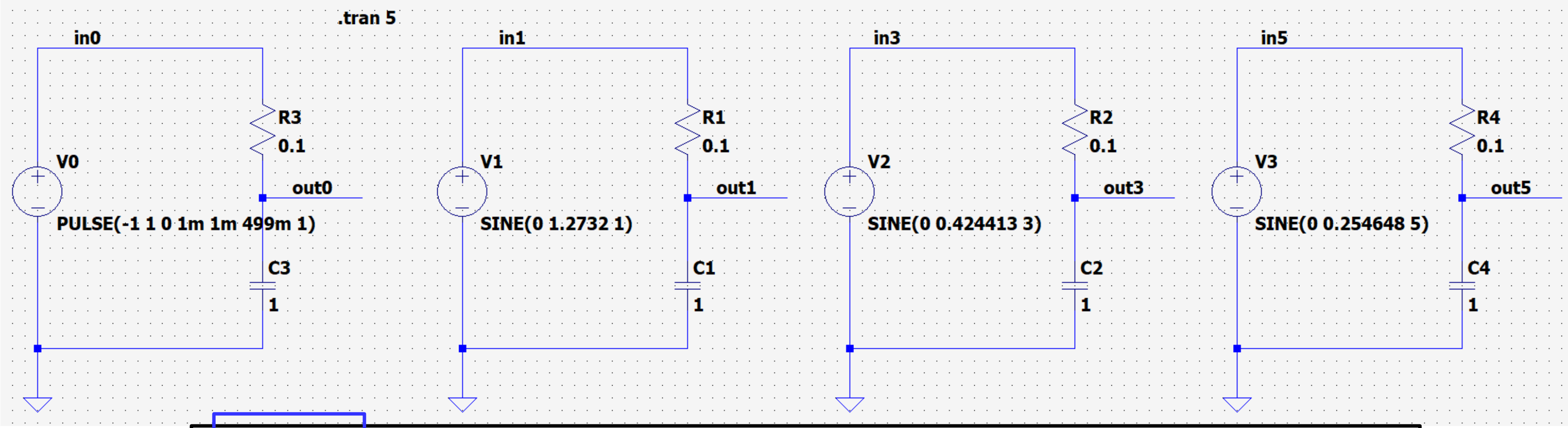




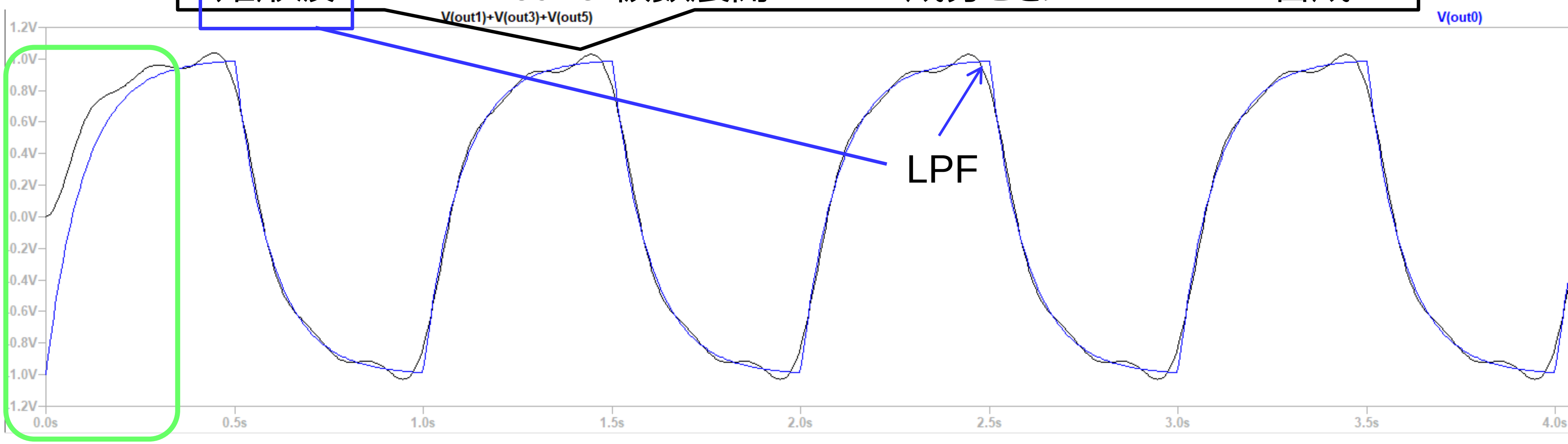
周期解と初期条件を合わせる手法も存在する。(c.f. SpectreRF)

矩形波による1次LPFの駆動

LPF1_recwv_expansion.asc



矩形波 ⟶ Fourier級数展開 ⟶ 成分ごとにLPF ⟶ 合成



整定前は、原理的に一致しない。

展開の項数を増やしてゆくと、両者はいくらでも近づく
@ t ⟶ ∞

Parseval等式 (Parseval's identity)

直交関数展開では一般に、Besselの不等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} {a_k}^2$$

が成り立つ。等号は、固有関数系が完備(complete)という特別な性質を持つときに成り立つ。これをParseval等式と呼ぶ。

幸いにも円関数系は完備である。回路屋にとってParseval等式は、時間軸での波形と周波数軸でスペクトラムが、等しいエネルギーを持つという納得しやすい命題である。

Parseval等式は(電気の世界では今の所)殆ど知られていないが、その効用には驚異的なものがある。

4.3 周期関数から任意関数へ

積分変換

周期的でない信号を扱う手法に積分変換がある。これは核と呼ばれる2変数関数$K(t,s)$と積分を使って独立変数を置き換える手法である。当然、線形変換である。

$$V(s)=\int_a^b v(t)K(t,s)\mathrm{dt}$$

積分変換をODEに用いるのに便利な核は、部分積分の公式を参照して

$$\int_a^b \frac{dv(t)}{dt}K(t,s)\mathrm{dt}=[v(t)K(t,s)]_a{}^b-\int_a^b v(t)\frac{dK(t,s)}{dt}\mathrm{dt}$$

そこで、Kがtの指数関数なら、微分の積分変換が(第一項を無視すると)定数倍になるので都合が良さげである。
良く用いられる積分変換に下記の二つがあることは既習であろう。

$$V(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\exp(-j\omega t)\mathrm{dt}$$ ---------- Fourier変換

$$V(s)=\int_0^{\infty} v(t)\exp(-s\ t)\mathrm{dt}$$ ---------- Laplace変換

Fourier変換

Fourier変換もLaplace変換も、本来似たようなものであろう。しかし実際の使われ方として、Laplace変換が変換表を用いて過渡解析に多用されているのに対し、Fourier変換は定義式に従い実際に積分を計算することが多いという用途の違いがある。

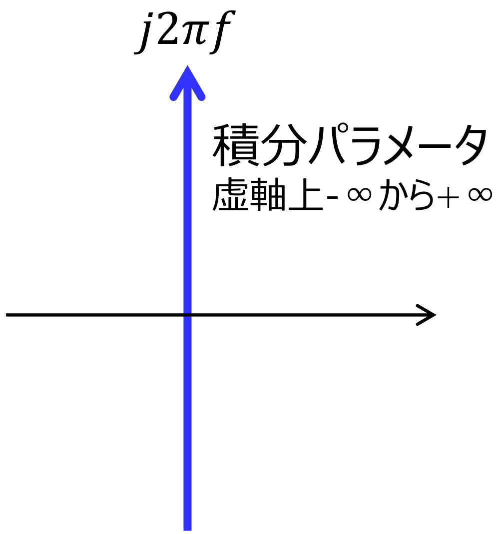
Fourier変換の定義式を前頁の角周波数から周波数に変えて

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\exp(-j2\pi f t)\mathrm{dt}$$

とおくと、逆変換が

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)\exp(j2\pi f t)\mathrm{d}f$$

となり、対称性が良い。



Fourier変換には無限の過去から無限の未来まで積分するので、「現在」という時刻に捕らわれない便利さがある。もう少し淡白に言うと、時間ずらしで積分範囲が変わらない。
(片側)Laplace変換では$t = 0$に特別な意味が与えられている面倒さがあるが、代わりに初期値問題(≒過渡現象)を扱えるメリットがある。

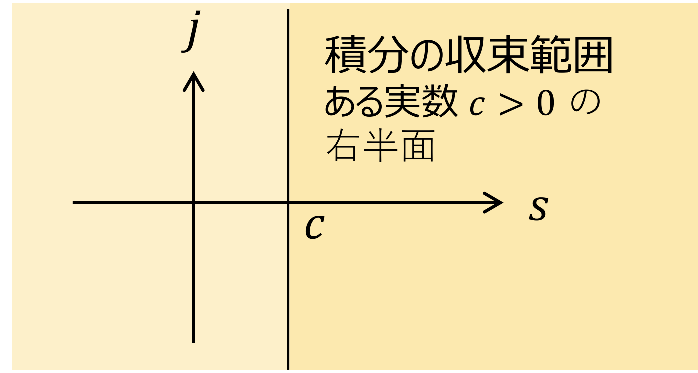
Laplace変換

Laplace変換
も線形

Laplace変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} \mathrm{d}t$$

積分パラメータsの値域：全複素平面



をLCR直列回路のODEに適用してみる。

$$\mathcal{L}\left[L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right]$$

Laplace変換は線形であり、また微分はs倍で置き換わり初期値項が出て来る。

$$\left(s^2 L + sR + \frac{1}{C}\right)\mathcal{L}[I] - \left(L\left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_0 + (sL + R)I_0\right) = s\mathcal{L}[V]$$

初期値記号の代用
PowerPointで上手く入力できなかったので。

ここで左辺第2項が初期値項である。どのみちこれが0になるとすると、最初から

$$\left(s^2 L + sR + \frac{1}{C}\right)\mathcal{L}[I] = s\mathcal{L}[V]$$

を扱っても良さげである。

同型対応(isomorphism)の例

操作される対象と操作を組みにして捉えないと、正確な対応はイメージできないが、ざっくり住む世界が変わると、違う演算が対応するように見える。それを図示して下や右のような感じで捉えることは有用であろう。

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

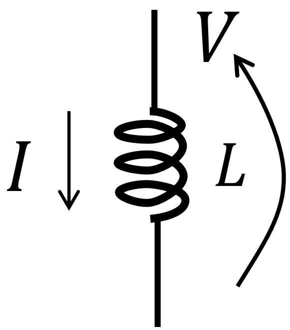
$$\begin{tikzcd} u(t) \arrow[r, "\text{convolution}"] \arrow[d, "\text{Fourier Transform}"'] & v(t) \\ U(f) \arrow[r, "\times", "U(f)H(f)"'] & V(f) \arrow[u, "\text{Inverse Fourier Transform}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\log"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[r, "+"] & \mathbb{R} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

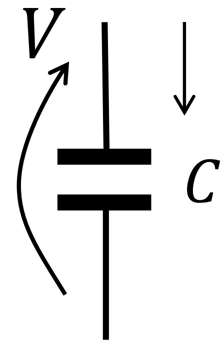
Laplace変換でもFourier変換と同様の同型対応が成り立つ。この関係を離散化すると、母関数の概念になる。並行して議論できる性質も多い。(メタ同型?)

ブランチごとのLaplace変換

Laplace変換をインダクタブランチと容量ブランチに適用すると、良く知られている公式から、

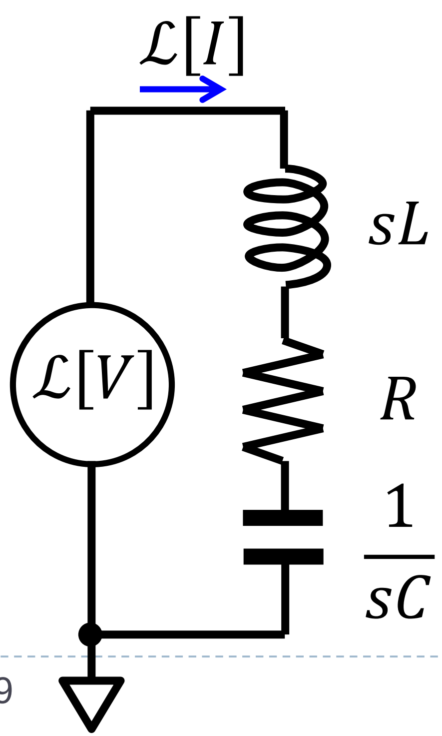


$$\mathcal{L}[V] = \mathcal{L}\left[L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right]$$
$$= sL\mathcal{L}[I] - LI_0$$



$$\mathcal{L}[I] = \mathcal{L}\left[C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right]$$
$$= sC\mathcal{L}[V] - CV_0$$

それぞれ初期値を与えないとKirchhoffの法則が成り立たないが、初期値はそのうち消滅するとしよう。



Laplace変換結果にKirchhoffの法則を適用すると、左図のLCR回路は

$$\left(sL + R + \frac{1}{sC}\right)\mathcal{L}[I] = \mathcal{L}[V]$$

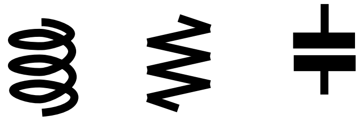
両辺にsを掛けると、

$$\left(s^2L + sR + \frac{1}{C}\right)\mathcal{L}[I] = s\mathcal{L}[V]$$

と、ODEのLaplace変換と同じ結果になる。

可換な図式 of Laplace transform

ブランチ特性



$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \qquad R \qquad \frac{\int \mathrm{d}t}{C}$$

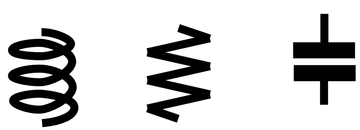
Kirchhoff's law

回路ネットワーク

微分形式の
回路方程式(ODE)

Laplace
Transform

Laplace
Transform

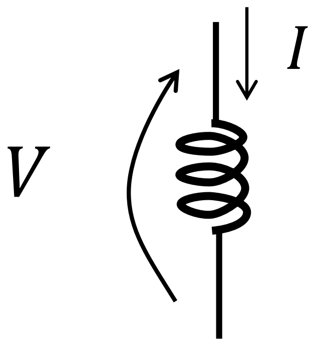


$$sL \qquad R \qquad \frac{1}{sC}$$

Kirchhoff's law

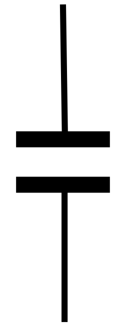
代数形式の
回路方程式
(algebraic equation)

Laplace変換と交流理論の形式対応



複素インダクタ　$j\omega L$

Laplaceインダクタ　sL



複素キャパシタ　$\dfrac{1}{j\omega C}$

Laplaceキャパシタ　$\dfrac{1}{sC}$

これらの比較から $s = j\omega$ の代入で、交流理論とLaplace変換が対応付けられる。
しかしLaplace変換の定義式

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} \mathrm{d}t$$

で例えば$f(t) = e^{j\omega_0 t}$なら、$s = j\omega$とすると、

$$\int_0^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{j(\omega_0 - \omega)t}}{j(\omega_0 - \omega)}\right]_0^{\infty}$$

となり、収束しない。両者の対応は、あくまで形式的なのである。

交流理論では$\exp(j\omega t)$に対し作用していたのに対し、Laplace変換では$\mathcal{L}[V]$等に作用しているという違いに注意しよう。

正弦波のFourier変換/Laplace変換

正弦波の積分変換を考えよう。下記不定積分

$$\int \sin(t)\exp(-\,s\,t)\mathrm{d}t = \frac{-\exp(-s\,t)(\cos(t) + s\sin(t))}{1+s^2}$$

をFourier展開の定義式に当てはめると、sが純虚数$j\omega$であるから、右辺は$t = -\infty$でも$t = -\infty$でも収束しない。
一方、Laplace変換の定義式からは、

$$\left[\frac{-\exp(-s\,t)(\cos(t) + s\sin(t))}{1+s^2}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{1+s^2}$$

という結果が得られる。すなわち、ざっくりと

正弦波はLaplace変換可能であるが、Fourier変換はできない、

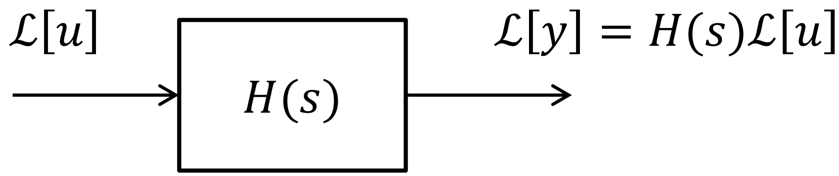
といわれる。ならば、

・Fourier変換でいう所の周波数とはなんだろうか?
・正弦波のLaplace変換では、周波数はどこに行ってしまったんだろうか?

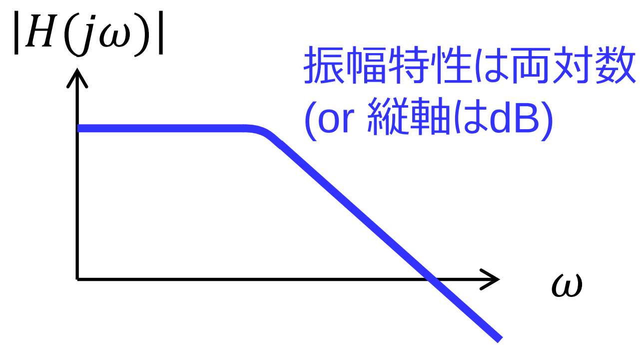
という素朴な疑問が湧いてくる。

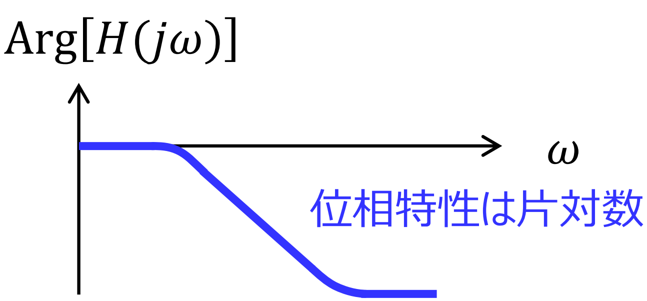
$s = j\omega$の代入

Laplace変換では、入出力のLaplace変換の比として伝達関数$H(s)$が語られる。

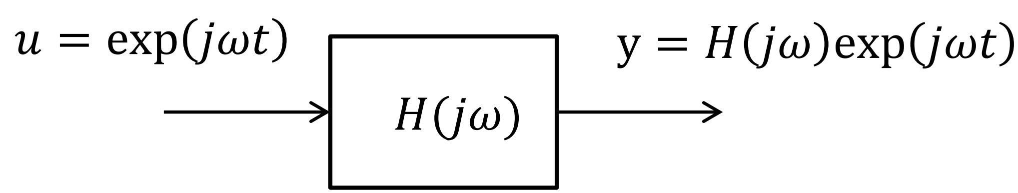


しかしこの$H(s)$に $s = j\omega$を代入して$H(j\omega)$と書き換えて、Bode線図を描くことにどのような正当性があるだろうか。この事実は、理論を基礎から再構築しなければ説明不能であろう。





これは、Laplace変換と交流理論の形式的対応を利用をしているのである。



pole(極)とzero(零)

分母分子が多
項式であるよう
な関数

これまで扱ったブランチから作られた回路では、伝達関数は有理関数となる。さらに言うと、我々が遭遇する電子回路では、多くの場合そうなる。これは全く自明ではない(と思う)が、まずは作業仮説としよう。

伝達関数$H(s)$の有理式は一般に

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n}$$

係数は全て実数
通常は$m < n$

と表される。素因数分解すると

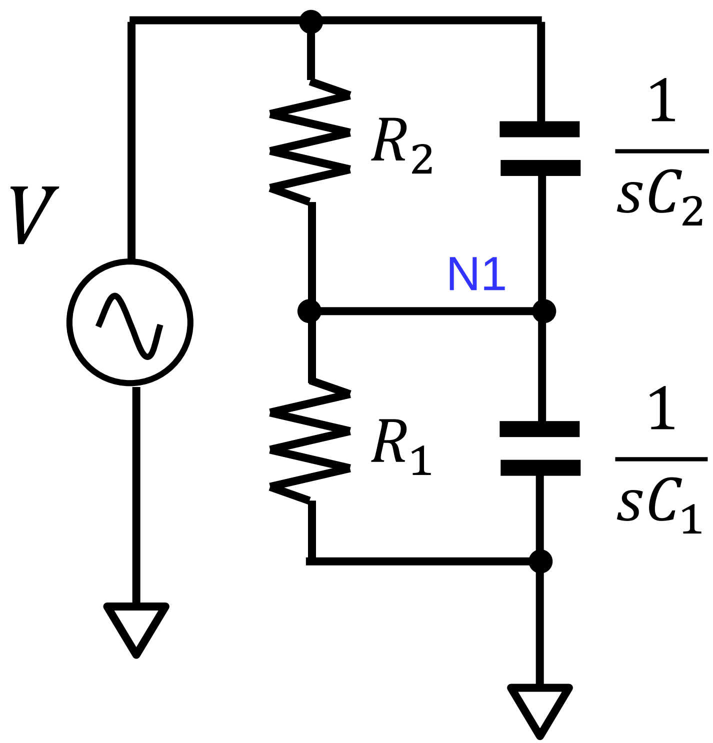
$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

となるとして、分母のp_iを極(pole)、分子のz_iを零(zero)という。これらは実数である場合と、共役な複素数の組みを持つ場合がある。共役な因子同士を掛け合わせると、実係数の2次式になるので、1次もしくは2次の実係数因子に分解されるとしても良い。(その方が、表記は面倒になる)

有理関数は極とゼロで決まるので、複素平面にこれらをプロットすると、色々な性質が見えて来る。(極ゼロプロット)

pzキャンセル

回路から作られた伝達関数で、分母と分子に同じ因子が出て来ると、約分ができる。
これをポールゼロキャンセルと呼んでいる。
とはいえ、係数が少しでも違っているとそんなことは出来ないので、殆どあり得ない状況と思うかも知れない。現実の素子がバラつくことを考えると尚更であろう。
ところがしばしば、そのような約分が有効なのである。



下のRC並列インピーダンスは、

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1}+sC_1}=\frac{R_1}{1+sC_1R_1}$$

である。これからノードN1の分圧は

$$\frac{\frac{R_1}{1+sC_1R_1}}{\frac{R_1}{1+sC_1R_1}+\frac{R_2}{1+sC_2R_2}}$$

$$=\frac{R_1+sC_2R_1R_2}{R_1+R_2+s(C_1+C_2)R_1R_2}$$

と表される。

pzキャンセルの続き

前ページの式を再掲する。

$$\frac{R_1 + sC_2R_1R_2}{R_1 + R_2 + s(C_1 + C_2)R_1R_2}$$

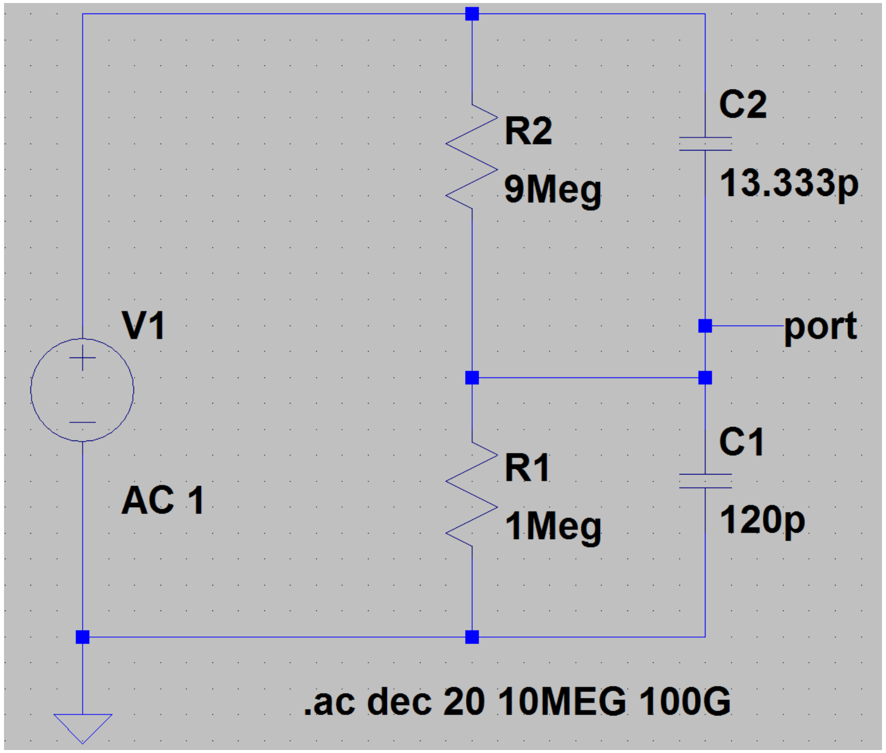
がf特を持たないためには、分母分子の係数がそれぞれ同じ比を持てば良い。すなわち

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{C_1 + C_2}{C_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{C_1}{C_2}$$

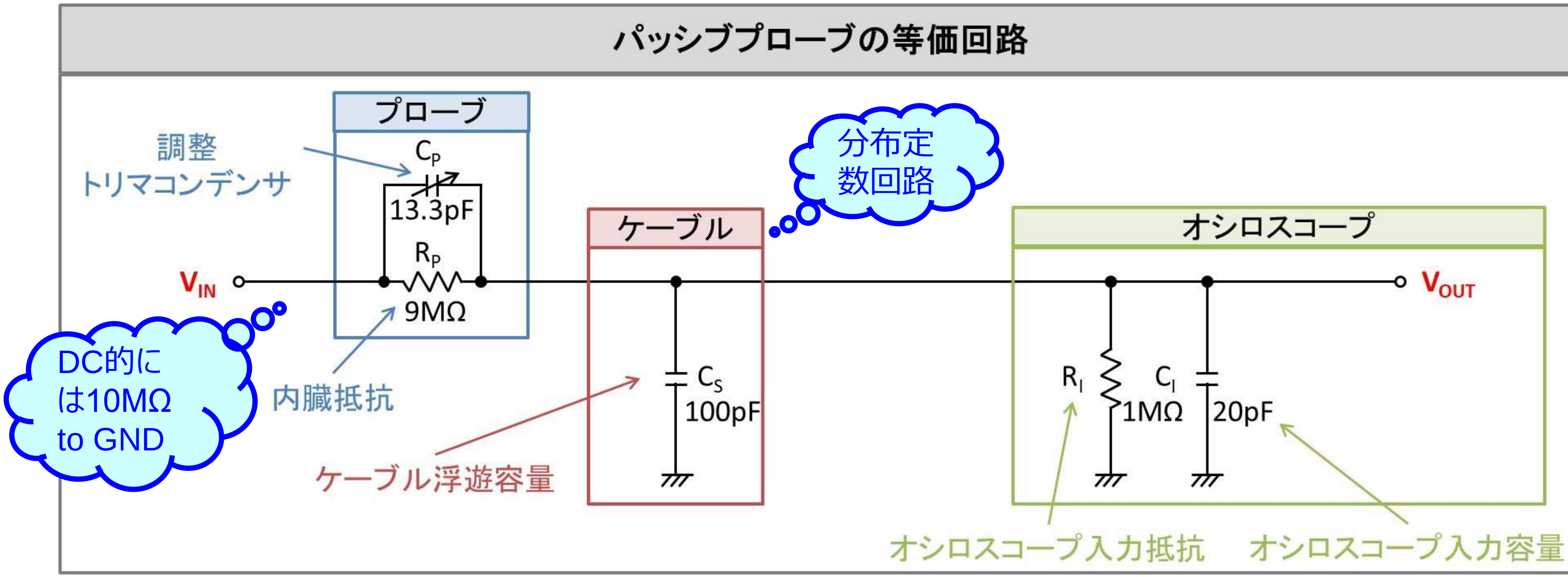
$$\therefore\ R_1C_1 = R_2C_2$$

数値例



結果は、上下の時定数を合わせれば良い、と解釈される。

10:1パッシブプローブ



https://detail-infomation.com/oscilloscope-calibration/

オシロのプローブは、PZキャンセルの手法が広く使われている例である。振幅が10:1に減少する代わりに、プローブ容量も約1/10に出来ている。もしオシロまで直結する(1:1プローブ)だと、ケーブルの100pFにも達する容量が被測定ノードにぶら下がることになる。

岩通 SS-0110

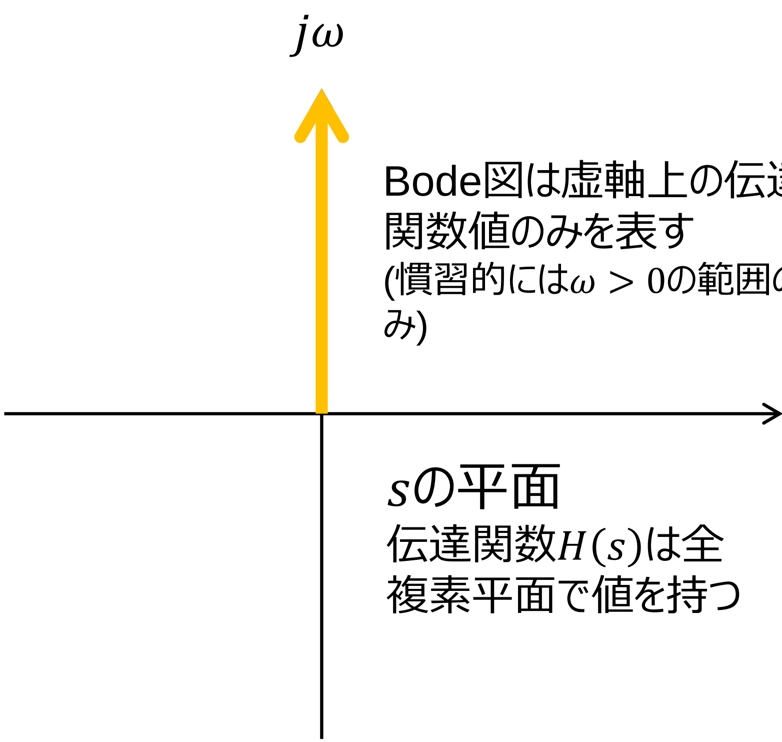
線形受動ブランチのまとめ

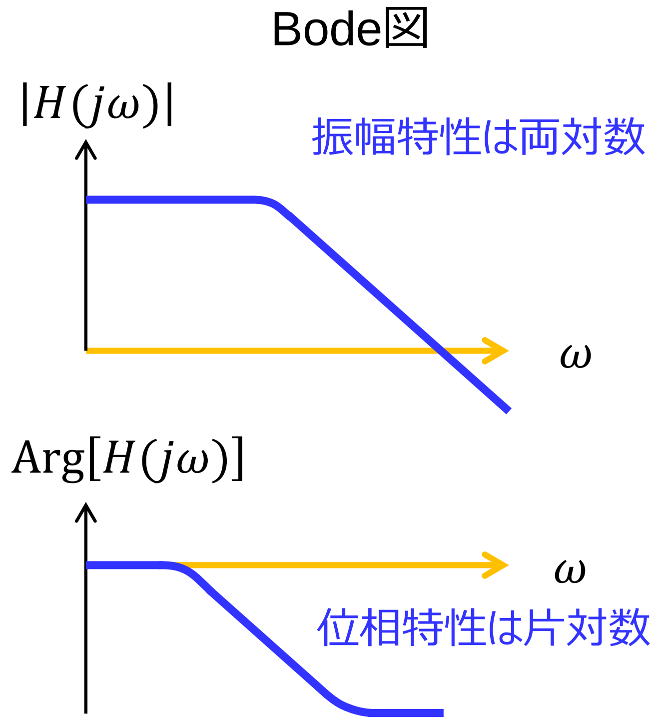
ブランチ名 Branch name	インダクタ Inductor	キャパシタ Capacitor	レジスター Resister	コンダクター Conductor
部品名	coil	condenser	resister	resister
ブランチ特性	inductance	capacitance	resistance	conductance
IV特性	$V = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$	$I = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$	$V = RI$	$I = \frac{1}{R}V$
変数名	L	C	R	G
単位	H (Ωs) Henry	F (s/Ω) Farad	Ω Ohm	S (1/Ω) Siemens
次元	Vs/A	As/V	V/A	A/V

$\sqrt{LC}$の次元は時間に、$\sqrt{L/_C}$の次元はΩになる。

Bode線図が同じなら伝達関数も同じか

伝達関数が式で与えられたとき、$s = j\omega$の代入で交流理論での周波数特性が得られる。
では、周波数特性から伝達関数は一意に決まるのであろうか?



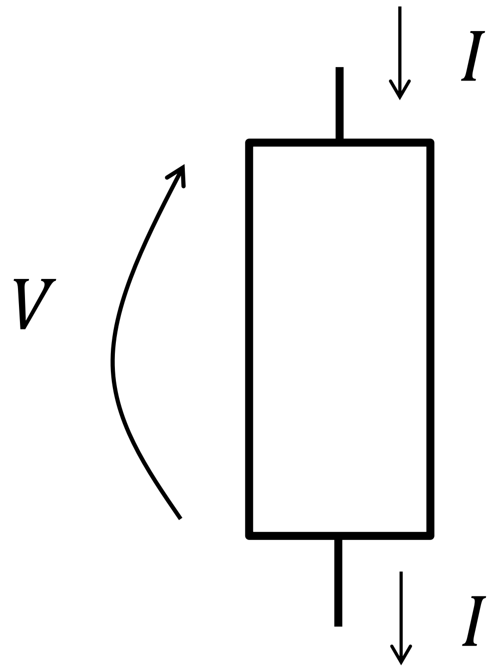


⇒ 複素関数論に「一致の定理」がある。

問題: Bode線図が同じなら、任意波形の応答も同じか?

無駄時間コンダクタンス

時間の概念が導入されれば、微分とは毛色の違う時間依存素子が考えられる。
そのひとつが、現在の電流が過去の電圧によって決まる無駄時間コンダクタンスである。
(普段は無駄時間抵抗という名称で呼んでいる。)

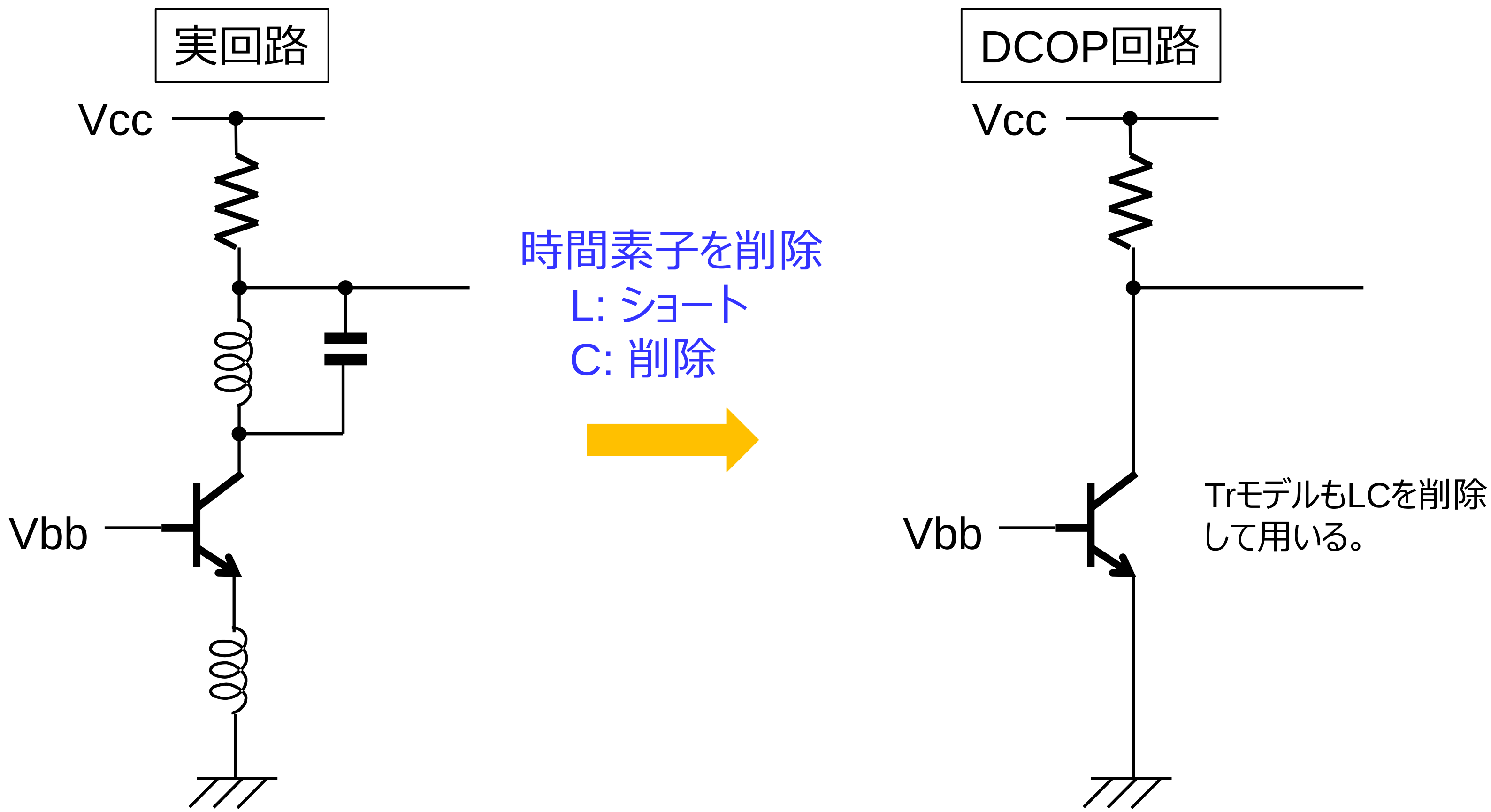


$$\boxed{I(t) = GV(t-\tau)}$$

これも線形素子に違いないが、波形歪を引き起こす。このような時間歪が無視できない状況も多いと思うが不思議なことに、歪機構というと非線形性によるものしか考慮しないことが殆どである。
この素子は発振器として用いることができる。他にも応用があると思う。

$t < 0$以前

Big Bangの前の宇宙はどうであったかは、見るからに深遠な疑問である。
Laplace変換で我々は$t \geq 0$の世界を考えられるようになった。
交流理論なら$t < 0$の世界を扱うことも容易い。Fourier変換では負の周波数すら自然である。
しかし、時間が始まる前の世界を考えることも、現実問題である。Cadence用語ではDCOPという。

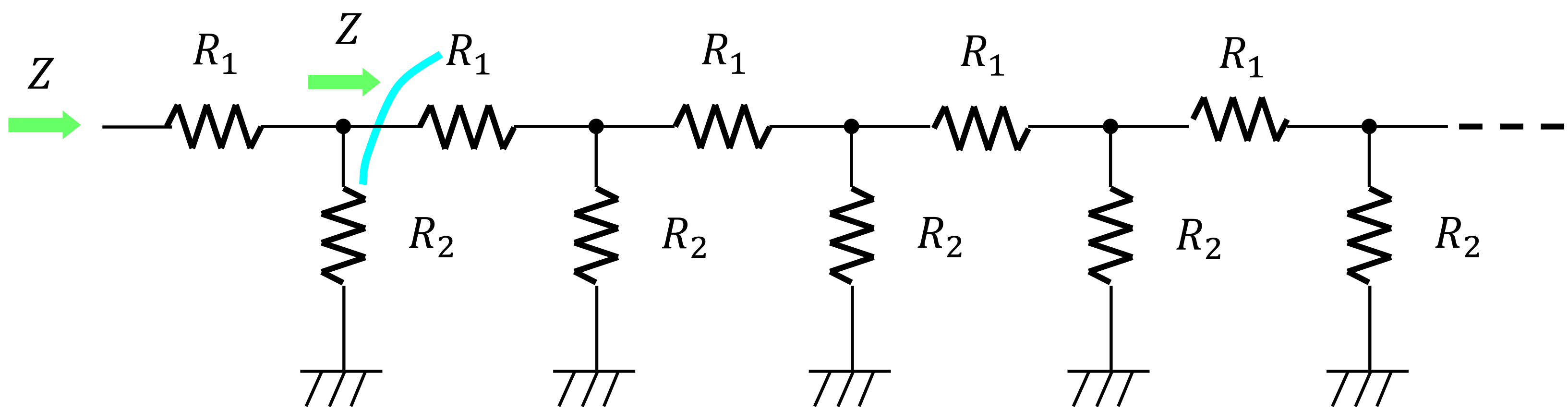


transient解析に先立ち、各ノードの電位(動作点)を決める。

第5章 空間の導入

までは遠い、という話

半無限ラダーの抵抗値



無限の性質から、左端にR_1R_2回路を1段追加してもZになる。すなわち、

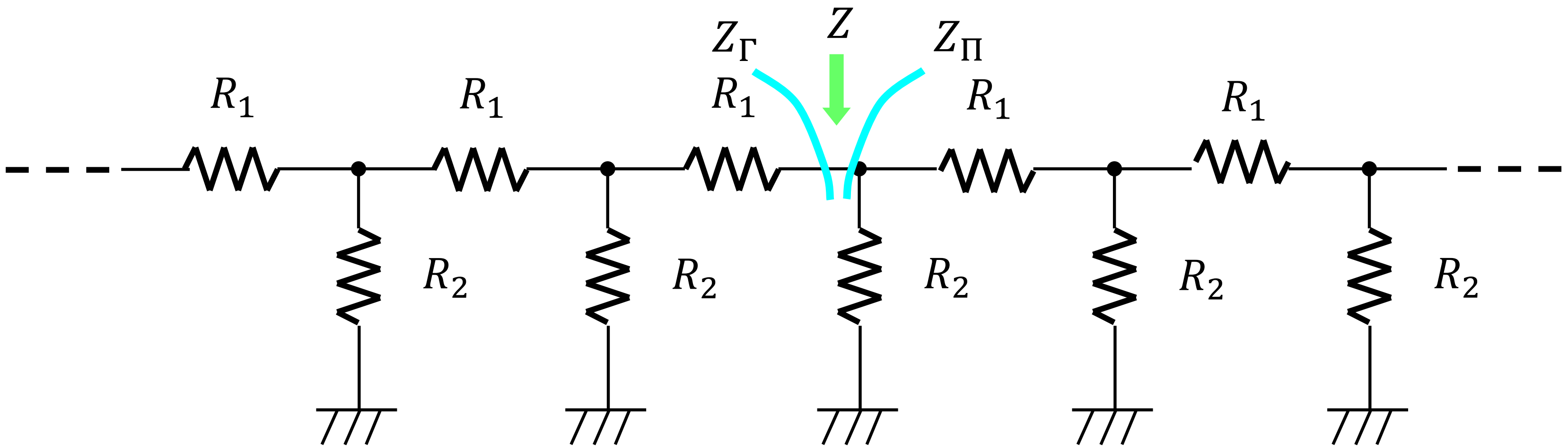
$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z}} \quad \longrightarrow \quad Z^2 - R_1 Z - R_1 R_2 = 0$$

この2次方程式は正負の実数解を持つが、そのうち正のものが求める値である。

$$\therefore \ Z = \frac{R_1 + \sqrt{R_1{}^2 + 4R_1R_2}}{2}$$

特に、$R_2 = 2R_1$の時 $Z = 2R_1$ となる。

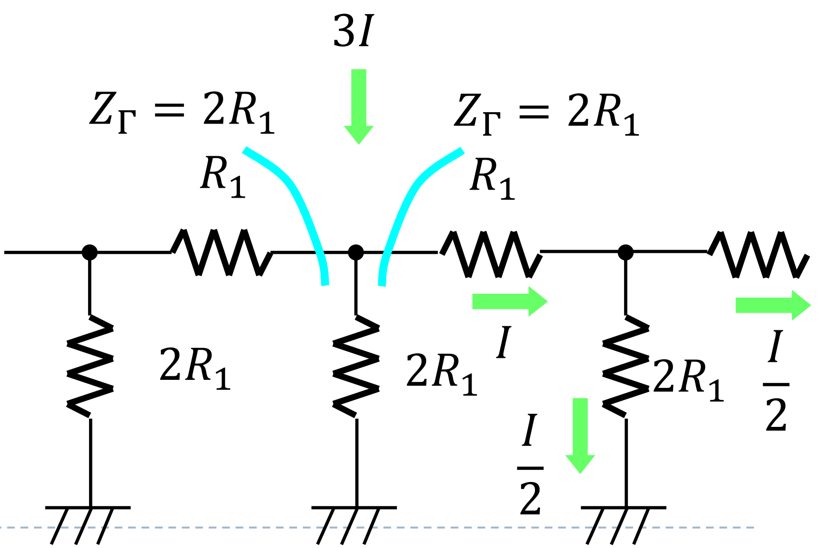
両側無限ラダー



ノードのインピーダンス Z は、Z_Π と $Z_\Gamma = Z_\Pi + R_1$の並列だから

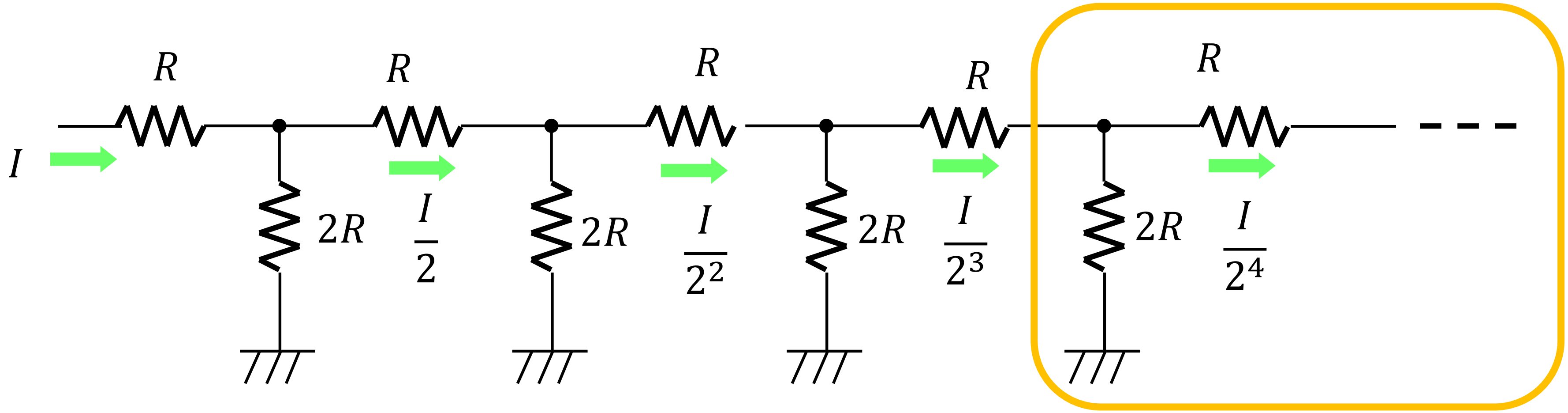
$$Z = \frac{R_1 R_2}{\sqrt{{R_1}^2 + 4R_1R_2}}$$

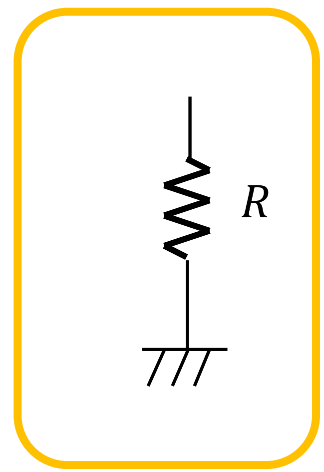
特に、$R_2 = 2R_1$の時は $Z_\Gamma = 2R_1$ だから、
Zは$2R_1$の3並列である。ノードに注入した電流は1/3ずつに等分される。その右のノードでは、その電流が1/2になる。同様に、各ステップを通過する毎に電流が半分になって行く。



無限ラダーの有限打ち切り

簡単のため、R-2Rの場合で述べよう。

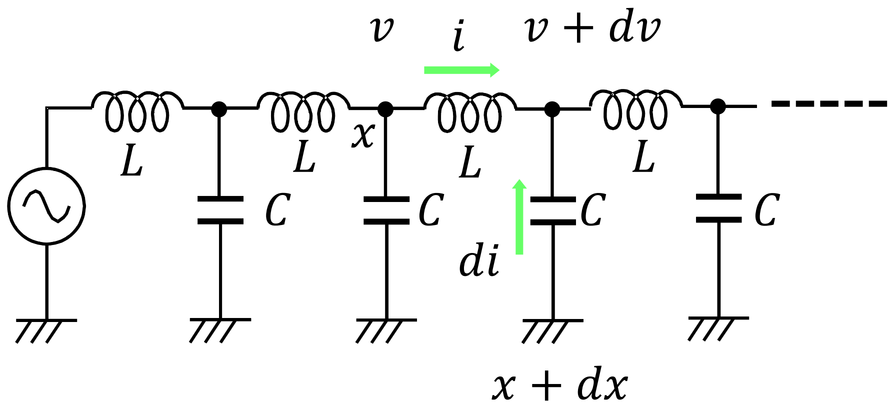




ラダーの残りを**終端抵抗**で置き換える。

右に無限に伸びる上記ラダーに、左端から電流を注入すると、電流は1/2になって行く。ここで無限ラダーをどこかで打ち切って、代わりに抵抗*R*に置き換えても、そのノードの電位は不変である。
注入された電流からすると、ラダーが有限であったとしても、そこまでは無限の場合と区別できずに1/2物語で分岐して、最後にそこで閉じる(終端される)ことになる。
(木曽義仲なら倶利伽羅峠の戦い)

LCの半無限ラダー



$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial v}{\partial x} = L\dfrac{\partial i}{\partial t} & \text{(1)} \\
-\dfrac{\partial i}{\partial x} = C\dfrac{\partial v}{\partial t} & \text{(2)}
\end{cases}
$$

あるノードをx、隣のノード$x + dx$をと置き、それぞれの電位をvと$v + dv$する。またコンデンサが流し込む電流をdiとする。LCのブランチ属性とKirchhoff則から、上の回路方程式が成り立つ。ただし式の中では、vやiはxとtの関数と考えて、階差を偏微分で置き換えている。野蛮であるが、先を急ごう。

(1)式をx、(2)式をtで偏微分して、後者を前者に代入するとiが消せて、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

が求まる。これは波動方程式と呼ばれる。
方程式の形から、この形式のラダーでは場所xと時間tが$\sqrt{LC}$という因子で互いに換算されること($t = \sqrt{LC}x$)が分かる。この推論を敷衍すると、空間の概念が導入できるのではないだろうか。