# 回路の回り道2020_最終レポート解題

源代裕治　2020/02/07

本レポートの課題は「1次LPFを題材にして、交流理論と積分変換(Laplace変換やFourier変換など)との関係を調べよう。」というのが主旨である。一般論では分かりにくい現象を、具体例を通して理解しようと試みた。学生諸君には既に十分に思索された後なので、解答も急がずに、たっぷり回り道をしよう。講義では軽くしか触れられなかった議論も、出来るだけ深堀しよう。楽な路ではないかもしれないが、付き合ってもらえると幸いである。

# この資料作成に用いているMathematicaの都合上、数式の記号は適当に置き換えている。誤解されることはないと思うが、表現に捕らわれずに意図を理解して欲しい。申し訳ない。

## 設問I

図1において、vinからvoutへの伝達関数H(s)=Vout(s)/Vin(s)を求めよ。(Laplace変換の世界)

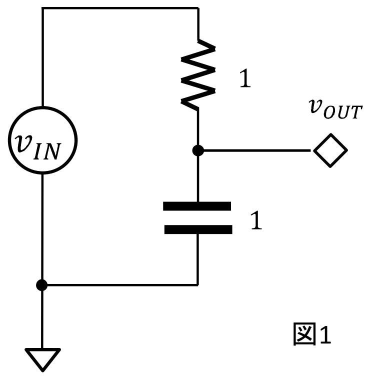



図1

### 解説

いきなり余談
1次系は最も簡単な時定数系であり、回路の初級コースで学んだと思う。しかし簡単過ぎてつまらないと思うのは間違っている。実設計でも1次系で近似される状況を扱うことは多い。その特長を定量的に把握しておくことは重要である。ついでにいうと、2次系も良く出て来るので、その特長も定量的に捉えておくべきである。実システムは殆ど3次以上であるが、大抵2次系までで大局を掴むことができる。そこで、次数が上がるとどのような現象が見えて来るか、というような半定性的理解も有用になって来る。

さらに余談
図1で抵抗に1、コンデンサーにも1という数字を付記しているが、これはそれぞれ1Ω、1Fであることは言うまでもない。このように、電気回路では単位を省略することが普通である。回路図は回路記号とくっついているので単位を省略しても間違えないし、コンデンサはpFやuF、抵抗はkΩとかMΩとかでオーダーが違うので、悩むことが殆どない(定量的感覚に馴染む意味では、容量値の1Fは大きすぎるが、設問6でグラフを見やすくするという都合である)。単位の省略は便利な習慣であり、困っている人もいないが、この習慣による悪影響も一度は考えてみた方が良い。今回のレポートでも、単位が違うものを足すという計算ミスをしている方がいた。ちょっと複雑な計算をするとき、ときどき事件を確認する習慣が計算ミス低減に有効であることを学ぶだろう。物理系の学生さんにそのような訓練をした人が多いように思う。

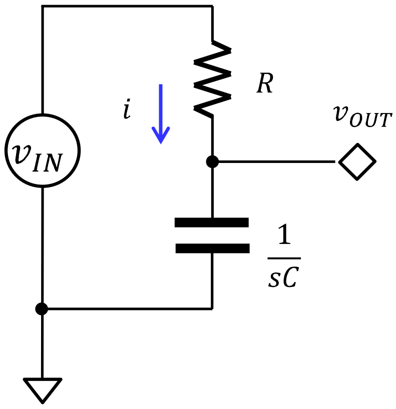
近頃思うようになったのは、殆どの工学では次元解析的発想が重要で、学生も相当鍛えられているが、電気分野の学生だけは、その感覚が殆どないことである。
かつて、設計レビューで駆け出しエンジニアがシミュレーション結果を説明していて、解釈がおかしいのではないかと感じたので、「ここの1kΩを2kΩに変えたら特性はどう変わるか」と質問したら、「その条件ではシミュレーションしていないので分

かりません」という回答であった。そのような仕事のやり方では、無限時間のシミュレーションが必要になってしまう。
これが、どう単位の話と係るかは話すと長くなってしまうが、手間のかかる計算は一度だけで済まして、他の条件の結果は簡単な換算だけで済まそう、というご利益を求めるのが「次元解析」の手法であり、そこでは「単位の次元」が基本的役割を果たしているとだけ述べておこう。

私自身は仕事の上で、次元の発想にはしょっちゅうお世話になっており、電気分野でも、もっと強調されるべき考え方だろうと感じている。問題4の解説で、続きを話そう。
(私の仮設は、電気分野ではソコソコ高速なシミュレータが早くに発達したため、次元解析を使わなくても毎回計算すれば済むという手法が定着してしまったのではないかというものである。)

そろそろ本題に戻って、
多くの方が伝達関数をODEからLaplace変換(で初期値を無視したもの)から導いてくれた。頼もしい限りである。
が、大抵は違うアプローチをすると思う。
講義でも強調したことであるが、キャパシタを含む回路は本来微分方程式になる。これをLaplace変換した代数方程式が、キャパシタを予め1/sCと置いてから代数方程式を立てたものと同じになる。ただし、この手順交換は初期値を無視するという無茶をしているので、たまには大失敗をするかも知れない。「可換な図式」がいつでも成り立つか、条件付きで成り立つかは、頭の片隅で気にしておく必要はある。前置きはここまでにして、

私が回路特性を計算するときに用いている便法は、キャパシタ値を1/sC、インダクタ値をsLとおく方法である。(多くの場合)これに直列や並列のインピーダンス公式を適用すると、回路特性が求まる。(もっと複雑な回路ではKCLやKVLを使って連立方程式を立てる。)
図1に適用するには下図を用いる。回路の記号にCではなく1/sCを用いることで、僅かではあるが思考を節約でき、精神的にはかなり楽になると感じている。




上図の回路は、抵抗にも容量にも同じ電流が流れ、vinはそれぞれに湧く電圧の和になる。ここにKirchhoffの法則を適用するのであるが、公式的にはvinから見た直列インピーダンスは R+1/(sC) であり、voutはキャパシタに湧くので、分圧の関係式が使える。すなわち、

```
(1 / (s C)) / (R + 1 / (s C))  // Simplify
```

$$\frac{1}{1 + C R s}$$

となる。所与の値 C=R=1 から、所望の伝達関数H(s)は以下の式となる。
Mathmaticaスクリプトの都合から、このH(s)にはlpf[s]という関数名を付ける。Mathematicaでは即時割り当て(=)と遅延割り当て(:=)は区別される。違いは、定義されたときに評価される(計算される)か、使うときに評価されるかの違いである。下の関数の定義では遅延割り当てを用いている。変数名s_に付いているアンダースコアは、Mathematicaが式を解釈するときの動作を規定するもの(パターンマッチングしながら式を変形して行くときのルール)と理解している。

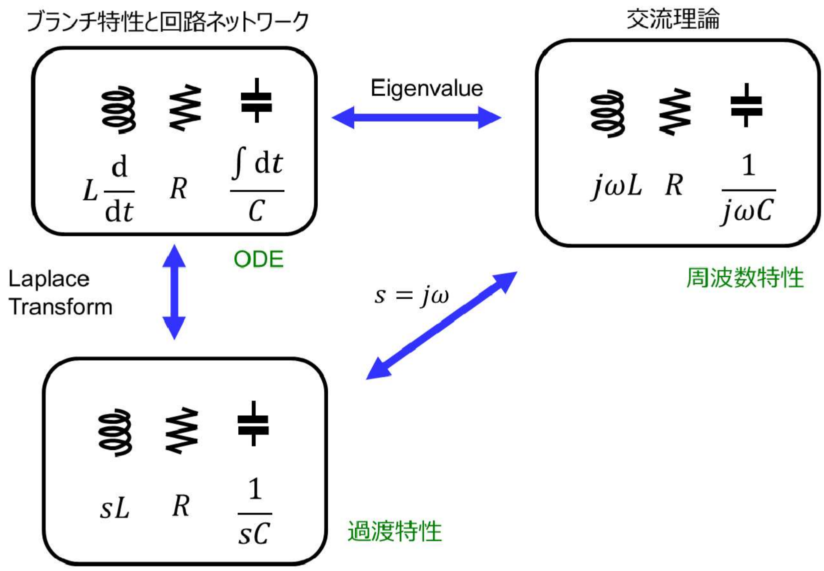
```
lpf[s_] := 1 / (1 + s)
```

# 設問2

H(s)のBode線図を示せ。(交流理論の世界)

## 解説

また余談から。
元々Laplace変換の世界で定義される伝達関数H(s)に対し、s=jw=j2πfの代入をしたH(jw)が何を意味するかは、明確に解説されることは滅多にない。きちんと説明すると長くなるので端折っているのかも知れない。しかし、その手抜きによる実害もそれなりに深刻である。さらに、説明上の便法を省略使うのであれば、学習のどこかの段階で論理的に飛躍のない、ちゃんとした説明を受けてしかるべきである。M3という学年は、それに丁度良い進度ではないかと思う。
s=jwの代入というのは実に不可解である。長年、納得の行く説明を求めて得られなかったが、苦悩の末辿り着いたのが、この代入は、違う世界の話を(意図的か否かは別にして)、ごっちゃに説明しているという理解である。すなわち、sで語る世界(Laplace変換の世界)とjwで語る世界(こちらは交流理論の世界であって、Fourier変換とも別世界)が、s=jwの置き換えをすることで、行き来できる(式の真偽が保存される)という理解である。完全に同じであれば区別する必要も無くなるが、違う世界を同一視することで発生する誤謬の中には、それなりの危険が潜在することになる。
その同型対応を下図のように表してみた。残念ながら、あまり良い図ではない。イメージ図と思って欲しい。




講義で説明した回路理論で、回路の接続とそれを構成する素子特性(=枝特性)からは、常微分方程式(定係数ODE)が導かれることことを説明した。このODEは一意に決まるものである。これが、上図左上の世界。そのODEには解の一意性が成り立つが、初期値に依存して無数の解がある。他方、回路としての興味は解の性質というよりむしろ、外部入力(ODE用語では強制項)によって、応答がどのように変化するかにある。この関心が「歪」であったり「アンチエイリアシング」だったりする指標になって表れている。しかし巷で使われている指標は、ODEの本質を捉えているというよりは、浅い理解に基づく思い付きレベルのように感じている。それはさておき、

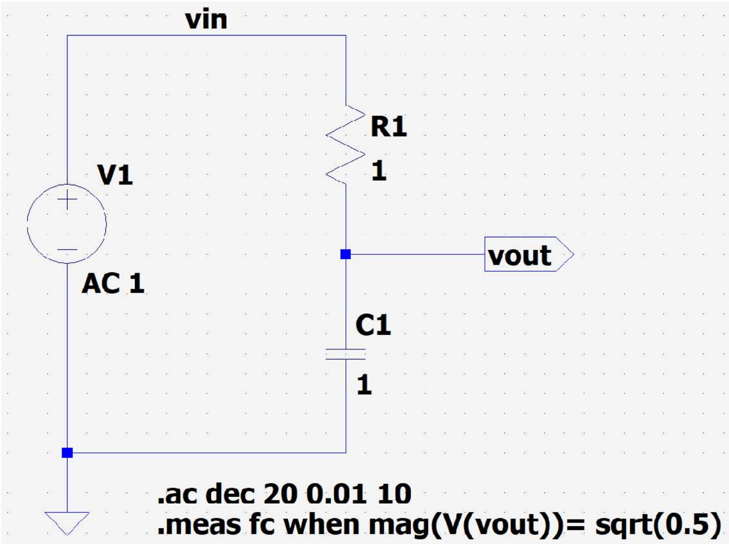
上図でひとつの方向は右に進む矢印、すなわち定係数ODEを固有関数を用いて代数化する交流理論である。ここで角周波数あるいは周波数というパラメータが導入される。固有関数は円関数(正弦波や余弦波の複素化)で、無限の過去から無限の未来まで変わらずに変化し続ける信号である。(「変わらずに変わり続ける」というのは、もちろん自己矛盾ではない。むしろ、「時間と供に変化する周波数」を考える方が矛盾が大きい。)
解の空間(この数学用語に馴染みがないなら、解となりうる関数の範囲)として無限の過去から変わらない信号に限定することで、初期値問題から逃れる、あるいは反対に言うと、初期値問題を扱えなくしている手法である。その代わり、振幅と位相で全てを語れるので、世界が簡単になるし、ODEのままでは見えない特徴も見えて来る。

上図でもう一方、ODEから下向きに出る矢印がLaplace変換の世界である。こちらはt=0　(現在の状態)から出発

し、無限の未来までの経路を、パラメータsで置き換える。過去の世界は存在しなくなる代わりに、時間と共に移り行く様子を表すことができる。換言すると、過渡応答が扱える。

強調すべきは、どちらの方向もODEからの線形変換なので、回路方程式にs=jwの代入をすることで、二つの世界を行き来することができることである。ただし、ここのLaplace変換の世界では、初期値を無視(正確には初期値0)にする限定が入っていることは気に止めておくべきである。またs=jwで、二つの世界の国境をまたいでいることは、常に意識した方が良い。

そろそろ本論に戻って、
Bode線図は、設問1で求めた伝達関数にs=jwの代入をして振幅と位相のプロットをすれば良いが、電気分野の習慣は数学の習慣とはあわない。Mathematicaでそのプロットをするのは一手間かかる(少なくともどこかからスクリプトを引っ張って来る必要がある)ため、電気エンジニア時には、回路シミュレータを用いる方が良い(それに慣れておくべきである)。
LTspiceの回路図を下図に示す。




電源V1でAC 1とあるのは、AC解析で振幅1を与えるという指示である。と軽く流すと、本質がかなり奥の方に隠れてしまう。

再びちょっと回り道をしよう。
シンプルな質問として、回路シミュレーションがなぜ「AC解析」とか「トランジェント解析」とかに分ける必要があるか、説明できるだろうか。答えは、色々な切り口から説明できるが、考えてみて欲しい。講義で説明した回路論の建付けの理解が深まると期待している。
AC解析の場合は、まず、回路の動作点で線形化を行う。動作点を求めるために、AC解析の前にこっそり、動作点解析を行っている。LTspiceでは.OPというコマンドで明示できるが、.ACでも必ず実行される。

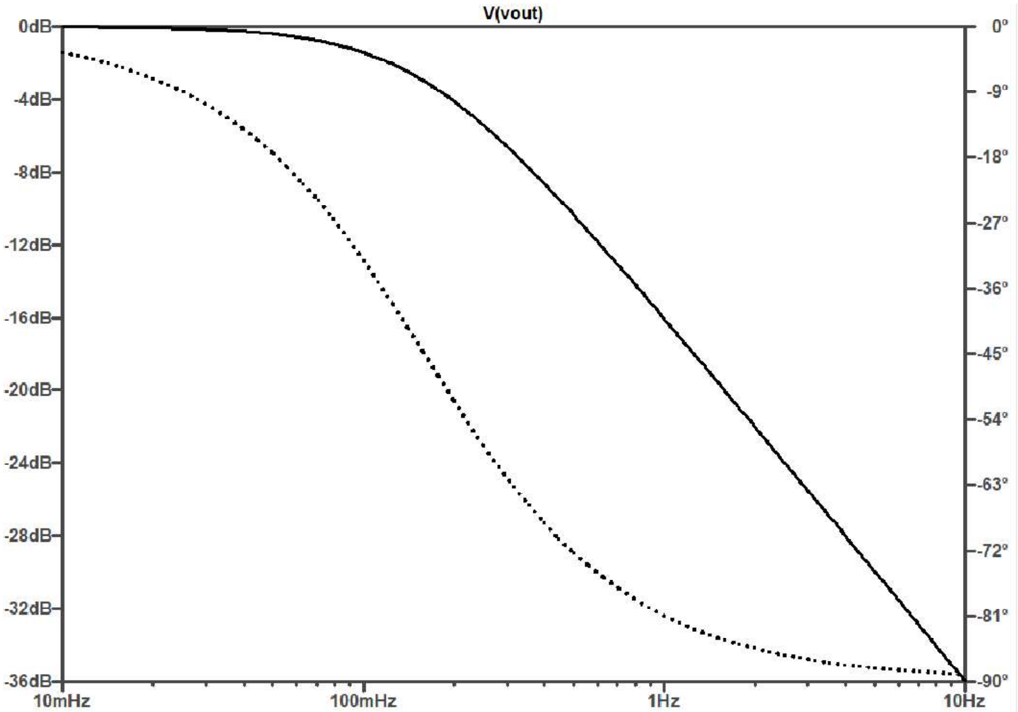
線形化されたあとは、信号は振幅に関係なく比例関係が適用できるので、たとえばマイクのように微弱な信号を増幅するアンプのf特を調べる場合も、AC 1の設定ができる。そのアンプの入力レンジが1mVしかなくても何の支障もない。もし実際の信号振幅が1mVppであるなら、AC 1m と設定すると、実信号レベルがシミュレーション結果として得られるわけである。今回の解析では、伝達関数を求めたいので、その定義式の分母となるV1電源の振幅を1にして、出力vout振幅がそのまま使えるようにしている。

上の.acコマンドのパラメータは、1オクターブで20ポイント計算しなさいというものである(これが少ないと結果がカクカクになる、あるいは鋭いピークを見落としてしまう、とかの現象に遭遇する。このくらいシミュレータ側で配慮してよ、と思うのは健全な発想と思う。)、周波数範囲は0.01Hzから10Hzで見なさい、という指示である。周波数範囲が不適切だと、回路動作を誤解してしまうことになる。試行錯誤が必要になることも多いし、回路をどの程度解釈できているか、という理解度も効いてくる。人工知能が発達すると、コンピュータが最適値を探してくれるようになるかも知れないが、反面、初級エンジニアが不要になって来るかも知れない。将来何が起きるかは読み切れるものではないが、まだ当面は、そんな時代は来ないだろうとも思っている。(先読みする時は、それが当たった時、またそれが外れた時にどう対処するかまで考え

ないといけない。)

閑話休題:
下に示すのが、LTspiceを走らせた結果である。プロットオプションを少しいじっているので、インストールしたままの図とは見た目が少し違うが本質的でない。まず第一に、横軸が周波数を対数目盛で表示していることを指摘しよう。レポートでは角周波数のまま提示している方が多かったが、電気の慣習としては横軸は周波数を採用するべきである。ただし、理論の教科書等では角周波数で結果が提示されることもあるので、絶対的なルールという訳ではない。実用上、周波数で提示される方が圧倒的に便利だという意味である。対数目盛を使うことに関しては、その方が分かり易い状況が多いが、それにより逆に本質が見えなくなっている状況も多い。リニアメモリと併用し、解析目的に応じて使い分けるべきであるというのが私の実感である。話始めると長くなるので、これはここまでとしよう。
縦軸は左右別々に目盛が振られている。左が振幅のdB表示で、太線カーブの目盛である。右が位相遅延のdegree表示で、点線のカーブが対応する。どちらがどちらに対応するかは、電気エンジニアなら悩まないだろうというスタンスである。カットオフ周波数fc=1/(2 π)=159mHzで-3dB, -45°というのは習った通りの結果であろう。

余談ながら、伝達関数の表現としてBode線図を用いることが圧倒的であるが、Nyquist線図の方が合理的な場合も多い。
例えば、OPアンプの安定性の習い始めに位相余裕を見るが、Bode線図だと位相を変えずに振幅だけ早く落とせないものかと思う方が自然であろう。Nyquist線図からの発想では、位相と振幅を別々に変えることはできないことが良く分かるだろう。
もう少し話したいが、ここは自粛する。




Bode線図は一義的には、ある周波数の正弦波(もう少し一般的には円関数)を無限の過去から無限の未来まで入れ続けたときに、その出力もやはり無限の過去から続く正弦波になるのだが、その振幅と位相が入力に対しどのような関係にあるかを示すものである。たとえば上図で0.1Hzの所をみると、-1.4dB,-32°くらいに読み取れる。すなわち出力に、振幅が0.85倍、タイミングが10sec*32/360=0.89秒遅れた正弦波が出て来ることを示している。
では、正弦波の代わりに、矩形波や三角波を入れた時はどのような信号が出て来るだろうか。これらも無限の過去から無限の未来へ続く周期関数としてFourier展開することで、正弦波の組み合わせに分解できるので、Bode線図で各成分の出力を求め再度合成することで、出力波形を求めることができる。この推論で**可換な図式**、すなわち周期信号を、Fourier級数展開してから伝達関数を適用するのと、伝達関数を適用してからFourier級数展開するのとで、同じ結果が得られることを用いている。これにより、正弦波でない周期信号でも、Bode線図に全ての変換情報が含まれていると言えるのである。では、非周期波形に対しBode線図がどの程度まで情報を示してくれるだろうか。

周期関数は、理論的には実数領域Rではなく、有限リングT(数学用語では1次元トーラスという)で定義される関数と

扱う方がシンプルである。というのも議論が、無限の過去から無限の未来ではなく、有限の円周上になるからである。一方、定義域を変えたことによって何が起きるかも明確に認識しておかないといけない。定義域のRとTを混同することで、たとえばサンプリング定理が誤解されて広まってしまったような事態が起きている。しかし、これも話せば長くなる。そちらの誘惑は我慢して、

設問3に進もう。

# 設問3

vin(t)が図2のパルスのとき、応答波形vout(t)を、グラフと式の両方で求めよ。(再びLaplace変換の世界)

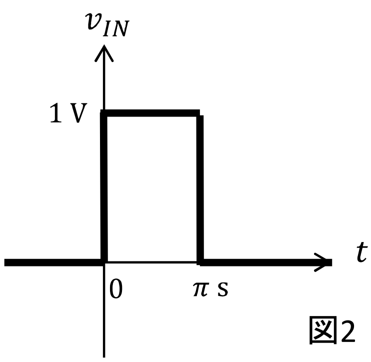



図2

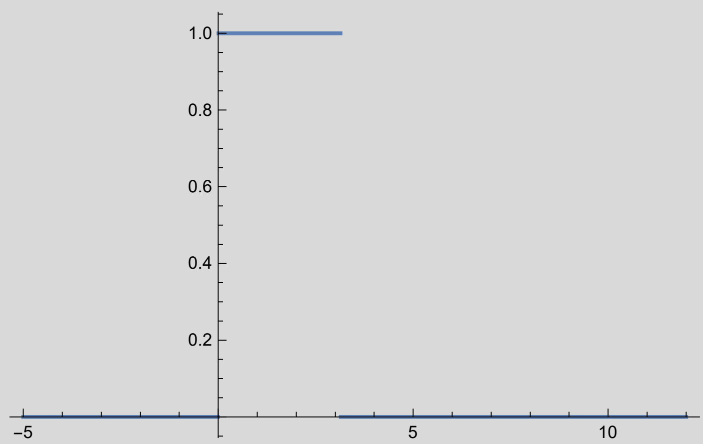
## 解説

このLPFに入れる幅$\pi$の単位パルスをMathematicaで記述するにはいくつかの方法があるが、ここではUnitBox関数に対し、時間軸のスケール変換と移動を使って、所望の形状に整えることにしよう。

```
pul[t_] := UnitBox[t / π - 1 / 2]
           単位ボックス
```

この関数が正しく定義されたかプロットして確認しよう。良さげな結果である。

```
grvin = Plot[pul[t], {t, -5, 12}, PlotStyle → Thick]
        プロット                   プロットスタイル  太い
```




この単位パルスをLaplace変換する。何も考えなくてもMathematicaが答えを出してくれるが、この式の意味するところは理解できないといけない。分子第1項を分母のsで割ったものはStep入力のLaplace変換であり、分子の第2項は時間を$\pi$だけずらしたときの遅延因子でStep応答を打ち消してパルスにしていることを表している。

```
sol1 = LaplaceTransform[pul[t], t, s] // Simplify
```
ラプラス変換　簡単な形式に

$$\frac{1 - e^{-\pi s}}{s}$$

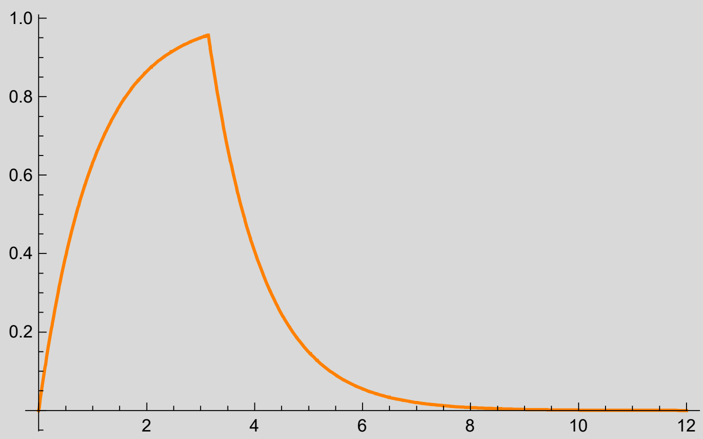
単位パルスをLPFに通した出力は、sol1に伝達関数を掛けて、逆Laplace変換することにより、時間領域の信号として求まる。結果は、意味合い的には単位パルスの立ち上がりに対する応答と、その後の立下りを時刻により場合分けしたものになるが、MathematicaはHeaviside関数を用いてひとつの関数として解を表現している。

```
sol2 = InverseLaplaceTransform[sol1 lpf[s], s, t] // Expand
```
逆ラプラス変換　展開

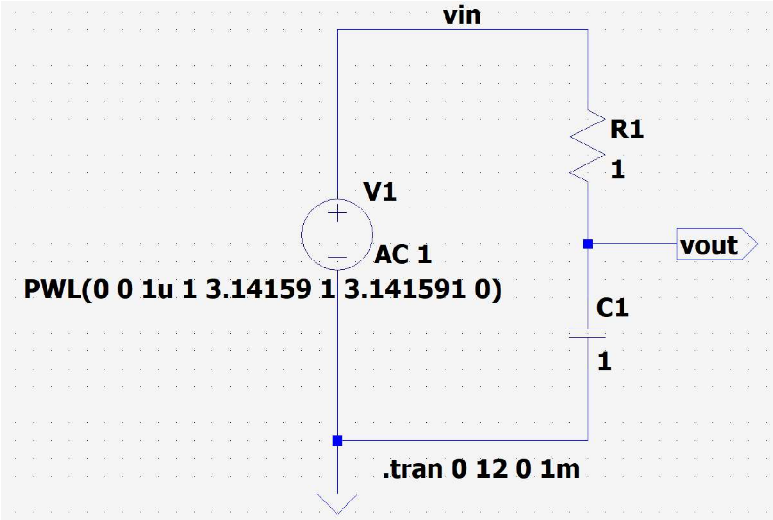
$$1 - e^{-t} - \text{HeavisideTheta}[-\pi + t] + e^{\pi - t}\,\text{HeavisideTheta}[-\pi + t]$$

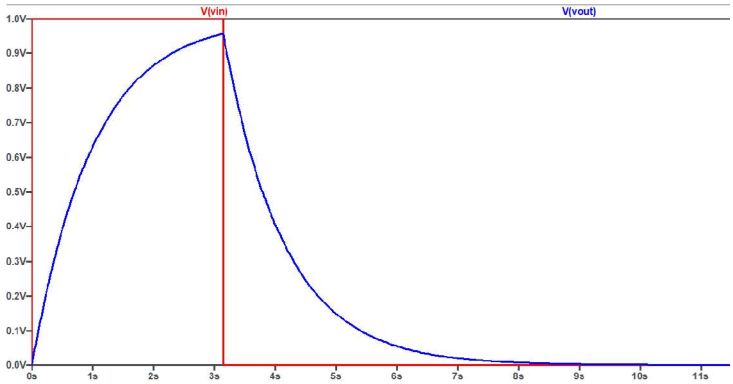
解をプロットしてみると、場合分けであることが見やすい。
Mathematicaを使える環境にあるならば、時定数を変えて、解がどう変化するかを見ておくと良い。
(グラフを描くだけなら、LTSpiceで十分である。)
上で定義したsol2は、右辺の逆Laplace変換の即時割り当てで、変数tを含む。そこで、これを関数のように用いることができる。

```
grvout = Plot[sol2, {t, 0, 12}, PlotStyle → Orange]
```
プロット　プロットスタイル　オレンジ色




念のため、LTspiceでも確認しておこう。




正確に比較するには、ふたつの方法で求めた応答波形を同一のプロットに重ねるべきだが、両ソフトのデータ変換はそれなりに手間なので、ざっくり目視で同じであるとしよう。
# 正式なレポート(論文など)にするときは、この手間を惜しんではいけない。ごまかそうとしていると思われるか、本質を理解していないと判断されるか、あるいは実際に過ちを犯すか、どのみちロクな結果にならない。

ちょっと寄り道
上のLTspiceでは.tran文で12秒分のトランジェント解析を実行している。入力vinは電源V1で与えている。前回のAC解析のAC　1という設定が残っているが、ここでは用いられない。その下のPWLというのが今回の解析で用いられる指定で、(時刻 値)のペアを並べて行くことで波形をしている。不連続な信号ではシミュレーションができないので、その目的に対し十分高速に変化する折れ線を用いる。今回は、1usで0と1の間を遷移するパルスを与えた。
1から0への遷移時刻にもう少しこだわって、数値的に時刻$\pi$を挟む1us幅、たとえば3.141592と3.141593を用いれば良かったと思う。6桁の精度の先の違いなので実質的な差は見えない。シミュレーションの計算精度も、大体その程度だ。
# トレードオフが殆ど全てという設計の世界にいて、このようなどうでも良い所でのこだわりは、結構嬉しかったりする。

題意とはちょっと離れるが、LPF出力の面積を確認してみよう。これは入力の単位パルスの面積と等しくなる筈である。
というのは用いた1次LPFのDCゲインが1(s=0の伝達関数値が1)だからである。当たり前すぎるのか、文献ではめったに指摘されないが、エンジニアの身だしなみとして有用な知識である。設問5でも、再度同じ話題に触れる。

図1(一般にDCゲインが1)のLPFにどんなパルスを入れても、その面積は保存されるのである。一方、自乗の積分は、パルス幅が広くなって面積が変わらないので、ドンドン小さくなってくる。信号処理の慣習では自乗の積分を、その次元がパワーでなくてもパワーと呼ぶ。この用語を使うと、DCゲインが1のLPFを通すとき、「DCは保存されるがパワーは減衰する」と表現できる。

```
Integrate[sol2, {t, 0, Infinity}]
積分                  無限大
```

```
π
```

DACの出力で、コードの変わり目に細いパルスが乗ることがある。これをグリッチという。その面積をグリッチエネルギーと呼ぶ。次元的に見ても、意味からみても、それをエネルギーと呼ぶのはおかしいが、(一部では)そういう慣習である。それはさておき、グリッチを小さくしようとDAC出力にLPF入れても、その面積は変わらない。これを称して「グリッチエネルギーはLPFで取れない」と言う。しかしそのパワーは小さくなっているわけだから、LPFは十分有効なのである。

話の続きは設問5に先送りして、また回り道して、設問4に触れよう。

# 設問4

図1で、抵抗値を10^3倍の1kΩ、容量値を10^-3倍の1mFとしたときと、伝達関数はどう変化するか。何が起きているのだろうか。

## 解説

設問1で求めた伝達関数は、CRの積で決まる。この積のことを**時定数**と呼ぶのは既習であろう。
上の定数変化で時定数は変わらないので、この問の答えは、「伝達関数は変化しない」となる。

伝達関数が同じならBode線図も同じになる。LTspiceのRC回路図にR=1k，C=1mを入れてシミュレーションで確認してみると良い。
当然の結果を具体的に確認するのも、良い訓練である。

ところで、回路にはRとCの二つのパラメータがあったのに、伝達関数になると、その積しか見えなくなるのである。パラメータの数(すなわち自由度)がひとつ、どこかに消えてしまった。どこに行ったのであろうか。

初期値に対する応答が変わるのではないかと疑ってみたが、伝達関数が同じ以上、初期値に対する応答も同じになる。
そこに隠れている訳ではなさそうだ。

実は、出力インピーダンスが変わっているのである。もとの定数R=1，C=1なら、出力voutに1mFの負荷容量が付いても、特性は殆ど変わらない。一方、R=1，C=1mFだと負荷に1mFも付くとカットオフ周波数が半分になってしまう。わかるだろうか。この辺り、エンジニアとして身に着けておくべき感性のひとつである。

別の見方をすると、図1ではRCの直列が伝達特性を決めているのに対し、出力voutから見ると、RCの並列が出力抵抗を決めているのである。パラメータ二つで条件が二つ、ということで自由度は合う。

**伝達関数が系の全てを決める訳ではない**ことは、よっく認識しておくべきである。ここで述べた以上に伝達関数には様々な限界があるのだが、それを認識しない議論が多すぎると感じる。たとえば、

OPAMPの安定性を見るのに、AC解析でBode線図を描くことは良く教えられている。AC解析で見えるのは、局所線形化て求めた伝達関数の特性だけである。その作業で、いったいどれくらい多くのものが失われているか、考えてみて欲しい。OPAMPの安定性に関しても、話せば長くなる。
# 講義からも感じてもらえたことを願うが、電気の比較的初歩的な話題にも、語るべきことは山ほどある。
# 我々も象を撫でる群盲の一人であることを強く認識し、謙虚に修行に励もうではないか。

1次系の伝達関数が時定数$\tau$だけで決まるということに関しては、もう少しコメントしておこう。
ステップ応答は、$\tau$が10倍になると10倍の時間をかけて1に近づいてゆく。しかしもし、時間軸を1/10にしたら、応答波形は正確に重なる。ここを納得してもらうと、時定数というのは、その1次系における時間の単位を決めていることが分かってくる。横軸を秒とか日とかの単位でなく、時定数$\tau$でとると、応答波形はひとつしかないのである。換言すると、1次応答

は時間スケールが変わるだけで、実質的にひとつしかない。時間のスケール変換で、1次系の自由度は消滅するのである。

2次系になると、その応答に、形状を表すパラメータが追加になる。このパラメータとしてダンピングファクターして知られるパラメータを使う分野が多数ある。
たとえば、(既に一度は習ったと期待して)PLLの引き込み特性はざっくり2次系で近似される。PLLの教科書では2次系のふたつのパラメータを、自然角周波数wnとダンピングファクタzとする。が前者は時間軸のスケールを定めるだけである。時間軸の相似変換を同一視すると、その自由度が消える。(素直に整定するとか不安定であるとかの)応答形状はダンピングファクタで決まるのである。標語的に言うと、「wnが時間軸を決め、zが形状を決める」のである。
PLL、もしくは2次系をこのように理解しておくことは有用だと感じている。

回路の特性を調べるときに、スケール変換でどう変わるか(単位を変えて変わるものと変わらないもの、あるいはもう少し定量的に
、対象となる値が何倍になるとか)を常に気に留めておくことは、スコブル重要である。次元解析的発想は、電気の教育現場においても、もっと強調されるべきだと思う。
# 電気以外の工学分野では常識的な感性である。電気でなぜそれが育ちにくいのかも、考えてみると良い。
# そのために例えば流体力学のReynolds数を勉強し始めると、回り道のしすぎであろうか。

なお、本問題をpole-zero cancellationだと思っている方がいたが、無関係である。PZキャンセルは伝達関数の分母と分子の因子が同じ時に生じる現象である。余談ながら、
現実世界で極とゼロ(すなわち伝達関数の分子と分母)が完全にキャンセルできるわけが無くて、誤差があるはずなのに、PZキャンセルがしばしばスコブル有効なのはなぜか、という疑問が湧いてくれば、それは真っ当な疑問である。そのような問題意識は大事にして欲しい。ここではこれ以上言及しないことにする。

# 設問5

関数v(t) のFourier変換を、ここでは成分に分けて

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\mathrm{Cos}[2\,\pi f t]\,dt$$

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\mathrm{Sin}[2\,\pi f t]\,dt$$

の対と定義しよう。ここでfc=1/(2$\pi$) Hzにおけるvin(t)とvout(t)のFourier変換の値(周波数成分)、Vin(fc), Win(fc) と Vout(fc), Wout(fc)を求めなさい。(Fourier変換の世界)

## 解説

この問題は単なる積分計算を求められているだけで、通常のFourier変換がいかなるものかを全く知らずとも解くことができる。にもかかわらず、ここでの定義をFourier変換と呼んだことで、多くの誤解を生んでしまったようだ。教科書に載っているFourier変換の公式を使おうと四苦八苦された方がいた。この定義と通常のFourier変換の関係性を見つけようと苦心された方もいる。

Fourier変換のfにしろLaplace変換のsにしろ、変換後にこれらのパラメータを含む式を求める作業の比率が高いため、「特定の周波数での積分」という発想が失われているようだ。個々の周波数をパラメータに置き換えて一般化したものが「変換」である。個別の値が必要な時に、まず一般化して、それから特別な場合に戻るという回り道は、(しばしば有効であるにしても)いつでも有効な訳ではない。

実の所、Fourier変換には(ほぼ)等価な定義が、いくつかある。上に定義したFourier変換は、他では余り用いられないものではあるが、実質的に通常用いられているものと違いはない。それを確認することは良い修行になるに違いないが、ここでは先を急ごう。

いくつかの手順を踏んで、上の定義に依るFourier変換を計算しよう。

被積分関数に、適当な関数を掛けて積分するときに、その関数を核(kernel)という。核というのも数学用語で、エンジ

ニアには多少違和感があるかも知れないが、気にしないでおこう。上の定義でのFourier変換の核は、お馴染みのSin, Cosである。f=1/(2π)のときは、下記のプロットになる。

```
Plot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 6}]
```
プロット　余弦　正弦

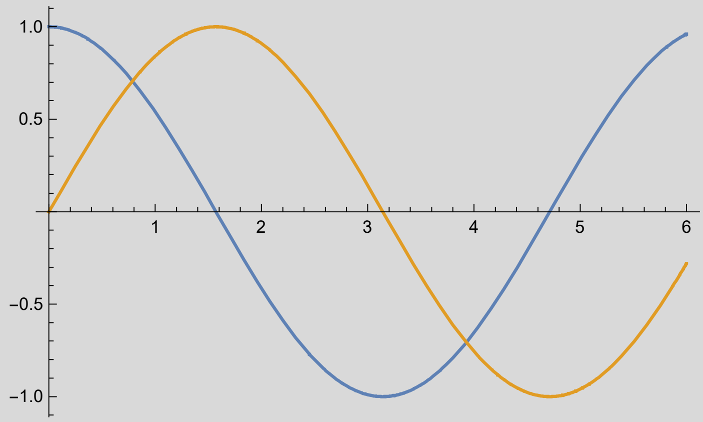



図2のパルスは[0,π]で1を取る。そこでそのFourier変換は、単純に積分核をこの範囲で積分すれば良い。
解は簡単な式になる。

```
vinfc = Integrate[Cos[t], {t, 0, π}]
```
積分　余弦

0

```
winfc = Integrate[Sin[t], {t, 0, π}]
```
積分　正弦

2

ここでしばらく回り道を。
入力vinに対してはfをパラメータとする変換も、下記のように簡単な式になる。
手計算でもそんなに難しくないと思うが、Mathematicaなら、いとも容易く結果を出してくれる。

```
solinx = Integrate[Cos[2 π f t], {t, 0, π}]
```
積分　余弦

$$\frac{\mathrm{Sin}\left[2\,f\,\pi^2\right]}{2\,f\,\pi}$$

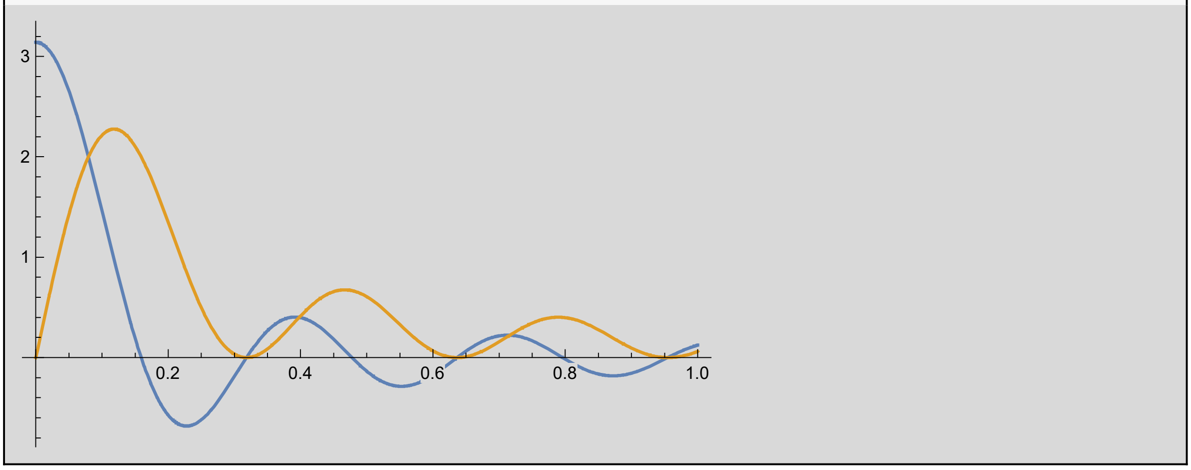
```
soliny = Integrate[Sin[2 π f t], {t, 0, π}]
```
積分　正弦

$$\frac{\mathrm{Sin}\left[f\,\pi^2\right]^2}{f\,\pi}$$

ここでひとつコメント。この課題の説明で、上の式をそのまま数式に書き換えたため、(f　π)^2のsinをとると誤解した方が多かった。
個人的には sin() まででひと固まりで、sin^2 () という表現の方が間違えやすいと思うが、まあ非常識であった。今後は注意する。

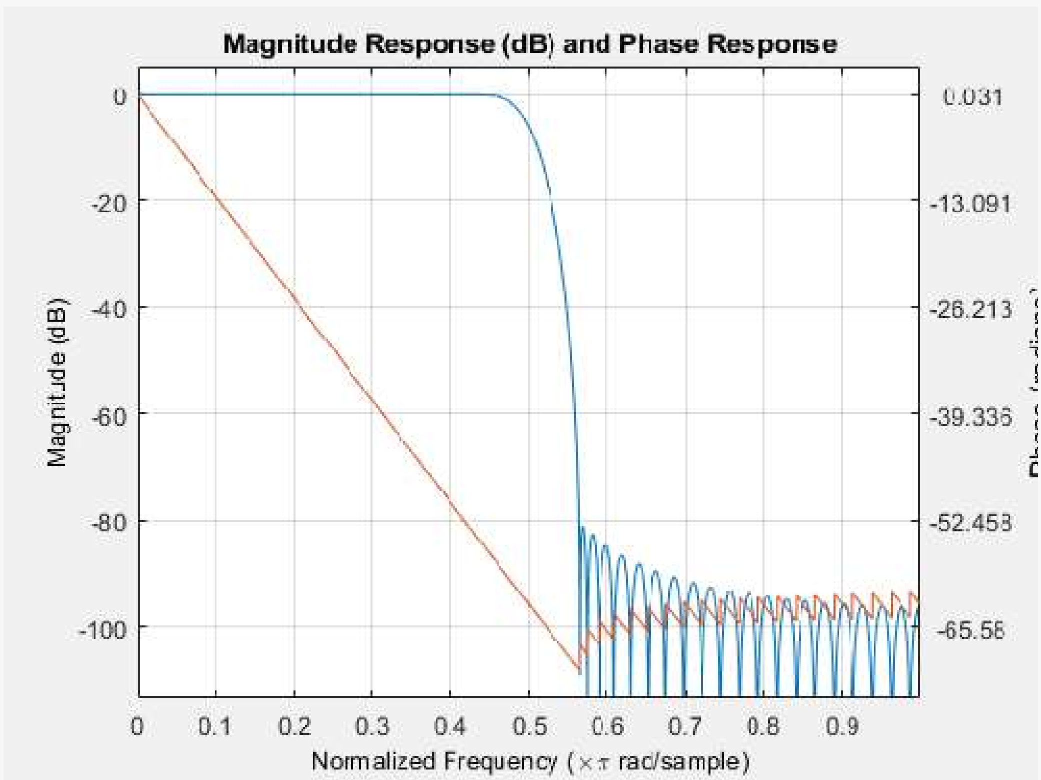
このFourier変換が折角簡単な式で求まったので、それをプロットしておこう。
ざっくり言うと、これが単パルス(図2)の周波数成分と言われるものである。時間と振幅のスケール変換により、どの単パルスも、これと相似な周波数特性を持つ。線形性の仮定に依存しているが、現象の本質も、ここに見通せる(ようになって欲しい)。

```
grsolin = Plot[{solinx, soliny}, {f, 0, 1}, PlotRange → All]
```
プロット　プロット範囲　すべて




この図に対し、いくつか重要なコメントしよう。

Fourier解析では、上図(grsolin)のように、縦軸も横軸もリニアスケールにする方が理論的である。
信号処理屋さんは縦軸を無理やりdBにするため、周波数特性そのままではなく、自乗して対数をとるようなことを行っている。
これが暴挙である証拠に、ディジタルフィルタのf特はマイナス無限大に落ち込む谷の繋がりになる。
たとえばこんな感じ



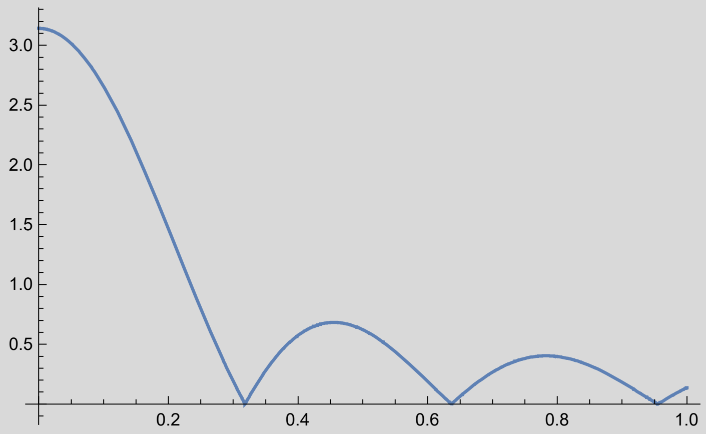

https://jp.mathworks.com/help/signal/ref/frequencyresponseofanfirfilterexample_02_ja_JP.png

この振幅特性をリニアスケールで書くと、solinxのように、0を挟んで滑らかに波打っている波形となる。もしかしたら専門家には当たり前かも知れないが、しばしば専門家すら図に騙されているのではないかと危惧する場面に出会う。

grsolinの図では、Cos成分とSin成分に分けて表示しているが、殆どの場合、振幅と位相という形に変換されて提示される。情報量として同じなので、これはこれでありであると思う。パルス位置をt=0起点からずらすと、Cos,Sin成分はかなり違う形に変わって来るが、振幅の周波数特性は変わらず、位相が全体的にずれるだけというメリットがある。起点ずらしがFourier変換においては、exp(-j τ)という位相因子を掛けることに相当する。位相因子は絶対値が1で、位相だけを回すので、振幅特性が変わらないのである。

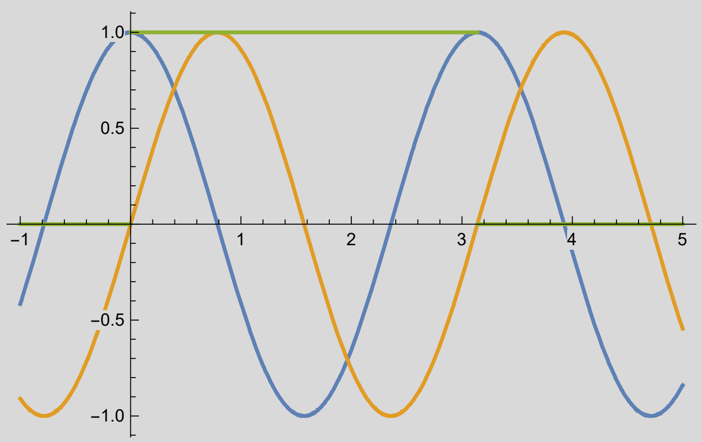
参考に、振幅f特もプロットしておこう。本来負の値に行って欲しいf=0.3当たりで、応答が折り返されて、滑らかでなくなってしまっていることが観測される。
振幅で見ることの問題点は現象が見えにくくなってしまうこともあるが、それ以上に位相成分の軽視という弊害も大きい。信号の振幅成分しかみないということは、信号が持っていた情報の半分を捨ててしまうようなものである。

```
grpulsmag = Plot[Sqrt[solinx^2 + soliny^2], {f, 0, 1}, PlotRange → All]
                プロット 平方根                         プロット範囲   すべて
```



パルスの周波数成分とは、何だろうか。grpulsmagの図から、図2のパルスは、f=1/$\pi$ 、大体0.318に周波数成分を持たないことが分かる。これは一体どのように解釈されるか。
f=0の値は、先に述べたように、パルスの面積である。積分核として恒等的に1になるものを用いる、すなわち何も手を加えずにそのまま積分するものと一致する。f=1/$\pi$のときは、積分核にCosやSinを用いた場合に、積分結果がどちらも0になるのである。下図で、推察して欲しい。

```
grvinorth = Plot[{Cos[2 t], Sin[2 t], pul[t]}, {t, -1, 5}, PlotStyle → Thick]
                 プロット  余弦      正弦                      プロットスタイル 太い
```



一般の場合を推察すると、パルスの周波数成分というのは、CosやSinを核にしたときの積分結果を指している、換言

すると、正弦波や余弦波との相関係数であることが分かる。パルスは一瞬のはかないものだが、無限に続く円関数と、それぞれ固有の相関を有するのである。

話をもどす。
設問のf=1/(2π)の値は、Fourier変換の一般結果からも求まる。MathematicaのReplaceAll演算子 /. を用いて後置代入をしている。先の計算と、結果が同じであることが確認できる。

```
vinfc = solinx /. f → 1 / (2 π)
```

```
0
```

```
winfc = soliny /. f → 1 / (2 π)
```

```
2
```

一方、出力のFourier変換は、簡単な式にはならない(かもしれない)。さしものMathematicaも数式積分の結果を断念した。
定義式にf=1/(2π)を先に代入してfcでの値を求めることは、手計算では大変だが、Mathematicaだと一瞬であった。

```
voutfc = Integrate[sol2 Cos[t], {t, 0, Infinity}]
          積分              余弦          無限大
```

```
-1
```

```
woutfc = Integrate[sol2 Sin[t], {t, 0, Infinity}]
          積分              正弦          無限大
```

```
1
```

# 設問6

前項のFourier係数から決まる二つの正弦波

$\hat{vin}(t)$=vin(fc)Cos[2π fc t]+win(fc)Sin[2 π fc $t$]

$\hat{viout}(t)$=vout(fc)Cos[2π fc t]+wout(fc)Sin[2 π fc $t$]

は、周波数 fc における入出力信号の周波数成分から作った周期関数である。
これらの波形をvin(t) と vout(t) のグラフに重ね書きしてみよう。どのような推察ができるだろうか。

続いて、$\hat{vin}(t)$ と $\hat{viout}(t)$ の振幅比と位相差を、2.項で求めたBode線図に追記してみよう。どのような一般則が推察されるだろうか。(Fourier展開から交流理論の世界へ)

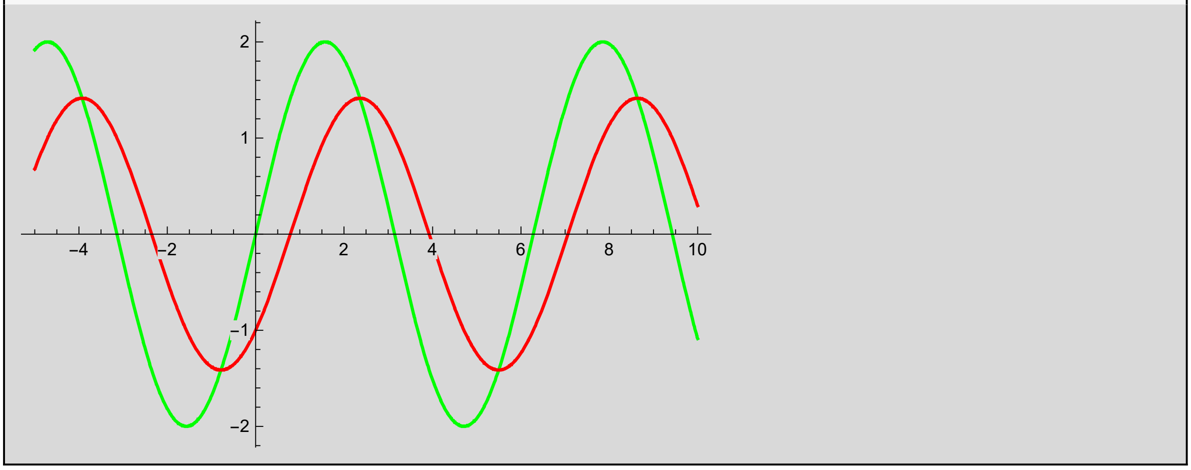
## 解説

設問5で定義したFourier変換は、その信号と、周波数fをもつCosやSinとの相関係数であった。そこで、その係数を使って設問6のように定義する信号を考えるのは自然であろう。fcだけでなく、他のfでも同様な正弦波様信号を考えることができる。

設問5で得られたf=fc=1/(2 π)での結果を、下記にプロットする。黄緑が入力、赤が出力に対応する。
これは単パルスや、そのLPF出力を、一番よく近似する(位相と振幅を変更した)正弦波とである。
LPFのBode線図は交流理論での特長付けであり、本来無限に続く正弦波に対するものであるが、それをLaplace変換の世界で解いたパルスの一次LPF応答の周波数成分は、Bode線図どおりに変換される。たとえばカットオフ周波数

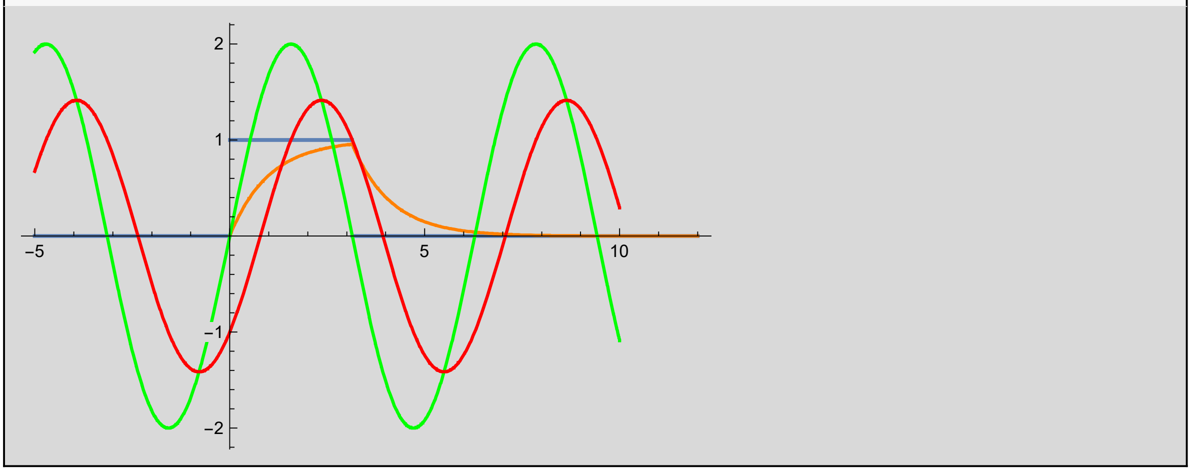
では、振幅が-3dB、位相が45°遅れることになる。

```
grfourier = Plot[{vinfc Cos[t] + winfc Sin[t], voutfc Cos[t] + woutfc Sin[t]},
                 プロット       余弦              正弦               余弦              正弦
  {t, -5, 10}, PlotStyle → {Green, Red}]
                 プロットスタイル     緑      赤
```




そこで、時間領域の入出力波形と、重ね合わせてみよう。
図1のLPFの入出力でFourier係数が、それぞれに最適近似(相関が最も高そうな)の正弦波を与えている様子を見て欲しい。

```
Show[grvin, grvout, grfourier, PlotRange → All]
示す                            プロット範囲     すべて
```




カットオフ周波数fc以外の周波数で、同様な計算をしてみると、学ぶことが多いだろう。

最後駆け足になってしまった。語り残したは多いが、大分遠くまで来たので、この辺りで踵を返すことにしよう。
できればそのうち、補遺として公開できればと思う。修行の足しにしてもらえれば幸いである。

質問があれば、なんなりと。