2023 年 12 月 26 日（火）

AD 変換器の分解能と複利計算に思う

群馬大学 名誉教授 小林春夫

(1) AD 変換器の分解能

魔法の壺があり，そこに入っているお金は翌日にはその 2 倍になると考える．
初日に 1 円いれると翌日には 2 円，翌々日には 4 円，…と増えていく．30 日後にはいくらになっているかと計算すると約 11 億円になっている．2 の 30 乗は 1,073,741,824 である．

2 のべき乗が極めて大きくなることのたとえとして Wikipedia には次のようにある．
「新聞紙を 26 回 2 つ折りにすると，富士山より高くなる」
「将棋盤問題：盤の最初の升目に一粒の小麦を置き，二升目には二粒，三升目には四粒と増やしていって，最後の升目(81 升目)の分だけを頂きたい」
→ 世界の小麦生産高の 2500 年分を越える

AD 変換器 (Analog-to-Digital Converter: アナログ信号をデジタル信号に変換する回路)では
その性能指標の一つとして分解能がある．
分解能が 3-bit であるとは入力信号範囲を $2^3 = 8$ レベルに分割する (下図).
分解能が 8-bit であるとは入力信号範囲を $2^8 = 256$ レベルに分割する．
分解能が 10-bit であるとは入力信号範囲を $2^{10} = 1024$ レベルに分割する．
分解能が n-bit であるとは入力信号範囲を 2^n レベルに分割する．

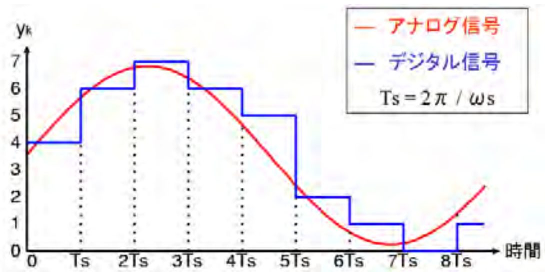

図 アナログ信号の 0, 1, 2, …, 7 の 8 レベルへの分割（3-bit 分解能）

多くの教科書に「分解能 n が 1 ビット増えると 信号と量子化ノイズ比は約 6dB 向上する」と書かれている．しかし 2^n の値そのものを記述しているものは少ない．
設計者は n が増えるとレベル数が極めて大きくなるという直感をもつべきであろう．

AD 変換器の精度を出すときには, n がある程度小さい時には内部容量間の相対精度が問題になり，この問題を解決するためには例えば自己校正技術が提案されている．n が大きくなり高精度を達成するためには自己校正技術だけでは対応が難しく，熱雑音が問題になり容量 C の値を大きくしなければならない（すなわちチップ面積と消費電力が大きくなる），すなわち AD 変換器の設計が変わってくる．

(2) 複利計算

2^nを書き直すと $(1+h)^n$, h=1 となる．これから複利計算の式が想起される．

$$y(t) = y_0 \, (1+h)^{t/T}$$

ここで y(t) は時刻 t での値，y_0は時刻 t_0での値, h は利率, T は時定数である．

複利では「7 と 10」の関係が重要である.
複利年率 7%で 10 年で元金が 2 倍になる. 複利年率 10%で 7 年で元金が 2 倍になる.

ある社会・経済学者は「今後の日本経済の年間成長率 1 %か 2 %かで大きな差」と評している.
年間 1%成長のときには 10 年後には 10%成長で, 年間 2%成長では 10 年後には 22%成長になる.

現在のデジタルトランスフォーメーション（DX）や AI 技術の進展・社会への普及により時定数 T が小さくなっており社会の変革のスピードが極めて速くなっている.
少し前に比べればドックイヤー(dog year) やキャッツイヤー(cat year) 以上かもしれない.

「3 年間鳴かず飛ばず」というやり方は現代ではあり得ないであろう.

「継続は力なり」の言葉があるが, 継続しなければそこで「複利の恩恵」がストップしてしまうからであろう.

複利の計算式に関係したネイピア数（自然対数の底）e の次の定義に関係する数学的な話も興味深い.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

「複利は人類による最大の発明である」アルバート アインシュタイン