

現代技術のベースになる数学と和算の共通性の小さな気付き

－ 電子回路設計と 9 去法, 11 去法

Small Awareness of Commonality Between Modern Technology and Wasan

－ Electronic Circuit Design and Casting Out Nine, Casting Out Eleven

李 雄炎, 桑名 杏奈, 小林 春夫 (群馬大学)

Xiongyan LI, Anna KUWANA, Haruo KOBAYSHI (Gunma University)

Abstract In the digital circuit design using binary representations, the remainder system is often used and it is based on three of the remaining design $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$. Recently we learned about Wasan of casting out nine, casting out eleven in decimal representations, and we inferred from these that it is easy to obtain the residues of $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ for a number in binary representation; we developed a C program and confirmed their validity with numerical simulation. In other words, we have realized the commonality of the remainder system of digital circuit design in the binary representation and Wasan of casting out nine, casting out eleven in decimal representation.

1. はじめに

筆者らは古典数学をアナログ・デジタル混載の電子回路設計に応用する研究を行っている。例えば魔方陣をデジタル・アナログ変換器の単位回路配列の選択アルゴリズム⁽¹⁾⁽²⁾に用いる、フィボナッチ数列を逐次比較近似アナログ・デジタル変換器の信頼性向上のための冗長設計に用いる⁽³⁾⁽⁴⁾などである。さらに孫子算経（剰余系アルゴリズム）を信号波形の周波数推定に用いる方式⁽⁵⁾⁽⁶⁾や時間デジタル変換回路⁽⁷⁾等のアナログ・デジタル混載回路設計に用いる方式の研究をしてきた。

剰余系アルゴリズムを 2 進数ベースのデジタルプロセッサに用いることは活発に研究されてきている。この分野を長年研究されている群馬大学 魏書剛先生、田中勇樹先生グループの学生さんの発表をたまたま拝聴する機会があったが、 $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ を基数にした剰余系を用いていた。デジタルではそのようにすることが多いとのことであるがその理由がわからなかった。

一方、2019年10月に集積回路分野の国際学会参加のために中国 重慶市に向かう機上で数学の啓蒙書を読んでいると、古来からインド、中国、さらに和算が盛んであった江戸時代の日本では 9 去法, 11 去法が (10 進数表現の数の) 加減乗算の演算チェックに用いられていることを知った。そのとき 2 進表現での剰余系は $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ を基数にする理由ではないかと思いつき、数式での解析とプログラム作成をしての検証を行った。その気付きの過程

を紹介する.

2. 10進数表現での9去法と11去法 ⁽⁸⁾

この節では例を用いて9去法, 11去法, および9去法を用いた10進数表現での2つの数の乗算の検算法, および10の剰余を示す.

<2.1> 10進数での9の剰余と9去法

例1. 34671 (10進) の9の剰余は3

$$34671 = 3852 \times 9 + 3$$

9去法: $3+4+6+7+1=21=2 \times 9 + 3$

例2. 29584 (10進) の9の剰余は1

$$29584 = 3287 \times 9 + 1$$

9去法: $2+9+5+8+4 = 28 = 3 \times 9 + 1$

例3. 81275 (10進) の9の剰余は5

$$81275 = 9030 \times 9 + 5$$

9去法: $8+1+2+7+5 = 23 = 2 \times 9 + 5$

10進数表現での数の9の剰余は, 各桁の和の9の剰余と等しい. これが9去法である.

<2.2> 9去法による乗算結果の検算

Aの9の剰余をa, Bの9の剰余をb \rightarrow ABの9の剰余は abの9の剰余になる

例1. $34671 \times 29584 = 1025706864$

$$3 \times 1 = \boxed{3}$$

Aの9の剰余 \times Bの9の剰余

$$1+0+2+5+7+0+6+8+6+4 = 39 = 4 \times 9 + \boxed{3}$$

ABの9の剰余

<2.3> 10進数での11の剰余と11去法

例1. 34671 (10進) の11の剰余は10

$$34671 = 3151 \times 11 + 10$$

11去法: $3-4+6-7+1=-1=-1 \times 11 + 10$

例2. 29584 (10進) の11の剰余は5

$$29584 = 2689 \times 11 + 5$$

11去法: $2-9+5-8+4 = -6 = -1 \times 11 + 5$

例3. 81275 (10進) の11の剰余は7

$$81275 = 7388 \times 11 + 7$$

11去法: $8-1+2-7+5 = 7 = 0 \times 11 + 7$

10進数表現での数の11の剰余は, 各桁を交互に加える引くの演算を行った数の11の剰余と等しい. これが11去法である.

<2.4> 10進数での10の剰余

自明であるが 10 進数表現での最終桁が 10 の剰余である.

<2.5> 数学的な記述

合同式とは, 割り算の余りのみに注目した等式のことである. 例えば, 7 と 4 は, どちらも 3 で割った余りが 1 である. これを, 合同式では $7 \equiv 4 \pmod{3}$ と書く. 「7 合同 4 モッド 3」と読む. 7 と 4 は 3 で割った余りのみに注目すれば等しいという意味である. より一般に, a と b を n で割った余りが等しいとき, 合同式では $a \equiv b \pmod{n}$ と書く. 合同式の応用として, 大きな数を 9 や 11 で割ったときの余りを簡単に求める方法がある.

9 去法

9 去法は合同式 $10 \equiv 1, 10^2 \equiv 1, 10^3 \equiv 1, 10^4 \equiv 1, 9 \equiv 0 \pmod{9}$ が成り立つことを利用して, ある整数を 9 で割ったときの余りを求める方法である. 例として 2300 を 9 で割ったときの余りを求める. $10^3 \equiv 1, 2 \equiv 2 \pmod{9}, 10^2 \equiv 1, 3 \equiv 3 \pmod{9}$ なので, 合同式の乗算定理より $2 \times 10^3 \equiv 1 \times 2 \pmod{9}, 3 \times 10^2 \equiv 1 \times 3 \pmod{9}$ が成立する. 合同式の加算定理より, $2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 \equiv 2 + 3 \equiv 5 \pmod{9}$ となり, 余りは 5 であることがわかる.

11 去法

11 去法の理屈と 9 去法は同じである. 例として 52364 を考える. 11 去法は合同式 $1 \equiv 1, 10 \equiv -1, 10^2 \equiv 1, 10^3 \equiv -1, \dots \pmod{11}$ が成り立つことを用いて, 整数を 52364 で割ったときの余りを求める方法である. 52364 を 11 で割ったときの余りは $52364 \equiv 4 \times 1 + 6 \times (-1) + 3 \times 1 + 2 \times (-1) + 5 \times 1 \equiv 4 \pmod{11}$ となる.

3. 2 進数表現での剰余

前節での 10 進数表現での 9 去法, 11 去法にヒントを得て, 2 進数表現での $2^n - 1, 2^n + 1$ の剰余が簡単に求まるのではないかと類推し, 確認した. 2^n の剰余は自明に求まる.

例: $n=4$ の場合

1010 1111 0111 (2 進数表現)

A F 7 (16 進数表現)

$10 \times 16 \times 16 + 15 \times 16 + 7 = 2807$ (10 進数表現)

① この数の $2^4 - 1 = 15$ による剰余は 2

$$2807 = 187 \times 15 + 2$$

各桁の和(9 去法の類推):

$$A + F + 7 \text{ (16 進)} = 10 + 15 + 7 \text{ (10 進)} = 32 \text{ (10 進)} = 2 \times 15 + 2 \text{ (10 進)}$$

② $2^4 + 1 = 17$ の剰余は 2

$$2807 = 165 \times 17 + 2$$

各桁の和差 (11 去法の類推):

$$A - F + 7 \text{ (16 進)} = 10 - 15 + 7 \text{ (10 進)} = 2 \text{ (10 進)} = 0 \times 17 + 2 \text{ (10 進)}$$

③ 2^4 の剰余は 7

A F 7 (16進数表現)

より数学的な記述は以下ようになる.

8進表現での「9去法と11去法」との対応の考察

10進表現での9去法と11去法より, 8進の場合の「9去法と11去法」に対応するものはどうなるかを考察した. 8進の場合で, 同じく+1と-1をすれば, 剰余も簡単に求められると類推した. 8進の場合, 10進の9去法に対応するものは $2^3-1=7$ 去法になる. 8進表現で4200を例として7で割ったときの余りを求める. $4\equiv 4(\text{mod } 7)$, $2\equiv 2(\text{mod } 7)$, $0\equiv 0(\text{mod } 7)$, $4200\equiv 4+2\equiv 6(\text{mod } 7)$ となって, 4200の余りが6であることがわかる.

8進の場合で, 「10進の11去法」は $2^3+1=9$ 去法になる. 8進表現4200を例として10進表現9で割ったときの余りを求める. $4\equiv 4(\text{mod } 9)$, $3\equiv 3(\text{mod } 9)$, $2\equiv 2(\text{mod } 9)$, $1\equiv 1(\text{mod } 9)$, $4200\equiv 4+2\equiv 2\equiv 7(\text{mod } 11)$ となって, 4200の余りが7であることがわかる.

16進表現での9去法と11去法

16進の場合で, 9去法は $2^4-1=F$ (10進に換算しては15)去法にして求める. まずは16進の4200と9151を例としてF (10進に換算しては15)で割ったときの余りを求める. $16^3\equiv 1$, $4\equiv 4$, $9\equiv 9(\text{mod } F)$, $16^2\equiv 1$, $2\equiv 2$, $5\equiv 5(\text{mod } F)$, $F\equiv 0(\text{mod } F)$, $4200\equiv 4+2\equiv 6(\text{mod } F)$, $9151\equiv 9+1+5+1\equiv F\equiv 0(\text{mod } F)$ となって, 4200を9151の余りが6と0であることがわかる.

16進の場合で, 11去法は $2^4+1=11$ (10進に換算しては17)去法にして求める. 16進表現の4200と9151を例として11 (10進に換算しては17)で割ったときの余りを求める. $16^3\equiv -1$, $4\equiv 4$, $9\equiv 9(\text{mod } F)$, $16^2\equiv 1$, $2\equiv 2$, $5\equiv 5(\text{mod } F)$, $F\equiv 0(\text{mod } F)$, $4200\equiv 4+2\equiv -2\equiv E(\text{mod } F)$, $9151\equiv 9+1-5+1\equiv 4(\text{mod } F)$ となって, 4200を9151の余りがEと4であることがわかる.

 2^n 進表現での9去法と11去法

10進, 8進と16進の結論で得られたのと同じように, 2^n 進の場合は「10進での9去法」が 2^n-1 去法にして整数の余りも簡単に求められる. 同じく「10進での11去法」は 2^n+1 去法にして整数の余りを簡単に求められる. このとき 2^n-1 去法は $2^{nm}\equiv 1 \pmod{2^n-1}$ を利用する. 例えば, 整数abcを 2^n-1 で割ったときの余りは $abc\equiv a+b+c \pmod{2^n-1}$ となり, 余りがa+b+cであることがわかる.

2^n+1 去法は $2^{nm}\equiv 1 \pmod{2^n+1}$ (mは偶数), $2^{nm}\equiv -1 \pmod{2^n+1}$ (mは奇数, 1を除く)を利用する. 例えば, 整数abcを 2^n+1 で割ったの余りは $abc\equiv a-b+c \pmod{2^n+1}$ となり, 余りがa-b+cであることがわかる. また, これらの剰余系はメルセンヌ数 2^n-1 , フェルマー数 2^n+1 の形であることにも気が付く. (メルセンヌ数は巨大素数探索にも利用され, 4月現在, 発見されている最大の素数は $2^{82589933}-1$ で, 2486万2048桁ある.)

4. 古代中国の数学書

剰余系で用いる「中国の剰余定理」は, 中国の算術書『孫子算経 (そんしさんけい)』に由来する整数の剰余に関する定理である. 『孫子算経』には, 日本で最も多く利用された和算

学習書『塵劫記』の中の“百五減算”で知られる「3で割ると2余り,5で割ると3余り,7で割ると2余る数は何か」という問題とその解法が書かれている. 答えは23である. 中国の剰余定理の最も基本的な形は次のような形式で述べることができる. 与えられた二つの整数 m, n が互いに素ならば, 任意に与えられる整数 a, b に対し, 連立合同方程式 $x \equiv a \pmod{m}, x \equiv b \pmod{n}$ を満たす整数 x が mn を法として一意的に存在する.

『孫子算経』は一千五百年前, 中国の南北朝時代に書かれた算術書であり, 唐代に編纂された算経十書の1つである. この著者の「孫子」について詳細はよくわかっていない. 日本でも知られた『孫子兵法』の作者である孫武より時代はずいぶん前であるので孫武は『孫子算経』の著者ではない. 孫武の子孫とされる孫臏の『孫臏兵法』も中国では有名であり, 孫臏も「孫子」と呼ばれる.

『周髀算経(しゅうひさんけい)』, 『九章算術(きゅうしょうさんじゅつ)』, 『五曹算経(ごそうさんけい)』, 『夏侯陽算経(かこうようさんけい)』, 『五經算術(ごけいさんじゅつ)』, 『緝古算経(しゅうこさんけい)』, 『張邱建算経(ちょうきゅうけんさんけい)』, 『綴術(てつじゅつ)』, 『海島算経(かいとうさんけい)』と『孫子算経』合わせて『算経十書』と称されている. 『算経十書』は古代中国で唐代の官僚や庶民の子弟を集めて数学を教える学校(「算学」といった)で教科書として使用された. その内容は全て古漢語で書かれているので, 中国人でもすごく読み辛く, 現在の中国の小中高の数学教育等にもほとんど使われていない. 日本では『九章算術』が奈良時代から算博士官吏登用試験で利用されていた.

また, 『孫子算経』には剰余系以外にもさまざまな問題が記述されている. その中で雉兔同籠(じとどうりゅう)は非常に面白い. これは「同じ籠の中に雉と兎がいる. 頭の数は35で, 足の数は94である. 雉, 兎それぞれの数は幾らか」の問題である. これが日本に伝わり, 1810年に出版された坂部広胖の著書「算法点竄指南録(さんぼうてんざんしなんろく)」では, 「雉兔」が「鶴亀」に変化する. 「鶴亀合百頭あり, 只云足数和して二百七十二, 鶴亀各何ほどと問」. これが日本の鶴亀算の原点である. このように『孫子算経』は「和算」に影響を与えている.

5. まとめ

10進数の9去法, 11去法と, 2進数表現を用いた剰余系でのデジタル電子回路設計で $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ の3つを基数とした剰余系システムの共通性に気がついた. この分野の専門家の群馬大学 魏書剛先生に問い合わせたところ次のことである.

「 r 進数の表現を用いた場合, r^n あるいは $r^n - 1, r^n + 1$ を法とすることにより, 除算による余りを求める剰余演算の実現は簡単になります. デジタル回路は2進数系を用いた算術演算の実現手段なので剰余演算も2進数を用いて実現することは基本的な考え方です.

$2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ を法とする剰余演算は, デジタルハードウェア上, 簡単に実現されます.」和算の9去法, 11去法がきっかけになりこのことを知ることができた. 筆者らは整数の面白い性質を積極的に利用するアナログ・デジタル混載電子回路設計の研究を行ってきているが, 今ま

での筆者らの研究では、剰余系の利用はデジタルシステムの場合とは異なりこの性質は使っていない。これを積極的に応用することを考えていきたい。これからも和算や古代中国・インドの数学にアナログ・デジタル混載電子回路設計にアイデアを求めていきたい。

謝辞： 有意義なコメントをいただきました田部井勝稲先生に感謝します。

【参考文献】

- [1] 東野将史, 小林春夫「魔方陣レイアウトによる DA 変換器の直線性の改善」
和算ジャーナル 第 2 号 (会報通巻 52), (2018 年 3 月)
- [2] M. Higashino, S. N. B. Mohyar, Y. Dan, Y. Sun, A. Kuwana, H. Kobayashi, "Digital-to-Analog Converter Layout Technique and Unit Cell Sorting Algorithm for Linearity Improvement Based on Magic Square", Journal of Technology and Social Science (Jan. 2020).
- [3] 小林春夫, 小林佑太郎「フィボナッチ数列と電子回路の話し」
群馬県和算研究会会報 第 50 号 (2016 年 3 月)
- [4] Y. Kobayashi, H. Kobayashi, "Redundant SAR ADC Algorithm Based on Fibonacci Sequence", Advanced Micro-Device Engineering VI, Key Engineering Materials (2016).
- [5] 阿部優大, 片山翔吾, 李 从兵, 小林春夫「孫子算経 (剰余系) の電子回路設計への応用」
第 14 回全国和算研究大会, 栃木県佐野市 (2018 年 8 月 26 日)
- [6] Y. Abe, S. Katayama, C. Li, A. Kuwana, H. Kobayashi, "Frequency Estimation Sampling Circuit Using Analog Hilbert Filter and Residue Number System",
13th IEEE International Conference on ASIC, Chongqing, China (Oct. 2019).
- [7] C. Li, K. Katoh, H. Kobayashi, J. Wang, S. Wu, S. N. B. Mohyar,
"Time-to-Digital Converter Architecture with Residue Arithmetic and its FPGA Implementation",
11th International SoC Design Conference, Jeju, Korea (Nov. 2014).
- [8] Excel VBA 数学教室 (9 去法と 11 去法) <https://excelmath.atelierkobato.com/9kyohou/>

付録： 研究室学生の阿部優大君が 2018 年 8 月に栃木県佐野市で開催された第 14 回全国和算研究大会で剰余系を用いた波形サンプリング回路方式を発表させてもらったが⁽⁵⁾, さらに 2019 年 10 月に中国の重慶市で開催された米国電気学会 (IEEE) 主催国際会議で発表し⁽⁶⁾, Excellent Student Paper Award を受賞した。(写真)

