

回路の回り道2020_最終レポート_解題補遺

源代裕治 2020/03/06

先の解題ではFourier変換について十分な解説ができなかったので、この補遺を用意した。これまで習ってきたのとは一味違うFourier解析入門を味わってもらえればと願う。

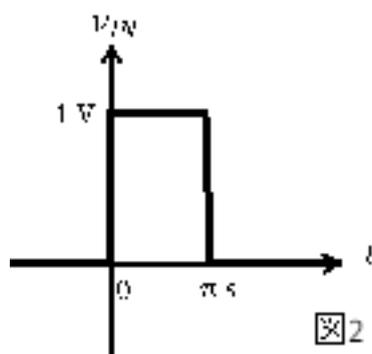
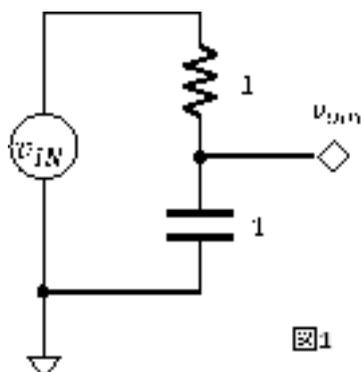
初期設定

ClearAll

[すべてをクリア]

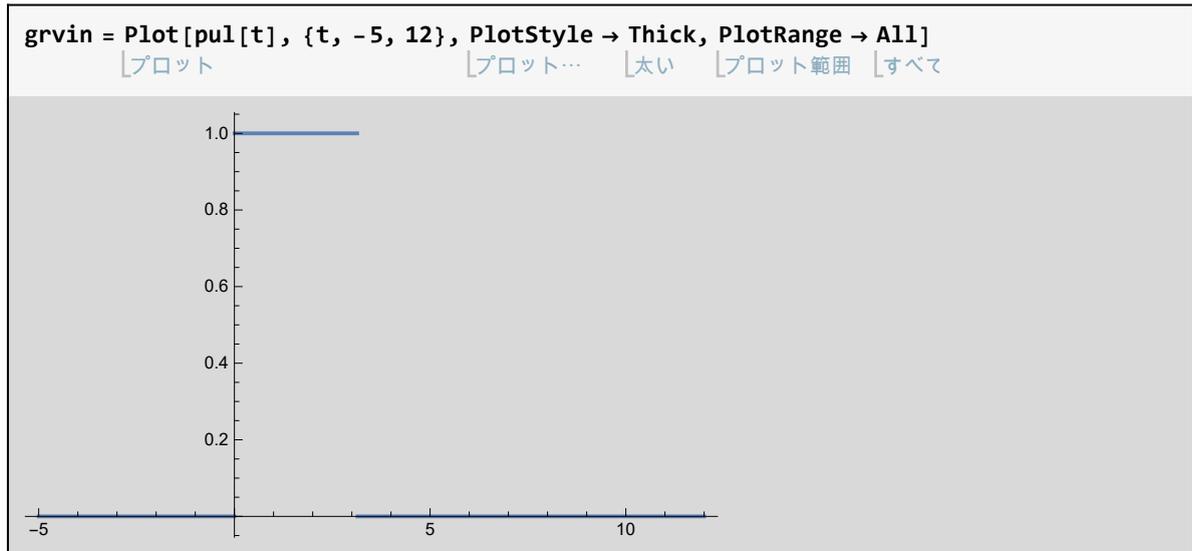
ClearAll

まず、レポート課題の入出力波形を定義しておこう。本補遺でも題材とするのは、図1のRC回路に図2のパルスを入力したときの入出力波形の関係である。



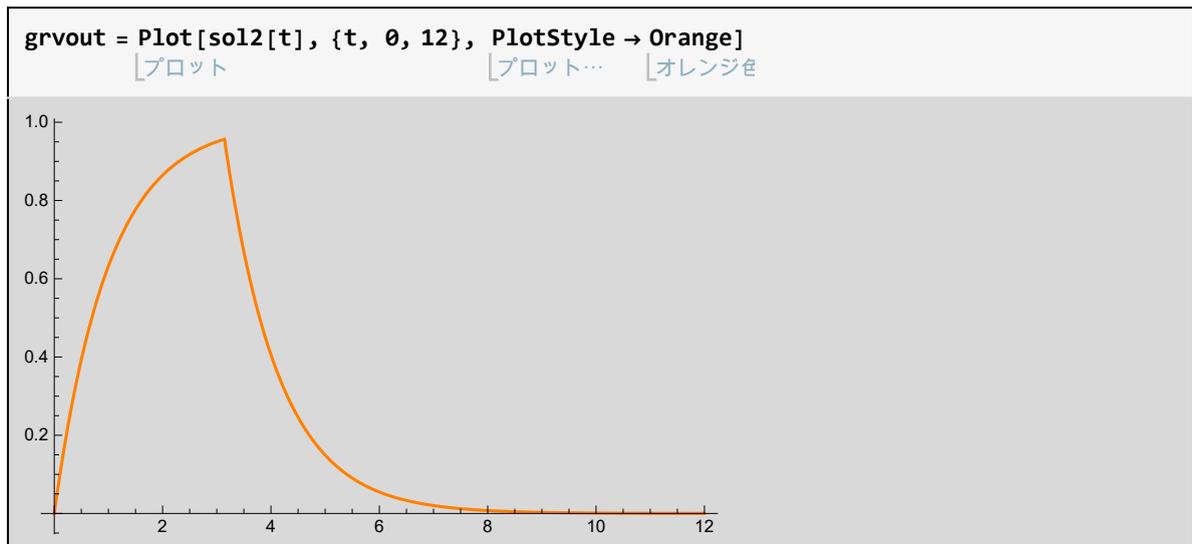
```
pul[t_] := UnitBox[t/π - 1/2]
```

[単位ボックス]



Laplace変換の手法(もしくは他の任意のODE解法)を用いて、出力波形が下記のように求まる。

```
sol2[t_] := (1 - e^-t) - (1 - e^(-t)) HeavisideTheta[-pi + t]
[ヘヴィサイトのシータ関数]
```



設問5

関数 $v(t)$ のFourier変換を、ここでは成分に分けて

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \cos[2\pi ft] dt$$

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \sin[2\pi ft] dt$$

の対と定義しよう。ここで $f_c = 1/(2\pi)$ Hzにおける $v_{in}(t)$ と $v_{out}(t)$ のFourier変換の値(周波数成分)、 $V_{in}(f_c)$, $W_{in}(f_c)$ と $V_{out}(f_c)$, $W_{out}(f_c)$ を求めなさい。(Fourier変換の世界)

解説

この問題での定義を「Fourier変換」と呼んだことで、混乱した学生さんが何名かいた。実の所、Fourier変換の定義にはいくつもバリエーションがあって、分野によっても慣習が異なる。すなわち、唯一これが正しい、という定義がある訳ではない。ただし、背景にある思想には当然共通するものがある。それはいかなるものであろうか。

この間に、簡単には答えられない。何をもって答えとするかもマチマチである。中には驚く程難解な答えもあるだろう。本稿ではFourier変換という巨象の一面にしか過ぎないが、比較的簡単と思われる解釈を紹介しよう。

役者は「円関数族」と「相関関数」である。

前者は講義で導入した円関数 $\exp(j\omega)$ と、その振幅/位相/周波数の違いを含む関数族である(関数の集まり: 関数集合と読んで良いが、数学用語でいう「集合」ほど厳密なものではない)。今回の議論では、円関数族の範囲を厳密にしておく必要はないが、その虚数成分、実数成分を取り出して \sin や \cos も含めた用語と考える方が便利である。実際本稿では \sin や \cos などを主に扱う。このような円関数族は「三角関数」と言う呼び方が広く用いられている。本稿もそれに従い、三角関数という言い方をする。

余談ながら、三角関数の信号波形をついつい「三角波」と呼んでしまいがちである。通常は「三角関数」の波は「正弦波」と言い慣わされている。この慣習に従っても混乱は少ないと思うが、じゃあ、余弦波ってどうすの、とか困ってしまう。そこで三角関数族の信号であることを示すときは「三角関数波」というまどろっこしい言い方を出来るだけ使おうと思う。

円関数族は、定係数ODEにおける固有関数(eigen function)である。そこで円関数族の要素(関数)は、微分や積分をしても円関数族の範囲(domain)にとどまること、周波数は変わらずに振幅と位相がずれるだけであることである。固有関数には一意性があり、このような特徴を持つのは円関数族に限られる。これが、交流理論において円関数族が中心的役割を担う理由である。

つぎに、もうひとつの役者「相関関数」を考えよう。相関関数は、ふたつの信号 $u(t)$, $w(t)$ が、どのくらい似ているかを調べる方法のひとつである。このような問題は例えば、 $u(t)$ がアンプへの入力、 $w(t)$ が出力として、両者の比較は、そのアンプの忠実度を調べる上で必要になる。アンプでは入出力の波形は良く似ているが、ゲインとか位相とかは大きく異なる。比較するとき、無視すべき相違と無視できない相違があることになる。さらに議論を進めると、一見すると全然似ていない波形でも、何かの類似性が隠れているかもしれない。そのような状況にも対応できる類似性の尺度が欲しい。

この要望に対する応えは、いくつもあるだろうがひとつ、次の積分で定義される「相関関数」 Φ_{uw} が、類似性の指標としていくつも都合の良い性質を持っている。

$$\Phi_{uw}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) w(t - \tau) dt$$

考え方としては、二つの信号を時間方向にずらしていったときの重なり具合を見よう、というものである。類似性を見るときに動かせるのは時間だけである。振幅方向は変えられないが、ずらし時間 τ による相関の大小をみるだけなら困らない。

この積分は、 u と w が同じ信号のとき $\tau=0$ で最大になることは想像が付くだろう。反対に全然違う波形の時は、両者の積には正負が交互に現れて、どのような τ を選んでも結果が0に近くなるだろう。信号に何らかの類似性があるなら、一番良く重なる時間関係のとき $\Phi_{uw}(\tau)$ が最大になるだろう、というのが相関関数の考え方である。

(実は、色々な条件を明示しないと、この主張は正しくない。特に、関数値が複素数値を取る場合(複素信号の場合)は、この定義自体を修正する必要がある。高橋康先生に倣い、鷹揚に行こう。)

定義式は u と w が非対称に見えるが、相対位置だけで値が決まるから、 u と w を交換しても値は同じになる。また、信号位置を両方同じだけずらしても結果は変わらないことを注意しておこう。たとえば $u(t+123)$ と $w(t+123)$ の相関関数は同じになる。この性質は積分範囲が実数全体であることから来ている。対照的にLaplace変換のように、非負の半区間しか積分しない場合は、原点ずらしの影響が見えてくる。

一方積分区間が無限であることにより、無限に広がる信号は積分が計算できない問題が発生することもある。数学的には複雑な回避策(例えば超関数論とか)が必要かもしれないが、我々はこのみち、うたかたの信号しか扱わないので、あまり気にすることはない(が、議論が工学的に有用であることは要求されよう)。

相関関数を用いたひとつの問題設定として、 $u(t)$ という対象信号に対し、ある関数族の中から選んだ $w(t)$ でどのくらい良く近似できているかというものがある。関数族としてはたとえば、三角関数とか矩形波とかの限定が考えられる。この見方には以下の議論において、段々に馴染んで行けると思う。

なお、相関関数と似たような式で、畳み込み $u*w$ が定義されることは既習であろう。

$$u*v(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) w(\tau-t) dt$$

畳み込みは要するに時間軸を反転した関数との相関関数である。似た性質も多数あるが、用途はかなり違ってくる。話は尽きないが、本線に戻ろう。

相関関数の例 その1

相関関数の定義式は、見ただけでは何も分からないだろう。まずは簡単な例で、その感触を得よう。

図2のパルス自身の相関関数を計算する。同じ信号の相関を特に「自己相関」という。

下記のスクリプトがちょっと間接的な関数定義になっているのは、Mathematicaに言うことをきかせるためのおまじないと思って良い。

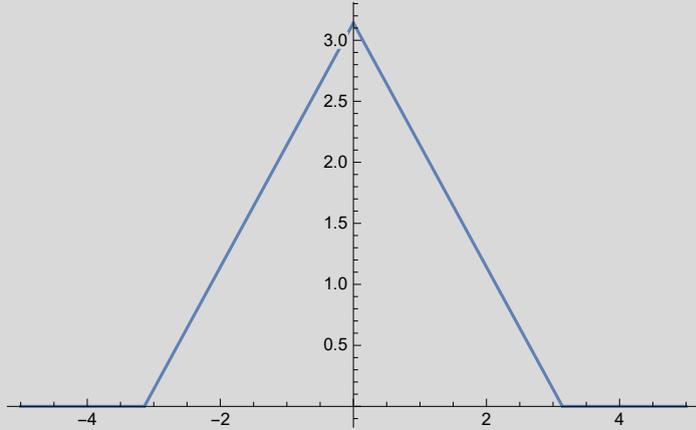
```
eq1 = Integrate[pul[t] pul[t - τ], {t, -Infinity, Infinity}]
```

$$\begin{cases} \pi - \tau & 0 < \tau < \pi \\ \pi + \tau & -\pi < \tau \leq 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
phi1[t_] := eq1 /. τ -> t
```

```
grphi1 = Plot[phi1[t], {t, -5, 5}]
```

プロット



自己相関の特徴は、 $\tau=0$ で最大値(正の値)をとり、左右対称なことである。(最大値は他の時刻にも発生することがある。)

$\tau=0$ の値は、信号が持つエネルギーと一致する。(信号処理では、自乗の積分を、次元とは無関係にエネルギーと称する。)

矩形波の相関は三角波になった。では、もう一度パルスとの相関を取ってみる。

```
eq2 = Integrate[pul[t] phi1[t - \tau], {t, -Infinity, Infinity}]
```

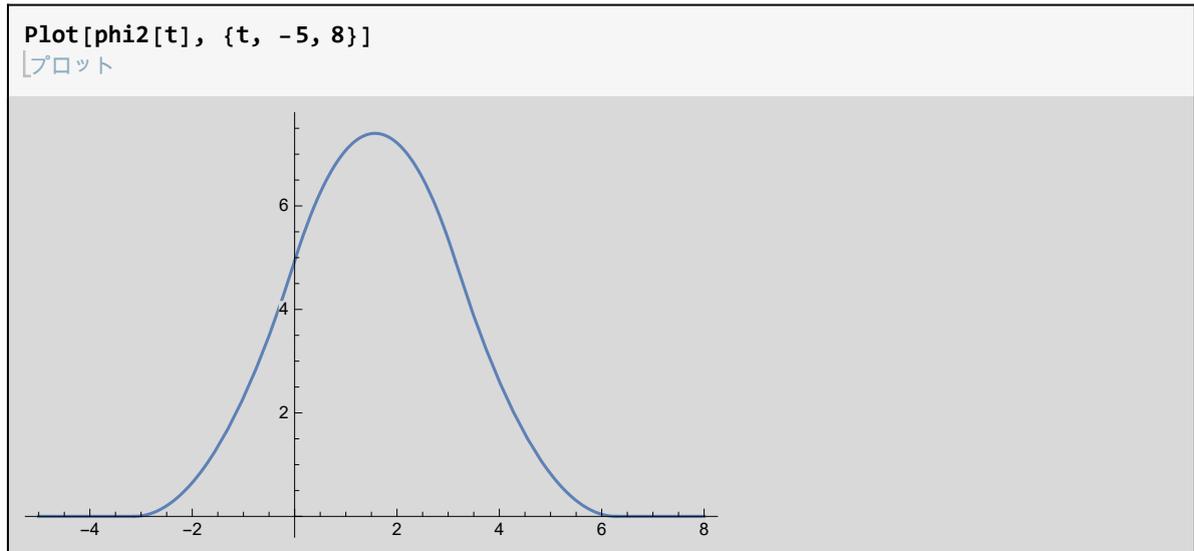
積分

無限大

無限大

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (\pi + \tau)^2 & -\pi < \tau < 0 \\ \frac{1}{2} (\pi^2 + 2\pi\tau) & \tau = 0 \\ \frac{1}{2} (\pi^2 + 2\pi\tau - 2\tau^2) & 0 < \tau < \pi \\ \frac{1}{2} (2\pi\tau - \tau^2) & \tau = \pi \\ \frac{1}{2} (4\pi^2 - 4\pi\tau + \tau^2) & \pi < \tau < 2\pi \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
phi2[t_] := eq2 /. \tau -> t
```



今度は放物線の組合せになっている。関数値が0でない範囲(数学用語では台という)が、元のふたつの関数の台の足し合わせになっている様子が観測される。

相関を取る操作を繰り返すと3次関数、4次関数と次数が上がって行くことが容易に想像できる。無限回繰り返すと、興味深い結果に収束する(一手間掛けないと収束はしないかもしれない)のだが、どこに行き着くかは皆さんのお楽しみとしておこう。

先に相関関数は、二つの関数の類似度合いであると表明した。ならばその最大値を取る所では、類似度が最大になっていることが期待される。どんな具合か見てみよう。

FindMaximum[phi2[t], t]
[極大値を求める]

{7.4022, {t → 1.5708}}

このtは、どうやら $\pi/2$ ではないかと推察する。

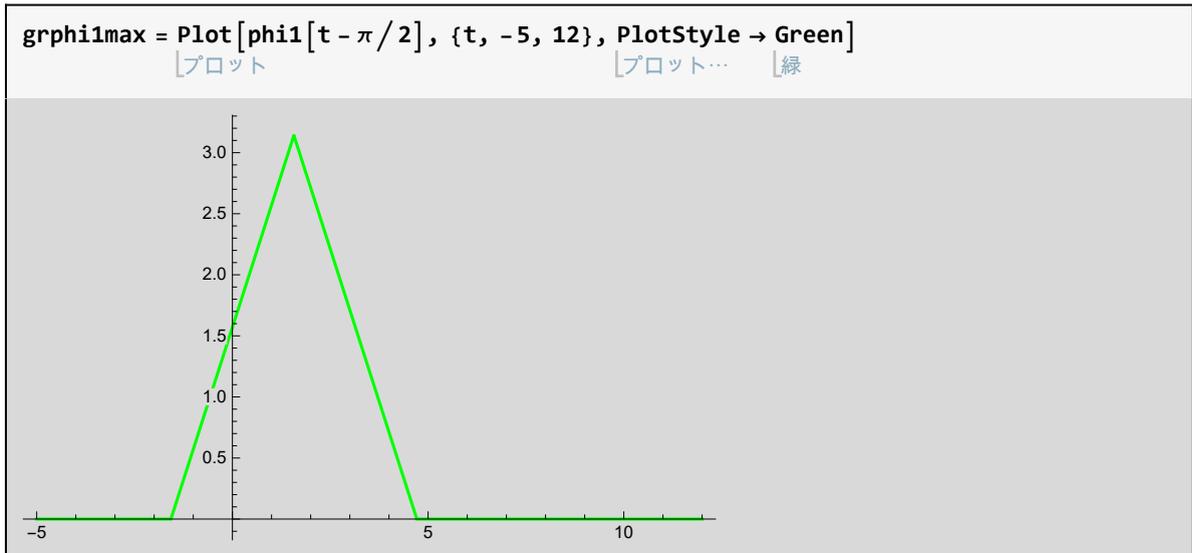
phi2[$\pi/2$]

$$\frac{3\pi^2}{4}$$

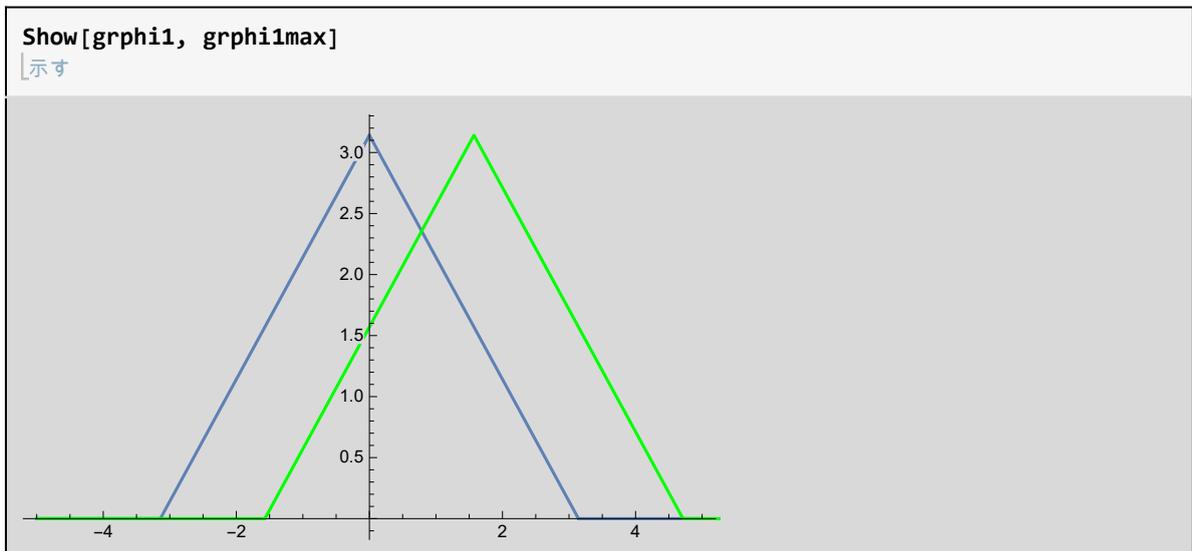
N[phi2[$\pi/2$]]
[数値]

7.4022

推察は当たってそうだ。相関を取った片方の関数はphi1(t)であったが、それを $\pi/2$ だけ右にシフトした波形をプロットする。

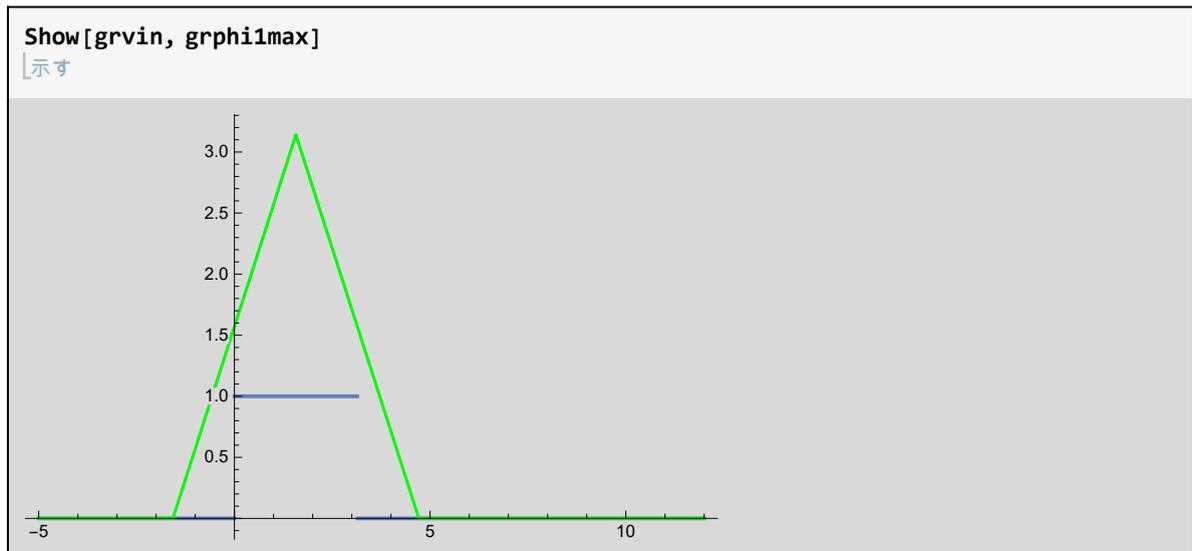


もとの波形と重ねてみると、時間ずらしの意味が見やすいかも知れない。頭の中で、波形が動くようすがイメージできるだろうか。



これを相関のもう一つの片割れであるパルスpul[t]のグラフと重ね書きする。

見るからに、 $\phi_1[t-\tau]$ の中(ϕ_1 を左右にずらすという自由度の中で)、 $\tau=\pi/2$ が最も良い位置そうである。



相関関数の例 その2

つぎに興味深い例として、三角関数と相関を取る場合を考えよう。

初期設定の章で定義した単パルスpul[t]とCos[2 π f t]との相関関数は、下記の積分で与えられる。

単パルスpul[t]は(0,π)で1で、それ以外では0を取るので、積分範囲が(0,π)の範囲に限定され、単にCos関数とその範囲で積分すれば済む。

```
eqc1 = Integrate[Cos[2 π f t - τ], {t, 0, π}] // TrigReduce
```

積分

余弦

三角関数の簡縮

$$\frac{\text{Sin}[2 f \pi^2 - \tau] + \text{Sin}[\tau]}{2 f \pi}$$

```
phic1[t_, f_] := Evaluate[eqc1 /. τ → t]
```

評価

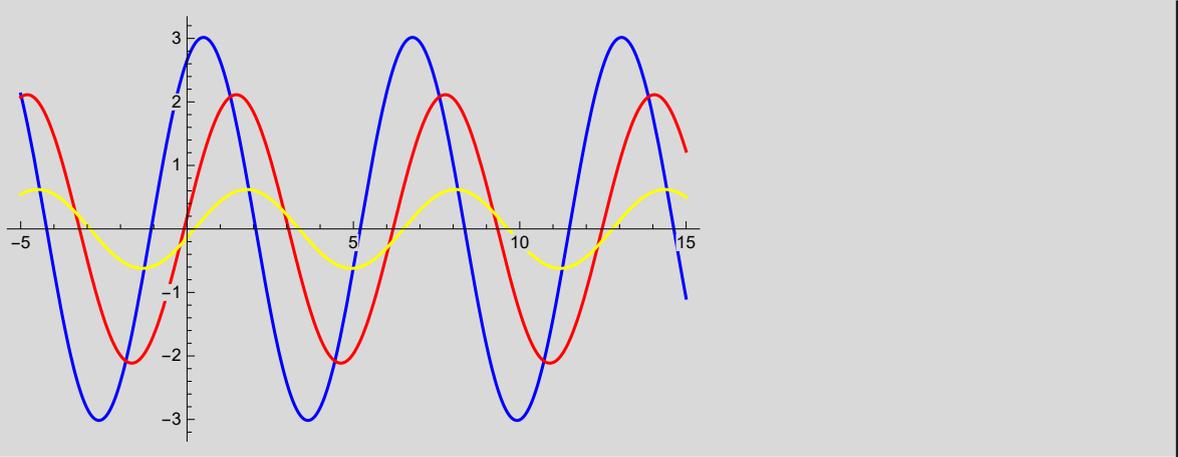
なお上の定義で、相関関数の定義に忠実ならCos[2 π f (t-τ)]とすべきかもしれない。しかしこの定義で以下の計算をしたところ、時間因子τに周波数依存を持たせないほうが都合が良い。

理論的にもっと深い説明もありそうな気がするが、ここはpragmaticに行こう。有用な定式化法にはきっと何かある。

あるいは、周波数fが時間のスケール変換因子であることを意識している、と主張できるかも知れない。

いくつかの周波数で相関関数をプロットしてみよう。

```
Show[Plot[phic1[t, 0.05], {t, -5, 15}, PlotStyle -> Blue],
[示す [プロット [プロット... [青
Plot[phic1[t, 0.15], {t, -5, 15}, PlotStyle -> Red],
[プロット [プロット... [赤
Plot[phic1[t, 0.5], {t, -5, 15}, PlotStyle -> Yellow], PlotRange -> All]
[プロット [プロット... [黄色 [プロット範囲 [すべて
```



この相関関数が周期 2π の三角関数になっている様子が観察できる。

上図からは周波数が上がるとともに振幅が小さくなっているように見えるが、単調に小さくなって行く訳ではない。たとえば $f=1/\pi$ だと

```
phic1[t, 1/π] // Simplify
[簡単な形式に
```

0

と、恒等的に0になっている。fが $1/\pi$ より少し大きくなってしばらくは振幅が増大して行く。興味深いのは $f=0$ の場合で、式の形としては $0/0$ の不定になる。しかし極限は存在し、 $t = 0$ の位置にピーク π を持つ三角関数である。

```
Limit[phic1[t, f], f -> 0]
[極限
```

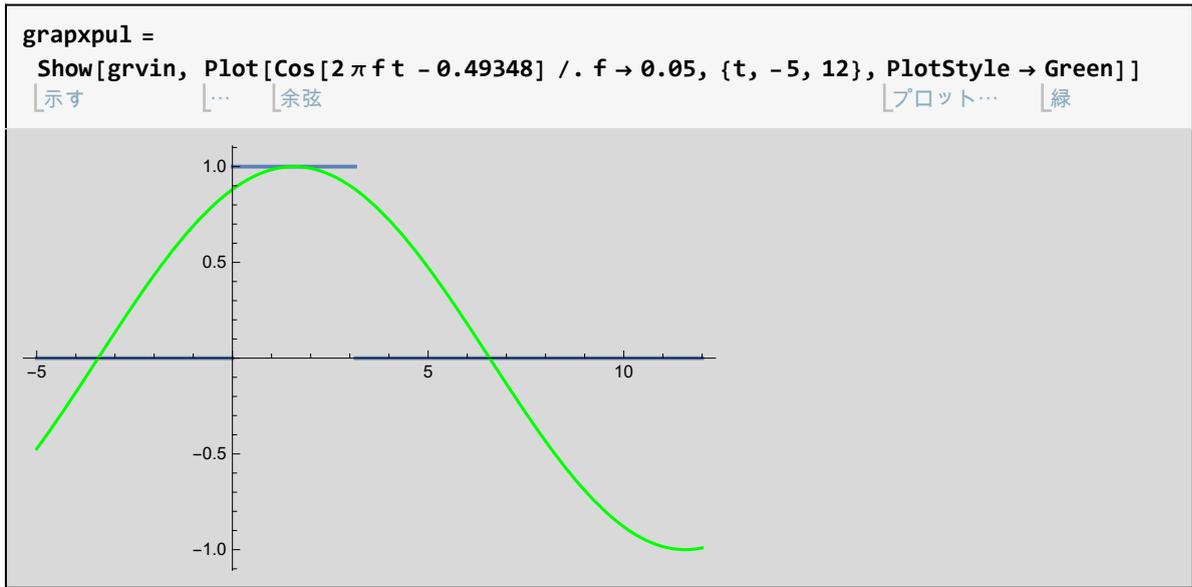
$\pi \text{Cos}[t]$

この結果を定義式に戻って考えると、相関をとっているのが周波数を0にした三角関数、すなわちDCであって、 $t=0$ のときパルスの面積を示す、と理解できる。上で $\text{Cos}[t]$ が掛かっているのは、周波数0の三角関数でも、その位相をずらすとDCレベルが変わって行く、と解釈できよう。

相関関数が最大になるときは、三角関数族の制約の中で相方の信号を最も良く近似できている状況を意味している。たとえば $f=0.05$ に対し、図2の矩形波 $\text{pul}[t]$ との最大相関を求めてみよう。

```
maxc1 = FindMaximum[phic1[t, 0.05], {t, 0}]
[極大値を求める
```

{3.01563, {t -> 0.49348}}



上の図で三角関数を左右どちらにずらしても近似度合いが劣化するであろうことは推察されるであろう。図2のパルスを $f=0.05$ の三角関数波で近似する場合、 $\phi=0.49348$ ずらしが最良近似なのである。(単位が時間ではなく角度になっているが、鷹揚に行こう。)

上図からは逆に、三角関数波でパルスを近似するなんて、土台無茶であることを示しているようにも見える。これはもっともな感想である。何かの信号の「ある周波数における成分」なるものは、それだけでは大した情報を持っていないのではないだろうか。ところが相関関数を周波数に渡って見ると、元の信号がどんなものであったかが浮かび上がってくる、というのがFourier解析理論の驚異である。本稿では、その入口までも行かない。むしろ、それがいかなるものであるかに注目して行こう。

相関関数の成分としてのFourier変換

eqc1の式の形からは、それが三角関数になっている多少分りにくいかもしれないが、これは三角関数の定積分なので、結果もひとつの三角関数になっている筈である。(「円関数は積分の固有関数である。」と習ったことが活きる場面である。)

eqc1が三角関数族のひとつなら、それを振幅Aと位相 ϕ で $A \cos(\tau+\phi)$ の形で表現することができる。あるいは、eqc1をcos成分aとsin成分bを用いて $a \cos(\tau)+ b \sin(\tau)$ のように表現することもできる。前者の表現は位相 ϕ の計算にarctanが必要であり、0で割ったり不連続になったりという困難が伴うので、後者の表現の方が何かと便利である。

Bode線図で、位相が180°飛んでいる図を見たことのある方も多いただろう。この機構が関連しているのである。(本章の最後に位相飛びの例を出す。)

Mathematica自動では中々所望の結果が得られなかったので、半分手計算で行くために、まずeqc1の分子第1項に加法定理を使ってみる。

```

Sin[2 f π²] Cos[τ] - Cos[2 f π²] Sin[τ] // Simplify

```

正弦 余弦 余弦 正弦 簡単な形式に

```

Sin[2 f π² - τ]

```

この結果でeqc1を書き換えると、

$$\text{eqc2} = \frac{\underbrace{\text{Sin}[2 f \pi^2]}_{\text{正弦}} \underbrace{\text{Cos}[\tau]}_{\text{余弦}} + (1 - \underbrace{\text{Cos}[2 f \pi^2]}_{\text{余弦}}) \underbrace{\text{Sin}[\tau]}_{\text{正弦}}}{2 f \pi}$$

$$\frac{\text{Cos}[\tau] \text{Sin}[2 f \pi^2] + (1 - \text{Cos}[2 f \pi^2]) \text{Sin}[\tau]}{2 f \pi}$$

という表現が得られた。検算してみると

$$\text{eqc2} - \text{eqc1} \quad // \quad \text{Simplify}$$

[簡単な形式に]

$$0$$

どうやら計算間違いはしていないようだ。すなわち、図2の単パルスpul[t]と三角関数の相関関数は $\{\text{Sin}[2 f \pi^2]/(2 f \pi), (1 - \text{Cos}[2 f \pi^2])/(2 f \pi)\}$ という成分で表現される。

円関数が積分の固有関数であるという知識を使うと、任意の関数に対し、三角関数との相関がcos成分とsin成分に分けられることが推察できる。実際には積分が発散してしまうような関数もあって、細かい制約が必要になるが、有限時間の信号(台が有界な関数)だったら、積分もそんなに困難なく遂行できるに違いない。

相関関数がcos成分、sin成分で表せるのであれば、その成分を直接求めたくなる。それには、 $\tau=0$ の時に相関関数がcos成分、 $\tau=\pi/2$ のときにsin成分を与えることに着目すればよい。相関をとってからこの代入を行う代わりに、相関の定義式に τ の値を代入してから積分すれば良い。

pul[t]に対してこれを実行してみよう。 $\tau=0$ に対しては

$$\text{cc1} = \text{Integrate}[\text{Cos}[2 \pi f t], \{t, 0, \pi\}]$$

[積分] [余弦]

$$\frac{\text{Sin}[2 f \pi^2]}{2 f \pi}$$

$$\text{ain}[f_]:= \text{Evaluate}[\text{cc1}]$$

[評価]

$\tau=\pi/2$ に対しては

$$\text{cs1} = \text{Integrate}[\text{Sin}[2 \pi f t], \{t, 0, \pi\}]$$

[積分] [正弦]

$$\frac{\text{Sin}[f \pi^2]^2}{f \pi}$$

$$\text{bin}[f_]:= \text{Evaluate}[\text{cs1}]$$

[評価]

が得られる。cs1の計算では $\text{Cos}[2 \pi f t - \pi/2] = \text{Sin}[2 \pi f t]$ の関係を利用した。

これらの結果をeqc2と比べると、cc1は一致、cs1は表現の違いにすぎないことが確認できる。(2倍角の公式)

$$\text{cs1} - (1 - \text{Cos}[2 f \pi^2]) / (2 f \pi) // \text{Simplify}$$

0

これまでの議論を一般化してまとめよう。

関数 $u(t)$ と $\text{Cos}[2 \pi f t]$ との相関関数 $\text{phiu}(\tau)$ は

$$\begin{aligned} \text{phiu}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos(2 \pi f t - \tau) dt \\ &= a u \text{Cos}[\tau] + b u \text{Sin}[\tau] \end{aligned}$$

と表される。ここで各成分は

$$\begin{aligned} a u(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos(2 \pi f t) dt \\ b u(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin(2 \pi f t) dt \end{aligned}$$

で求まる。これらは $u(t)$ の独立変数 t を f に変える積分変換である。前者を余弦変換、後者を正弦変換という。

設問5の記号だと $V(f)$, $W(f)$ だが、 $u(t)$ の係数というのが見やすいように記号を変えた。悪しからず。

この係数(あるいは成分)の組をFourier変換と呼ぼう、というのが今回のレポート課題でのFourier変換の定義である。

Eulerの公式 $\cos(w t) + j \sin(w t) = \exp(j w t)$ を用いると

$$\begin{aligned} a u(f) - j b u(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) (\cos(2 \pi f t) - j \sin(2 \pi f t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-j 2 \pi f t) dt \end{aligned}$$

であるから、 $a u$, $b u$ は $u(t)$ の通常(?)のFourier変換の実部と虚部(の符号反転)であることが分かる。実際には殆ど同じことをやっているのである。

どちらの定義にしろFourier変換の定義から、ずらしパラメータ τ が消えていることに注意しよう。これにより、「相関関数の \cos 成分、 \sin 成分」というイメージは消えて、「三角関数を積分核(積分時に掛ける重み因子)とする積分変換で、独立変数を t から f に変える」というイメージに移る。視点の大移動である。

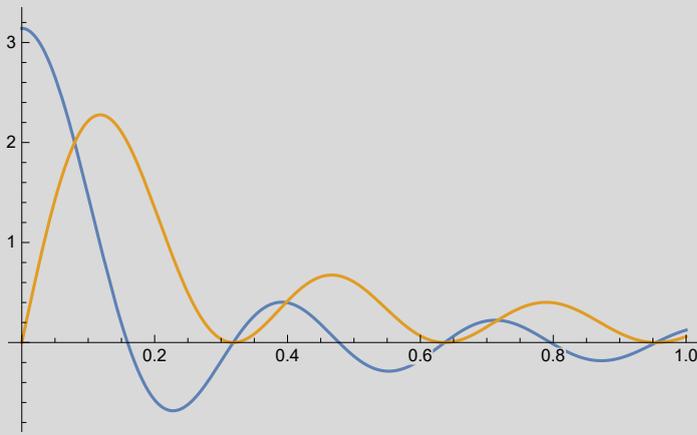
Fourier変換の f にしろLaplace変換の s にしろ、「変換」という意識が高すぎて、その教育において「特定の周波数での積分」という発想が失われている。我々は両方の足場を経験することで、自在に視点を移動できるようにならうではないか。

LPF入出力波形のFourier変換

図1のLPFに図2まのパルスを入力したときの、入出力波形のFourier変換を求めよう。

入力に対しては既に a_{in} と b_{in} として求まっている。その f 特をプロットしておこう。

```
grfin = Plot[{ain[f], bin[f]}, {f, 0, 1}, PlotRange -> All]
      プロット                               プロット範囲 すべて
```



次に出力のFourier変換である。多少技巧的な計算になるが、区間を分けた積分で求まる。t<0では信号がないので、積分範囲はt>0として良い。

まず余弦変換から。

```
part1c2 = Integrate[sol2[t] Cos[2 π f t], {t, 0, π}]
          積分                               余弦
```

$$\frac{\text{Sin}[2 f \pi^2]}{2 f \pi} + \frac{e^{-\pi} (-e^{\pi} + \text{Cos}[2 f \pi^2] - 2 f \pi \text{Sin}[2 f \pi^2])}{1 + 4 f^2 \pi^2}$$

```
part2c2 = Assuming[f > 0, Integrate[sol2[t] Cos[2 π f t], {t, π, Infinity}]]
          仮定                               積分                               余弦                               無限大
```

$$\frac{e^{-\pi} (-1 + e^{\pi}) (\text{Cos}[2 f \pi^2] - 2 f \pi \text{Sin}[2 f \pi^2])}{1 + 4 f^2 \pi^2}$$

```
part1c2 + part2c2 // FullSimplify
                  完全に簡約
```

$$\frac{-4 f \pi \text{Sin}[f \pi^2]^2 + \text{Sin}[2 f \pi^2]}{2 f \pi + 8 f^3 \pi^3}$$

```
ayout[f_] := Evaluate[part1c2 + part2c2 // FullSimplify]
              評価                               完全に簡約
```

設問はfc=1/(2 π)での値である。

```
ayout[1 / (2 π)]
```

```
-1
```

つぎに正弦変換。

```
part1s2 = Integrate[sol2[t] Sin[2 π f t], {t, 0, π}]
```

[積分](#) [正弦](#)

$$\frac{\text{Sin}[f \pi^2]^2}{f \pi} + \frac{e^{-\pi} (-2 e^{\pi} f \pi + 2 f \pi \text{Cos}[2 f \pi^2] + \text{Sin}[2 f \pi^2])}{1 + 4 f^2 \pi^2}$$

```
part2s2 = Assuming[f > 0, Integrate[sol2[t] Sin[2 π f t], {t, π, Infinity}]]
```

[仮定](#) [積分](#) [正弦](#) [無限大](#)

$$\frac{e^{-\pi} (-1 + e^{\pi}) (2 f \pi \text{Cos}[2 f \pi^2] + \text{Sin}[2 f \pi^2])}{1 + 4 f^2 \pi^2}$$

```
part1s2 + part2s2 // FullSimplify
```

[完全に簡約](#)

$$\frac{\text{Sin}[f \pi^2] (2 f \pi \text{Cos}[f \pi^2] + \text{Sin}[f \pi^2])}{f \pi + 4 f^3 \pi^3}$$

```
bout[f_] := Evaluate[part1s2 + part2s2 // FullSimplify]
```

[評価](#) [完全に簡約](#)

設問のもうひとつは、この $f_c=1/(2\pi)$ での値である。

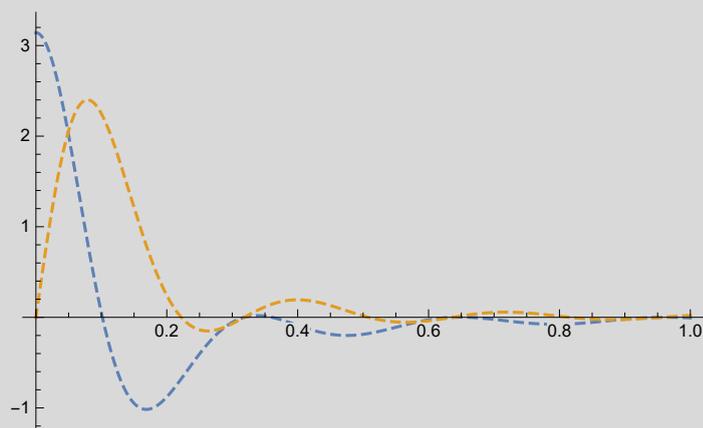
```
bout[1 / (2 π)]
```

```
1
```

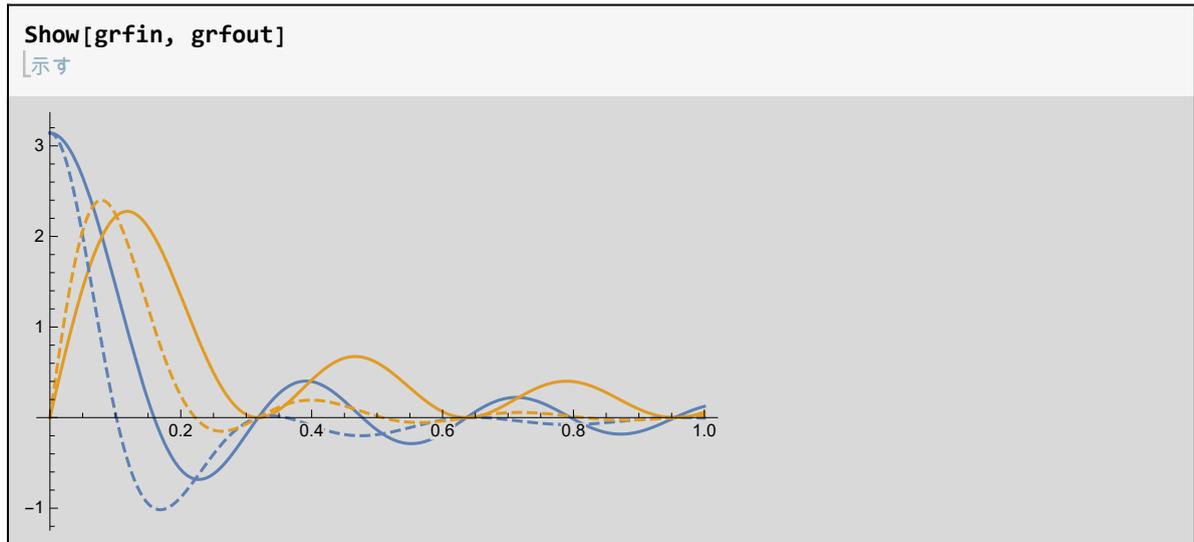
aout, boutをプロットしてみよう。

```
grfout = Plot[{aout[f], bout[f]}, {f, 0, 1}, PlotRange → All, PlotStyle → Dashed]
```

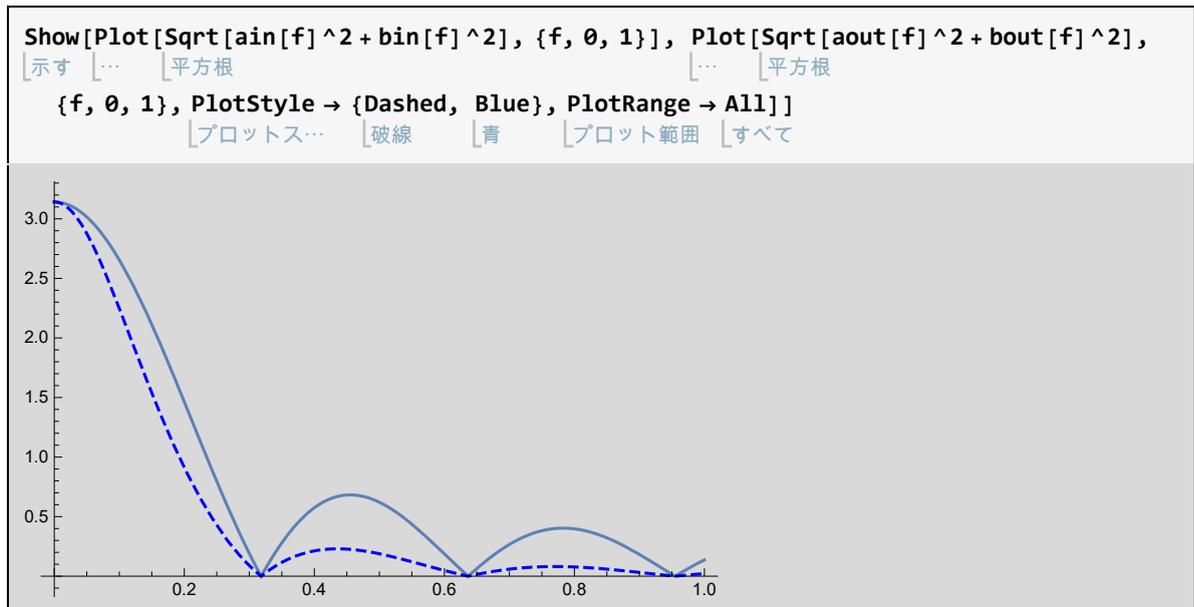
[プロット](#) [プロット範囲](#) [...](#) [プロット...](#) [破線](#)



入出力のf特をプロットする。

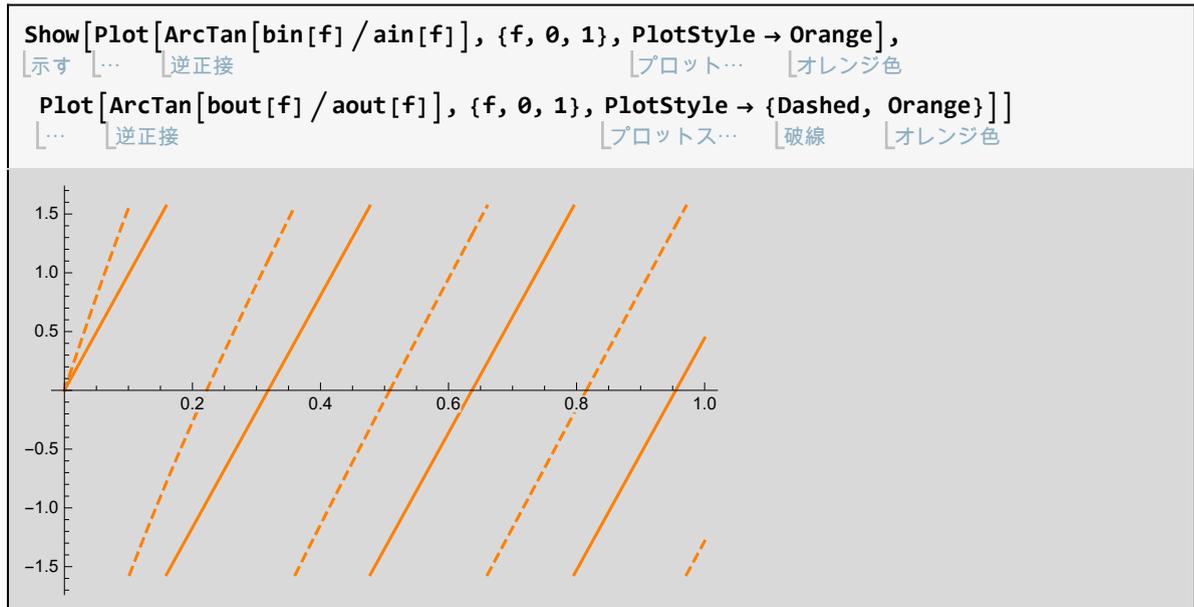


これだけでは何が起きているかはわかりづらい。
手立てのひとつとして、振幅に変換してプロットしてみよう。



出力が高域で減衰している様子や、入力のゼロ点は出力でもゼロ点であることが観測される。

位相もプロットして見よう。



本来は連続している筈の位相が、ArcTanをとることでブツブツに切れてしまっている。それでも心眼を使うと、高域程位相が遅れる様子や、群遅延がフラットになって行く様子が見えて来る(ことを願う)。

出力の方が傾きが大きいので、群遅延も大きいことも観測される。

群遅延とは、ざっくり言うと位相特性の接線の傾きである。こう解釈すると、群遅延と遅延の違いが自明になって来る。

もう少し進むだけで、これらの図とBode線図との対応が見えて来るのだが、その手前で向きを変えよう。

このまま一步進むだけで、入力f特にLPF特を掛けると出力f特になるという事実が確認できる。ただしすべて複素数の世界で計算する。

当たり前前のを具体的な例で確認するのも修行である。

設問6

前項のFourier係数から決まる二つの正弦波

$$\hat{v}_i(t) = v_i(f_c) \cos[2\pi f_c t] + w_i(f_c) \sin[2\pi f_c t]$$

$$\hat{v}_o(t) = v_o(f_c) \cos[2\pi f_c t] + w_o(f_c) \sin[2\pi f_c t]$$

は、周波数 f_c における入出力信号の周波数成分から作った周期関数である。

これらの波形を $v_i(t)$ と $v_o(t)$ のグラフに重ね書きしてみよう。どのような推察ができるだろうか。

続いて、 $\hat{v}_i(t)$ と $\hat{v}_o(t)$ の振幅比と位相差を、2.項で求めたBode線図に追記してみよう。どのような一般則が推察されるだろうか。(Fourier展開から交流理論の世界へ)

解説

Fourier変換から作られる最良近似三角関数

前章で、任意の関数 $u(t)$ と三角関数 $\cos(2\pi ft)$ との相関関数が一般に、 $a \cos(\tau) + b \sin(\tau)$ の形で表されることを見た。

この成分 a 、 b は、 $u(t)$ の余弦変換と正弦変換として求まる。両方を合わせたものが、本稿で用いるFourier変換の定義である。

以下の説明でも、設問と記号を変えることにする。

ここで多少唐突であるが、このFourier変換 a, b を用いて作られる関数

$$w(t) = a \cos(2\pi ft) + b \sin(2\pi ft)$$

は、どのような信号であろうか。

まず、式の形から、周波数 f の三角関数波であることはすぐわかる。

次に、そのFourier変換を行いたい、無限に広がる三角関数なので、積分が発散してしまう。そこで代わりに、その1周期分の積分を考えよう。

独立変数をいじって $k = ft$ と置けば、周波数 f に関わらず積分範囲は $(0, 1)$ として良い。これは周期関数の1周期分の積分なので、積分範囲のシフトは同じ結果を与える。たとえば $(0.5, 1.5)$ としても良い。 $w(t)$ を書き直して

$$w(k/f) = a \cos(2\pi k) + b \sin(2\pi k)$$

とし、右辺の1周期分の余弦変換は

$\text{Integrate} \left[(a \text{Cos}[2\pi k] + b \text{Sin}[2\pi k]) \text{Cos}[2\pi k], \{k, 0, 1\} \right]$
<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small; color: #4F81BD;"> └積分 └余弦 └正弦 └余弦 </div>

$\frac{a}{2}$

同様に1周期分の正弦変換は

$\text{Integrate} \left[(a \text{Cos}[2\pi k] + b \text{Sin}[2\pi k]) \text{Sin}[2\pi k], \{k, 0, 1\} \right]$
<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: small; color: #4F81BD;"> └積分 └余弦 └正弦 └正弦 </div>

$\frac{b}{2}$

となる。係数 $1/2$ を除くと、もとの相関関数と成分が同じになっていることが分かる。

いわば $w(t)$ は、もとの関数 $u(t)$ と同じ相関関数を与える三角関数波である。

もうひとつの解釈として、 $w(t)$ は三角関数族の範囲でできるだけ良く $u(t)$ を近似する関数である、と見なせる。

そこでここではこれを「最良近似三角関数」と呼ぶことにする。

ここでちょっと寄り道。上の積分では、三角関数の直交関係

```
Integrate[Cos[2 π k] Cos[2 π k], {k, 0, 1}]
```

積分 余弦 余弦

$$\frac{1}{2}$$

```
Integrate[Sin[2 π k] Sin[2 π k], {k, 0, 1}]
```

積分 正弦 正弦

$$\frac{1}{2}$$

```
Integrate[Cos[2 π k] Sin[2 π k], {k, 0, 1}]
```

積分 余弦 正弦

$$0$$

が活躍していると認識して置くことは有用であろう。

これらの積分のどこが「直交関係」なのかは既習であろうか。ざっくり言うと、関数空間(=適当な制約を満たす関数の集まり)に内積(という幾何学的性質)を定義すると、直交している関数がこのような性質を満たすからである。ざっくりではない説明は、Hibert空間の入門書などに当たられたい。

入出力の最良近似三角関数、並びに可換な図式

図1のパルスpul[t]に対して最良近似三角関数を計算してみよう。

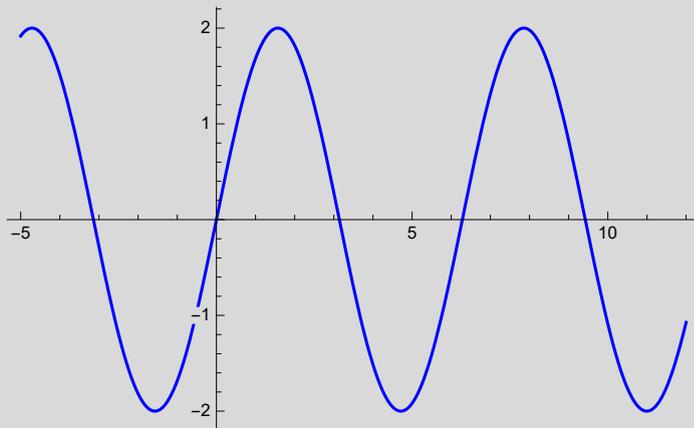
```
trigin[t_, f_] := ain[f] Cos[2 π f t] + bin[f] Sin[2 π f t]
```

余弦 正弦

例えば $f=fc=1/(2\pi)$ では

```
grtrigin = Plot[trigin[t, 1 / (2 π)], {t, -5, 12}, PlotStyle → Blue]
```

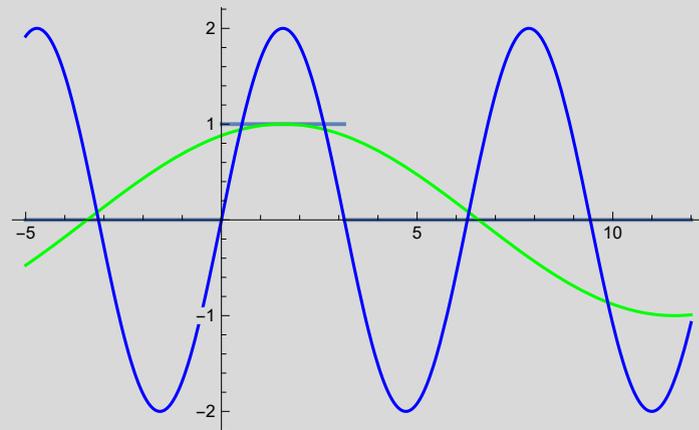
プロット プロット… 青



grapxpulと重ね合わせてみると、

```
Show[grapxpul, grtrigin]
```

示す



振幅は違うが、位相は緑(相関最大正弦波)と青(最良近似三角関数)で同じになっている。
振幅の違いは、相関の大きさを反映しているかどうかである。

つぎは出力。

```
trigout[t_, f_] := aout[f] Cos[2 π f t] + bout[f] Sin[2 π f t]
```

余弦

正弦

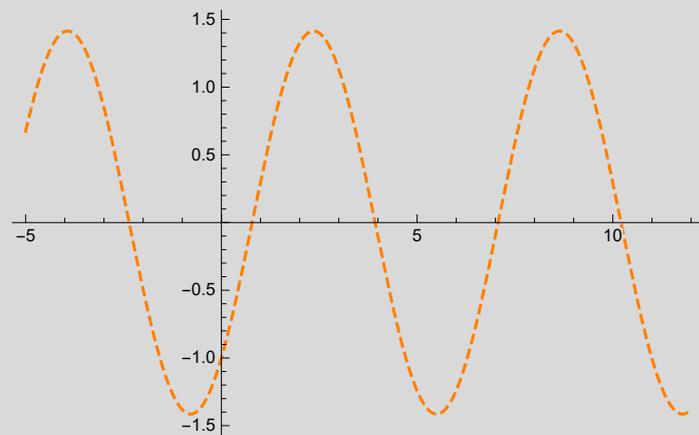
```
grtrigout = Plot[trigout[t, 1 / (2 π)], {t, -5, 12}, PlotStyle → {Dashed, Orange}]
```

プロット

プロットス…

破線

オレンジ色



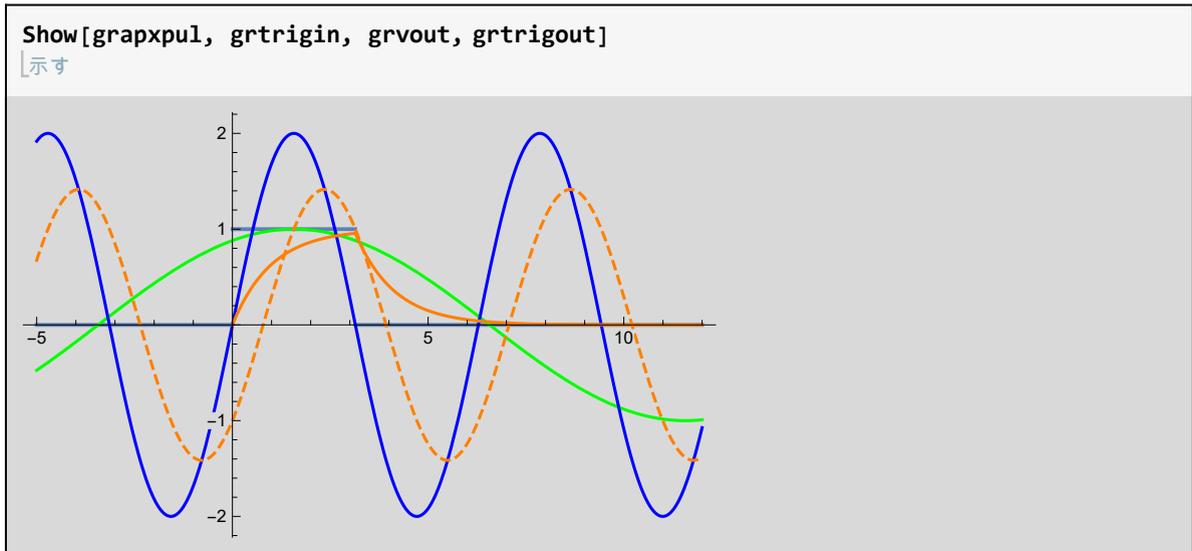
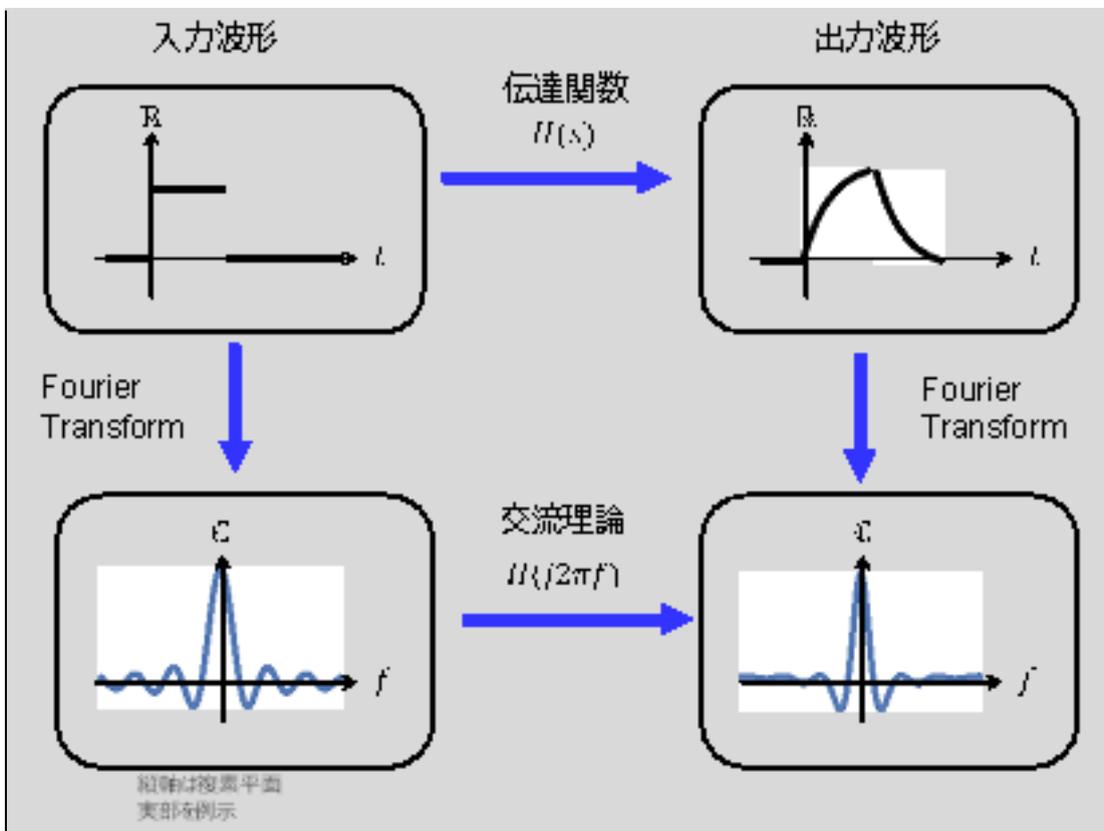


図1の1次系のBode線図は、 $f_c=1/(2\pi)$ で振幅-3dB、位相は45度遅れとなる。
 上図の入出力の最良近似三角関数を比べると、その振幅位相関係と対応していることが読み取れよう。
 フィルタを通して信号をFourier変換しても、信号をFourier変換してフィルタを通して、どちらも同じ結果になるのである。

この推察は、下の可換な図式でざっくりとは表現できる。ここでRは実数、Cは複素数を表す。
 複素数平面を縦軸にとることは難しいので、実部だけとったような図にした。他にもうまく図示できない所があるが、雰囲気を超える精密な描写はできていない。
 もっと良い表現があれば、是非提案して欲しい。



上の可換な図式が、本稿が目指した到達点である。

これらの交換関係が無意識に使う(悪い言い方をすれば混同して使う)ことで、多くの議論が(一見)単純になっている。しかしその弊害も多々見受けられる。

しばらくはどの世界で議論をしているか意識してみることをお勧めする(定義域が違えば自ずから定義も違ってくる)。

(例えば、信号 f 特と伝達関数 f 特は別物である。正弦波の周波数成分が0や ∞ になるのは定義の混乱による、などなど)