

2022年5月23日(月)



計測制御工学 第7回講義

整数論に基づくAD/DA変換器設計

小林春夫

群馬大学大学院理工学府 電子情報部門

koba@gunma-u.ac.jp

下記から講義使用 pdfファイルをダウンロードしてください。

出席・講義感想もここから入力してください。

<https://kobaweb.ei.st.gunma-u.ac.jp/lecture/lecture.html>

2016年3月10日
2017年8月17日rev

異文化との競争の重要性

群馬大学大学院 理工学府 電子情報部門

小林春夫

敵国 外患なき者は 国つねに亡ぶ (孟子)

敵国もなく
外国との関係にも
心配事のない国は、
国民全体に緊張感がなくなり
必ず滅亡する



ウナギとナマズ

江戸時代 浜名湖から大量にとれたウナギを
江戸に運ぶとき



ウナギだけの桶をつくと到着する前に
その大半が元気がなくなって死んでしまう



その桶に、「ナマズ」を一匹入れておく
不思議とウナギたちは元気になって、
江戸に到着するまでほとんど死ぬことがなくなった。



ドジョウとナマズ



日本はドジョウを中国から輸入。
中国から日本への空輸の間に80%のドジョウは死んでしまう。
水槽が揺れて生存できなくなる。

ドジョウの天敵のナマズを水槽の中に一緒に入れる。
ナマズは中国から日本に飛行機が向かう間に、
ドジョウを食べまくる。
ナマズがドジョウを食べる数は水槽全体の20%にも及ぶ。

ナマズを入れた水槽では一匹のドジョウも死なない。
ナマズに食べられたドジョウの数だけが損失であり、
輸送効率は20%から80%と4倍になった。

研究開発プロジェクトの意思決定

「全員が賛成するプロジェクト提案は採用しない。
賛成、反対が拮抗し、それぞれが良く調べて
その得失を必死に議論した場合に
ゴーサインを出す。」

(化学系メーカー経営者)

様々な意見があることが重要

「意思決定における第一の原則は、
意見の対立を見ないときには
決定を行わないことである。」

(ピーター・ドラッカー)

外から現状を見ることの重要性

海外に行く

日本を中心とした天動説から
地動説的な見方・発想へ

歴史書を読む

宇宙を見る

生物を見る

ドキュメント作成 (論文・レポートを書くこと) の重要性



「書きとどめよ！

議論したことは風の中に吹き飛ばしてはならない。」
(ガリレオ・ガリレイ)

群馬大学大学院 工学研究科電気電子工学専攻
小林春夫



仕事ができる人、組織

ドキュメントがしっかりしている。

書類、技術レポート、設計資料 等。

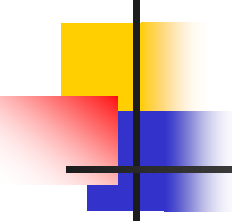
大学の研究室なら、
卒業論文、修士論文、学会・研究会原稿、
発表スライド、論文、特許 等を
しっかり作成する必要がある。



人間は忘却する

何日かすると 細かいことは忘れてしまう。
書きとめておけば 忘れてもよい。
必要なら書いたものを見返す。
現在の仕事にのみ集中できる。

今の時代であるので
ワード, Latex, ppt の電子ファイルに書く。



自分のために 論文・レポートを書く

論文を書き、発表スライドを作成することで
➡ 考えが整理される
成果、課題、問題点が明らかになる。

論文、特許、学会発表、著書等の
「書いたもの」は、10年、20年後にも
自分にとって残っているものになる。



チームで仕事をするとき

口頭ではなく、
書いたもの(文章、図等)をもとにして
議論する。

口頭では誤解が生じる。
誤りをチェックできない。



他の研究者に成果を伝える

「ほかの者が彼の貢献を利用してくれる
ときのみ、成果を上げることができる」
(貢献のリレー、Peter F. Drucker)

「情報発信」



英語か日本語か

英語の論文

世界中の人が読んでくれる。

日本語の論文

「オレの論文を読みたければ、
諸外国の人たちは日本語を勉強しろ」
くらいの気概が必要か(?)。



書きとどめることが重要

著名な学会誌・国際学会

➡ 多くの人たちの目に留まりやすい。

が、「snobbish（貴族主義、権威主義的）である。
内容が良ければどこでもよい。」

という考え方もあり(?)

いずれにせよ、「書きとどめる」ということが重要。



後世に成果を伝える

ガリレオ・ガリレイ

 命懸けで人生を賭けて著書を記す

「天文対話」 地動説者と天動説者との対話

「新科学対話」 晩年、失明して代筆にて記す

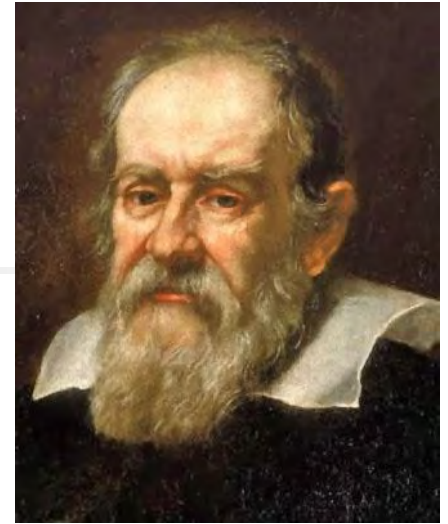
死後、高く評価される。



現在にもその著作が伝わる(日本語訳もあり)

ガリレオ・ガリレイ

(Galileo Galilei, 1564-1642)



イタリアの物理学者、天文学者、哲学者。
パドヴァ大学教授。

望遠鏡による天体の観測 → 地動説

「それでも地球は動いている」

振り子の等時性。

自由落下の時間は物体の質量の依らない(ピサの斜塔)

実験による検証と、その数学による解析。

その業績から天文学の父と称され、フランシス・ベーコンとともに科学的手法の開拓者として知られる。



大学での教員評価

研究論文業績中心

→ (問題もあるが ある程度)正しい

ガリレオは命懸けで著書を記す



現在もその知の財産が直接継承できる。



研究者間の直接の対話も重要

研究者同士の face-to-face の議論も重要。
論文では「綺麗なこと」しか書かないこともある。
直接会って本音で議論する。

The most important thing in communication
is hearing what isn't said. (P. F. Drucker)

上記で said を written と置き換える。

温故知新：古典数学の掘り起しと AD/DA変換器設計への応用

小林春夫
群馬大学

 Kobayashi k_haruo@el.gunma-u.ac.jp
Laboratory



発表内容

- はじめに
- フィボナッチ数列と黄金比
逐次比較近似AD変換器 冗長アルゴリズム
- 魔方陣
セグメント型DA変換器 レイアウト
- 剰余系(孫子算経)
時間デジタル変換回路
- まとめ

発表内容

- はじめに
- **フィボナッチ数列と黄金比**
逐次比較近似AD変換器 冗長アルゴリズム
- **魔方陣**
セグメント型DA変換器 レイアウト
- **剰余系(孫子算経)**
時間デジタル変換回路
- まとめ

ご紹介する内容

講演者の研究室で行っている
整数論を用いたAD/DA変換器、時間デジタイザ回路の
アーキテクチャ・レイアウト技術研究



全く新しいアプローチ



「アナログ回路は技術的に面白い」
の一側面を示したい

整数論: 数学で 最も簡単に見えて 最も奥が深い



群馬大学 電子情報部門 小林研究室
数学的アプローチ回路設計グループ

フィボナッチ数列と黄金比

逐次比較近似AD変換器 冗長アルゴリズム

小林佑太郎
楊志翔

Shaiful Nizam Mohyar
小林春夫



Kobayashi
Laboratory



群馬大学
GUNMA UNIVERSITY

フィボナッチ数列とは

フィボナッチ数列

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

初めの項を計算

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

⇒ フィボナッチ数と呼ばれる



Leonardo Fibonacci
(伊: 1170-1250年頃)

隣り合う項の比率は以下の値 φ に収束

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1.618033988749895 = \varphi$$

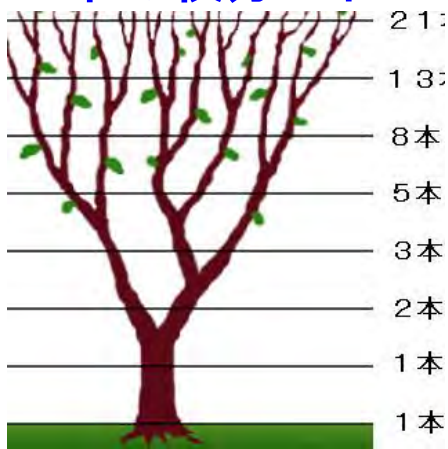
収束比率 φ : 黄金比 (Golden ratio)

不思議な数“フィボナッチ数”

フィボナッチ数 : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

植物と関係が深い⇒最も日光を浴びれる、最も多く配置できる

木の枝分かれ



花びら枚数

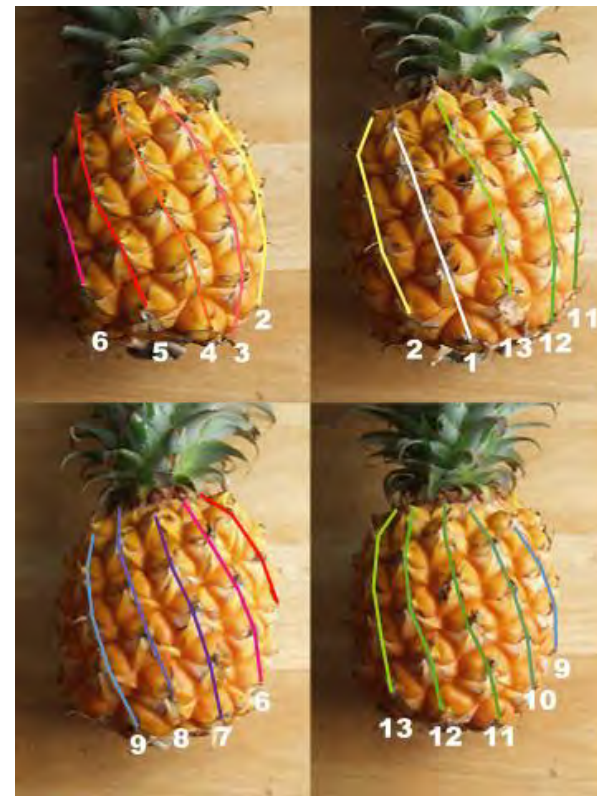


実の付け方

松ぼっくり



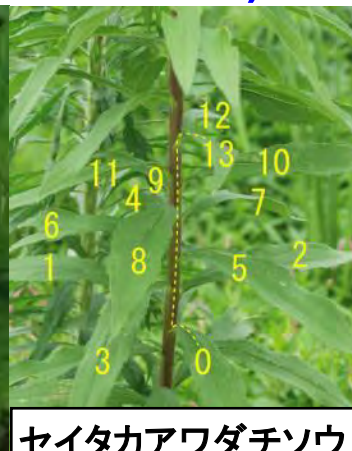
パイナップル



葉序(植物の葉の付け方)



カキ



セイタカアワダチソウ

最も美しい比率“黄金比”

$$\text{黄金比: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1.618033988749895 = \varphi$$

フィボナッチ・黄金比⇒“最も安定し効率の良い配置” 自然の知恵

正五芒星



クフ王のピラミッド(埃)



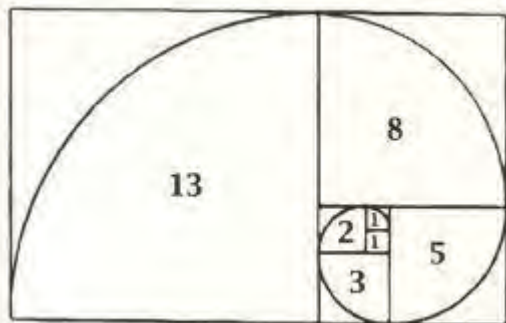
パルテノン神殿(希)



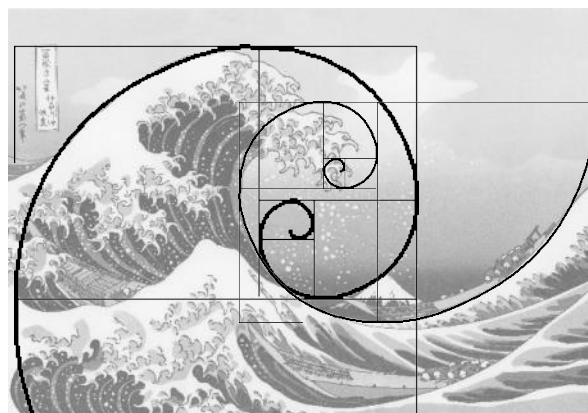
ヴィーナス



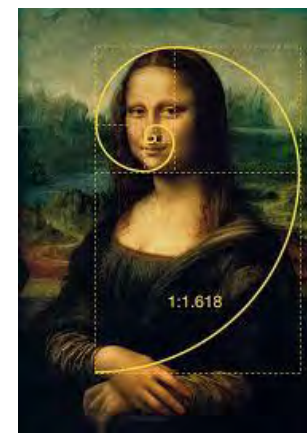
黄金螺旋



神奈川冲浪裏(葛飾北斎)



モナ・リザ(ダヴィンチ)



研究背景



自動車エレクトロニクスに注目が集まる



マイクロコントローラーには
従来よりも**高速**かつ**高信頼性**のSAR ADCが必要に

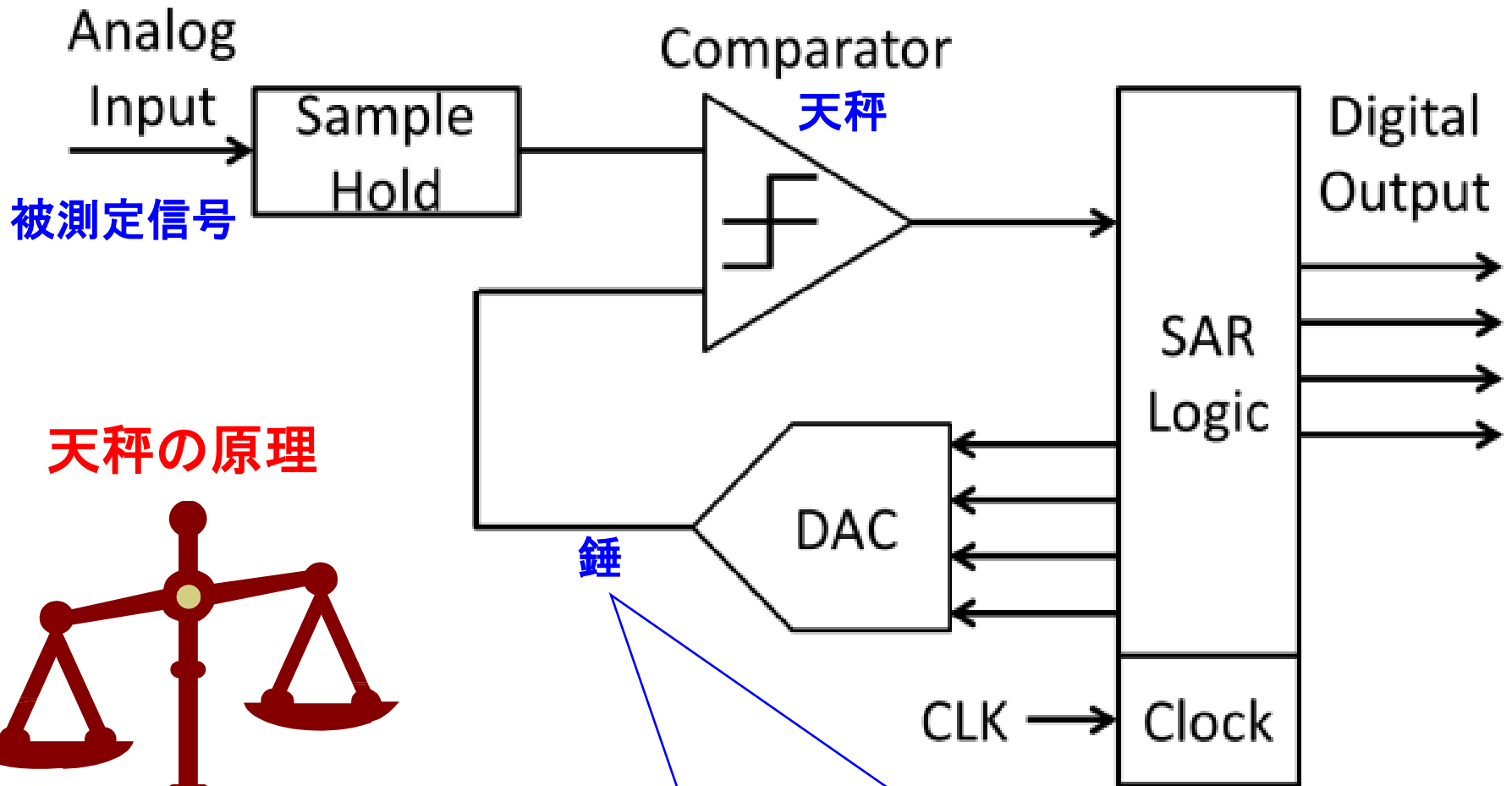


デジタル誤差補正可能な冗長設計で解決！

設計課題の存在 (☹)

SAR ADC: Successive Approximation Register Analog-to-Digital Converter

逐次比較近似AD変換器



天秤の原理



錘

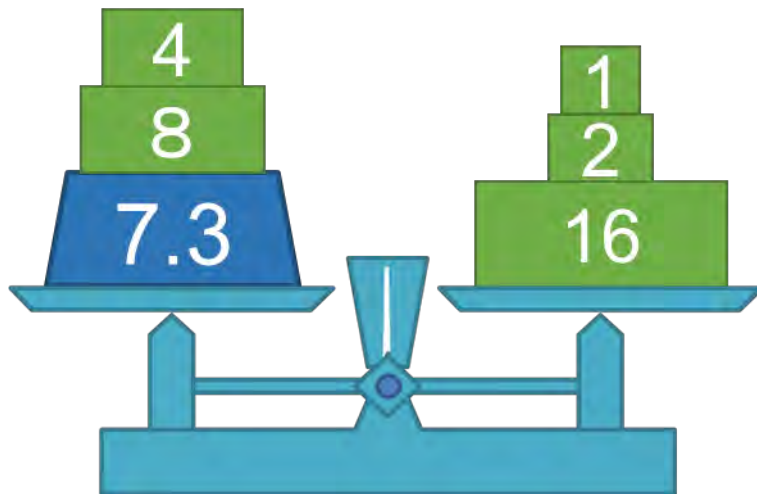
一般的に 二進重みを利用
(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ...)



SAR ADCの二進探索動作(1)

5bit5step SAR ADC

- 二進重み
 - $p(k) = 16, 8, 4, 2, 1$
- 入力 7.3 LSB 相当



$$7.3 \Rightarrow 7$$

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	output
Weight $p(k)$	16	8	4	2	1	
31						31
30						30
29						29
28						28
27						27
26						26
25						25
24						24
23						23
22						22
21						21
20						20
19						19
18						18
17						17
16						16
15						15
14						14
13						13
12						12
11						11
10						10
9						9
8						8
7						7
6						6
5						5
4						4
3						3
2	0	0	1	1	1	2
1						1
0						0

Level

SAR ADCの二進探索動作(2)

5bit 5step SAR ADC

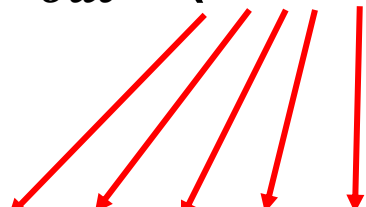
➤ 二進重み

$$p(k) = 16, 8, 4, 2, 1$$

➤ 入力 7.3 LSB 相当

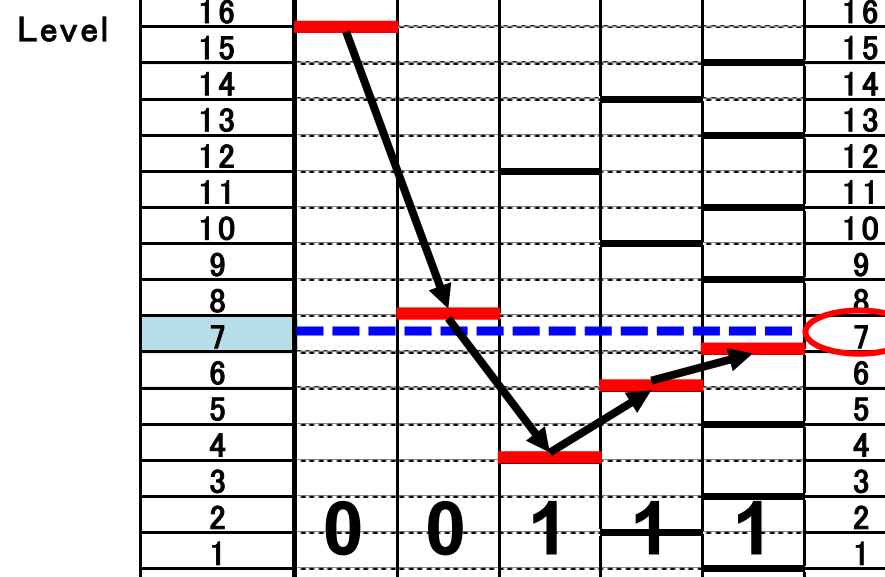
二進数と十進数が1対1に対応

$$D_{out} = (00111)_2$$

$$7 = 16 - 8 - 4 + 2 + 1 + 0.5 - 0.5$$


Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	output
Weight p(k)	16	8	4	2	1	
31						31
30						30
29						29
28						28
27						27
26						26
25						25
24						24
23						23
22						22
21						21
20						20
19						19
18						18
17						17
16						16
15						15
14						14
13						13
12						12
11						11
10						10
9						9
8						8
7						7
6						6
5						5
4						4
3						3
2	0	0	1	1	1	2
1						1
0						0

Level



SAR ADCの二進探索動作(3)

5bit5step SAR ADC

- 二進重み
 $p(k) = 16, 8, 4, 2, 1$
- 入力 7.3 LSB 相当

二進数と十進数が1対1に対応

$$D_{out} = (00111)_2$$



一回の判定誤りが
直接出力間違いとなる

$$D_{out} = (01000)_2 = 8$$

信頼性の劣化

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	output
Weight p(k)	16	8	4	2	1	
31						31
30						30
29						29
28						28
27						27
26						26
25						25
24						24
23						23
22						22
21						21
20						20
19						19
18	0	1	0	0	0	18
17						17
16						16
15						15
14						14
13						13
12						12
11						11
10						10
9						9
8						8
7						7
6						6
5						5
4						4
3						3
2						2
1						1
0						0

Level

判定間違い!

SAR ADCの冗長設計

冗長: 余分や余裕のこと

↓ SAR ADCへ適用

時間冗長性を利用

- ◆ 比較判定回数を増加
- ◆ 比較する電圧を変更

↓

デジタルコードによる
表現方法増加

↓

デジタル誤差補正の実現

二進重み

$p(k): 1, 2, 4, 8, 16$



↓

非二進重み

$p(k): 1, 2, 3, 6, 10, 16$



SAR ADCの冗長探索動作(1)

5bit6step SAR ADC

- 冗長重み
 $p(k) = 16, 10, 6, 3, 2, 1$
- 入力 6.3 LSB 相当

判定ステップの増加

$$6 \Rightarrow 010001 \Rightarrow 6$$

$$16 - 10 + 6 - 3 - 2 - 1 + 0.5 - 0.5 = 6$$

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	output
Weight p(k)	16	10	6	3	2	1	
31							31
30							30
29							29
28							28
27							27
26							26
25							25
24							24
23							23
22							22
21							21
20							20
19							19
18							18
17							17
16							16
15							15
14							14
13							13
12							12
11							11
10							10
9							9
8							8
7							7
6							6
5							5
4							4
3	0	1	0	0	0	1	3
2							2
1							1
0							0

Level

SAR ADCの冗長探索動作(2)

5bit6step SAR ADC

- 冗長重み
 $p(k) = 16, 10, 6, 3, 2, 1$
- 入力 6.3 [LSB]

判定ステップの増加

$6 \Rightarrow 010001 \Rightarrow 6$



デジタルコード表現が複数

$6 \Rightarrow 001111 \Rightarrow 6$

デジタル誤差補正

高信頼性の実現

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	output
Weight p(k)	16	10	6	3	2	1	
31							31
30							30
29							29
28							28
27							27
26							26
25							25
24							24
23							23
22							22
21							21
20							20
19							19
18							18
17							17
16							16
15							15
14							14
13							13
12							12
11							11
10							10
9							9
8							8
7							7
6							6
5							5
4							4
3	0	0	1	1	1	1	3
2							2
1							1
0							0

Level

判定間違い!

補正力の評価方法

補正力を比較するための
評価方法が必要

補正能力 $q(k)$ を定義

一回誤っても後段で補正できる
入力電圧と比較電圧の絶対差

1st step 補正能力
 $q(1)=3$

判定間違え

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	output
Weight $p(k)$	16	10	6	3	2	1	
31							31
30							30
29							29
28							28
27							27
26							26
25							25
24							24
23							23
22							22
21							21
20							20
19							19
18							18
17							17
16							16
15							15
14							14
13							13
12							12
11							11
10							10
9							9
8							8
7							7
6							6
5							5
4							4
3							3
2							2
1							1
0							0

出力は18まで戻せる

補正できる入力範囲差 q

補正力を比較するための
評価方法が必要

補正能力 $q(k)$ を定義

一回誤っても後段で補正できる
入力電圧と比較電圧の絶対差

補正可能である条件

$$|V_{in} - V_{ref}(k)| \leq q(k)$$



$q(k)$ が大きい＝補正力高い

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	output
Weight $p(k)$	16	10	6	3	2	1	
31							31
30							30
29							29
28							28
27							27
26							26
25							25
24							24
23							23
22							22
21							21
20							20
19							19
18							18
17							17
16							16
15							15
14							14
13							13
12							12
11							11
10							10
9							9
8							8
7							7
6							6
5							5
4							4
3							3
2							2
1							1
0							0

Level

$q(1)$

補正可能な
入力範囲

補正できる入力範囲差 q

補正力を比較するための
評価方法が必要

k step目で判定誤りがあっても
後段で補正が可能な入力範囲差 $q(k)$

$$q(k) = -p(k+1) + 1 + \sum_{i=k+2}^M p(i)$$

$p(k)$: k step目の比較重み

M: 総ステップ数

補正力は比較重み $p(k)$ によって決まる

どのような比較重みを利用するか？



Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	output
Weight $p(k)$	16	10	6	3	2	1	
31			↓				31
30							30
29							29
28							28
27							27
26		↑	▲ $q(2)$				26
25		↓					25
24							24
23							23
22							22
21							21
20			↑	▲ $q(3)$			20
19			↓				19
18	↑	▲ $q(1)$					18
17	↓						17
16							16
15							15
14							14
13							13
12			↑	↓			12
11			↓				11
10							10
9							9
8							8
7							7
6		↑	↓				6
5		↓					5
4							4
3							3
2							2
1							1
0			↑				0

比較電圧重み $p(k)$ の決定(従来手法)

N bit 全 M step 中 k step 目の比較重み $p(k)$ を決定

従来手法

① 基数radixから決定する $\Rightarrow p(k) = r^{M-k} \quad (1 < r < 2)$

- 適切な基数の決定が難しい
 - 補正力(信頼性)と変換ステップ数(時間)はトレードオフ
- $p(k)$ は必ず小数になる(単位セルによる実現困難)
 - 面積比を基数比で利用 \Rightarrow 精度が悪い
 - 四捨五入して整数を使う \Rightarrow $q(k)$ のばらつき

② 最も適当な $p(k)$ を任意に決定する

- 適切な効果を得づらい
- 決定が難しく設計時間を増加

従来手法の問題点

5bit 6step SAR ADC

冗長設計手法①

radix=1.80

比較電圧重み $p(k)$

$$p(1) = 2^{5-1} = 16$$

$$p(2) = 1.8^4 \cong 10$$

$$p(3) = 1.8^3 \cong 6$$

$$p(4) = 1.8^2 \cong 3$$

$$p(5) = 1.8^1 \cong 2$$

$$p(6) = 1.8^0 = 1$$

絶対に補正できない入力範囲

冗長設計効果の減少



適切な $p(k)$ 選択手法が重要

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	output
Weight $p(k)$	16	10	6	3	2	1	
31			↓				31
30							30
29							29
28							28
27							27
26		↕	▲ $q(2)$				26
25							25
24							24
23							23
22							22
21							21
20			↕	▲ $q(3)$			20
19							19
18	↕	▲ $q(1)$					18
17							17
16							16
15							15
14							14
13	↕						13
12			↕				12
11							11
10							10
9							9
8							8
7							7
6		↕					6
5							5
4		↕					4
3							3
2							2
1							1
0			↑				0

フィボナッチ数列とは (再掲)

フィボナッチ数列

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

初めの項を計算

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

⇒ フィボナッチ数と呼ばれる

また隣り合う項の比率は以下の値 φ に収束

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1.618033988749895 = \varphi$$

収束比率 φ : 黄金比 (Golden ratio)



Leonardo Fibonacci
(伊: 1170-1250年頃)

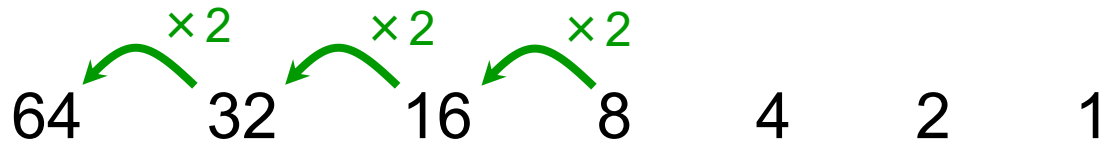
比較電圧重み $p(k)$ の決定(提案手法)

N bit 全 M step 中 k step 目の比較重み $p(k)$ を決定

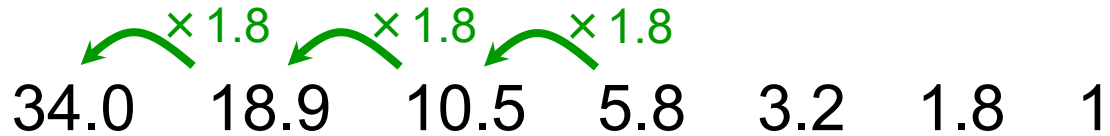
提案手法

フィボナッチ数を $p(k)$ として利用する $\Rightarrow p(k) = F_{M-k+1}$

Binary Weight
二進数



Radix 1.8 Weight
1.8進数



Fibonacci Weight
約1.62進数



隣り合う項の比率が黄金比 φ に収束

\Rightarrow 整数のみで約1.62進数 ($radix = 1.62$) を実現できる!

フィボナッチ数列を用いたSAR ADC

フィボナッチ数列SAR ADC

2点の性質を新発見！

- ① 許容値 $q(k)$ は必ずフィボナッチ数
- ② 許容できる範囲が必ず接する

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
Weight $p(k)$	16	8	5	3	2	1	1
33					↓		
32				↕			
31				↕			
30			↕		↕		
29			↕		↕		
28			↕		↕		
27			↕		↕		
26		↕		↕			
25		↕		↕			
24		↕		↕			
23		↕		↕			
22		↕		↕			
21		↕		↕			
20	↕		↕		↕		
19	↕		↕		↕		
18	↕		↕		↕		
17	↕		↕		↕		
16	↕		↕		↕		
15	↕		↕		↕		
14	↕		↕		↕		
13	↕		↕		↕		
12	↕		↕		↕		
11	↕		↕		↕		
10	↕	↕		↕			
9	↕	↕		↕			
8	↕	↕		↕			
7	↕	↕		↕			
6	↕	↕		↕			
5	↕	↕		↕			
4	↕	↕	↕		↕		
3	↕	↕	↕		↕		
2	↕	↕	↕		↕		
1	↕	↕	↕		↕		
0	↕	↕	↕	↕			
-1	↕	↕	↕	↕			
-2	↕	↕	↕	↕	↕		

Level

性質②の意義

フィボナッチ数列SAR ADC

2点の性質を新発見！

- ① 許容値 $q(k)$ は必ずフィボナッチ数
- ② 許容できる範囲が必ず接する



フィボナッチ数重み($r = 1.618$)より...

- ・基数 r が大きい \Rightarrow $q(k)$ は離れる
- ・基数 r が小さい \Rightarrow $q(k)$ は重なる



黄金比 ϕ は
冗長さの境界条件であり
設計指針となる

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
Weight $p(k)$	16	8	5	3	2	1	1
33					↓		
32				↕			
31				↕			
30			↕		↕		
29			↕		↕		
28			↕		↕		
27			↕		↕		
26		↕		↕			
25		↕		↕			
24		↕		↕			
23		↕		↕			
22		↕		↕			
21		↕		↕			
20	↕	↕		↕			
19	↕	↕		↕			
18	↕	↕		↕			
17	↕	↕		↕			
16	↕	↕		↕			
15	↕	↕		↕			
14	↕	↕		↕			
13	↕	↕		↕			
12	↕	↕		↕			
11	↕	↕		↕			
10	↕	↕		↕			
9	↕	↕		↕			
8	↕	↕		↕			
7	↕	↕		↕			
6	↕	↕		↕			
5	↕	↕		↕			
4	↕	↕		↕			
3	↕	↕		↕			
2	↕	↕		↕			
1	↕	↕		↕			
0	↕	↕		↕			
-1	↕	↕		↕			
-2	↕	↕		↕			

性質②の意義

フィボナッチ数列SAR ADC

2点の性質を新発見！

- ① 許容値 $q(k)$ は必ずフィボナッチ数
- ② 許容できる範囲が必ず接する



接する境界で
すべての入力範囲をもれなく
カバーすることになる



黄金比 ϕ を使うことで

- ・無駄なステップ
- ・補正できない入力範囲

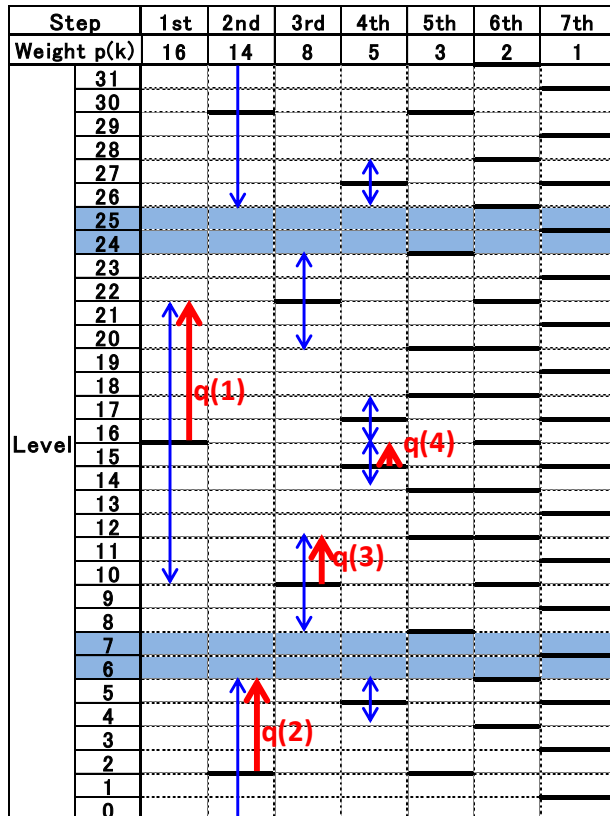
がない最も効率のよい設計が可能

Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
Weight p(k)	16	8	5	3	2	1	1
33					↓		
32				↕			
31				↕			
30			↕		↕		
29			↕		↕		
28			↕		↕		
27			↕		↕		
26		↕		↕			
25		↕		↕			
24		↕		↕			
23		↕		↕			
22		↕		↕			
21		↕		↕			
20	↕	↕		↕			
19	↕	↕		↕			
18	↕	↕		↕			
17	↕	↕		↕			
16	↕	↕		↕			
15	↕	↕		↕			
14	↕	↕		↕			
13	↕	↕		↕			
12	↕	↕		↕			
11	↕	↕		↕			
10	↕	↕		↕			
9	↕	↕		↕			
8	↕	↕		↕			
7	↕	↕		↕			
6	↕	↕		↕			
5	↕	↕		↕			
4	↕	↕		↕			
3	↕	↕		↕			
2	↕	↕		↕			
1	↕	↕		↕			
0	↕	↕		↕			
-1	↕	↕		↕			
-2	↕	↕		↕			

従来手法との比較(5bit ADC)

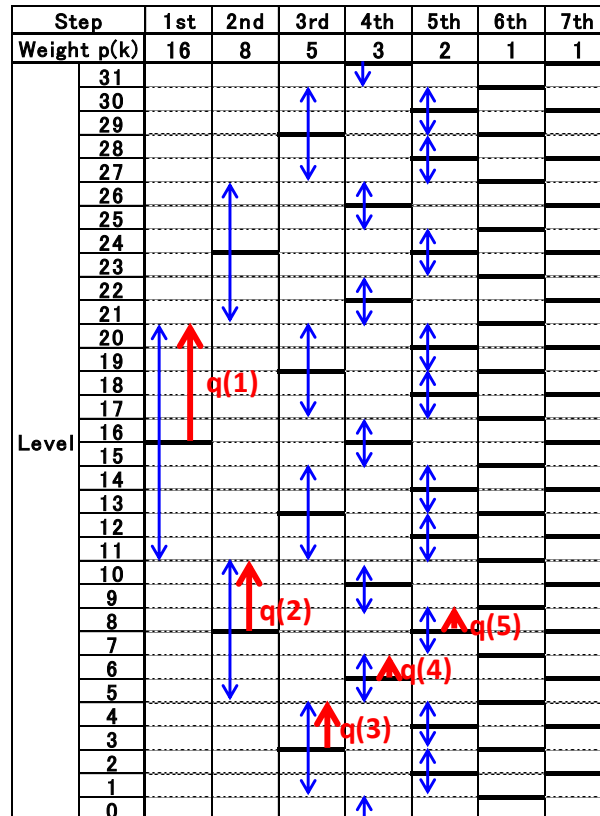
従来手法

1.70進数



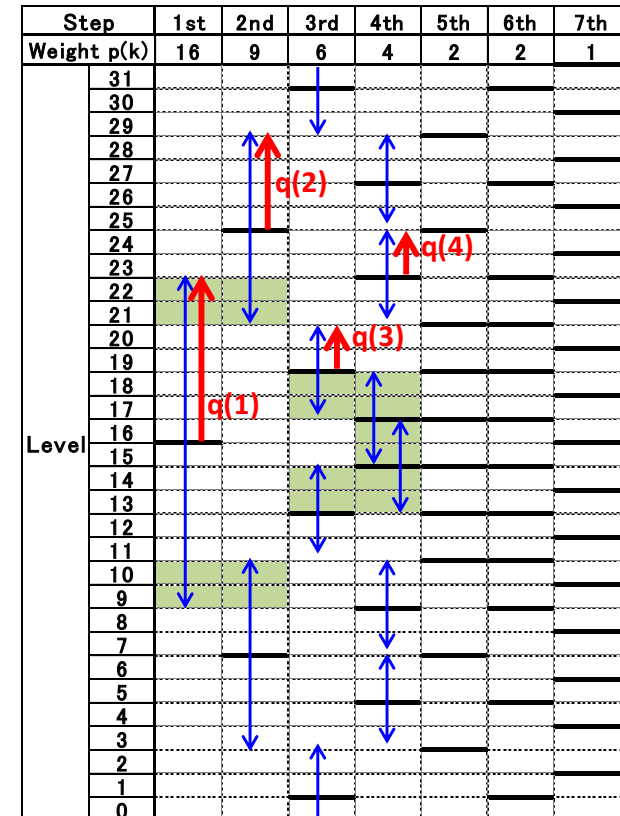
提案手法

1.62進数



従来手法

1.55進数

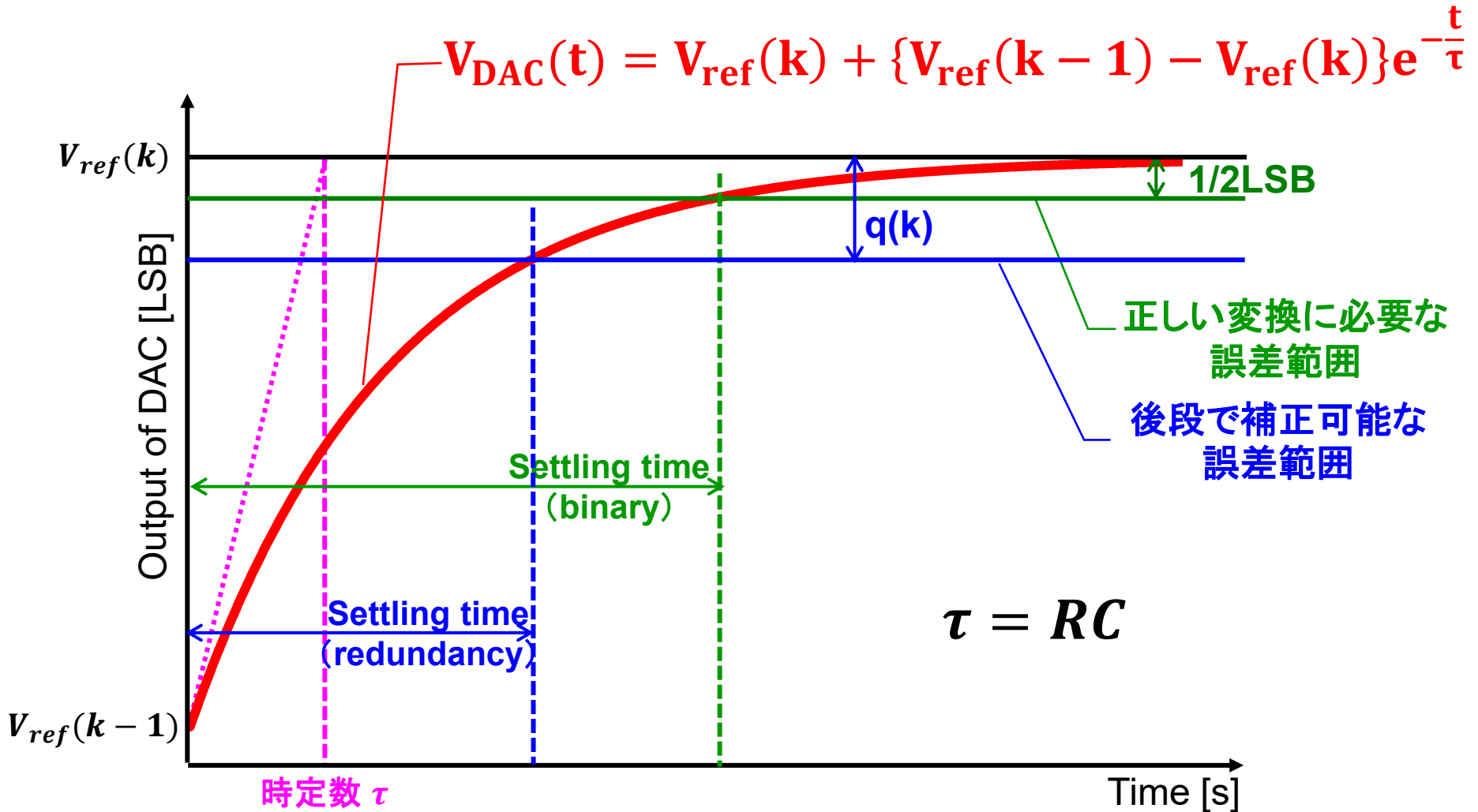


フィボナッチ数列冗長手法

冗長基数の境界条件
効率の良い基準重み

DAC出力の整定時間

RCモデルでDAC出力の整定を考える

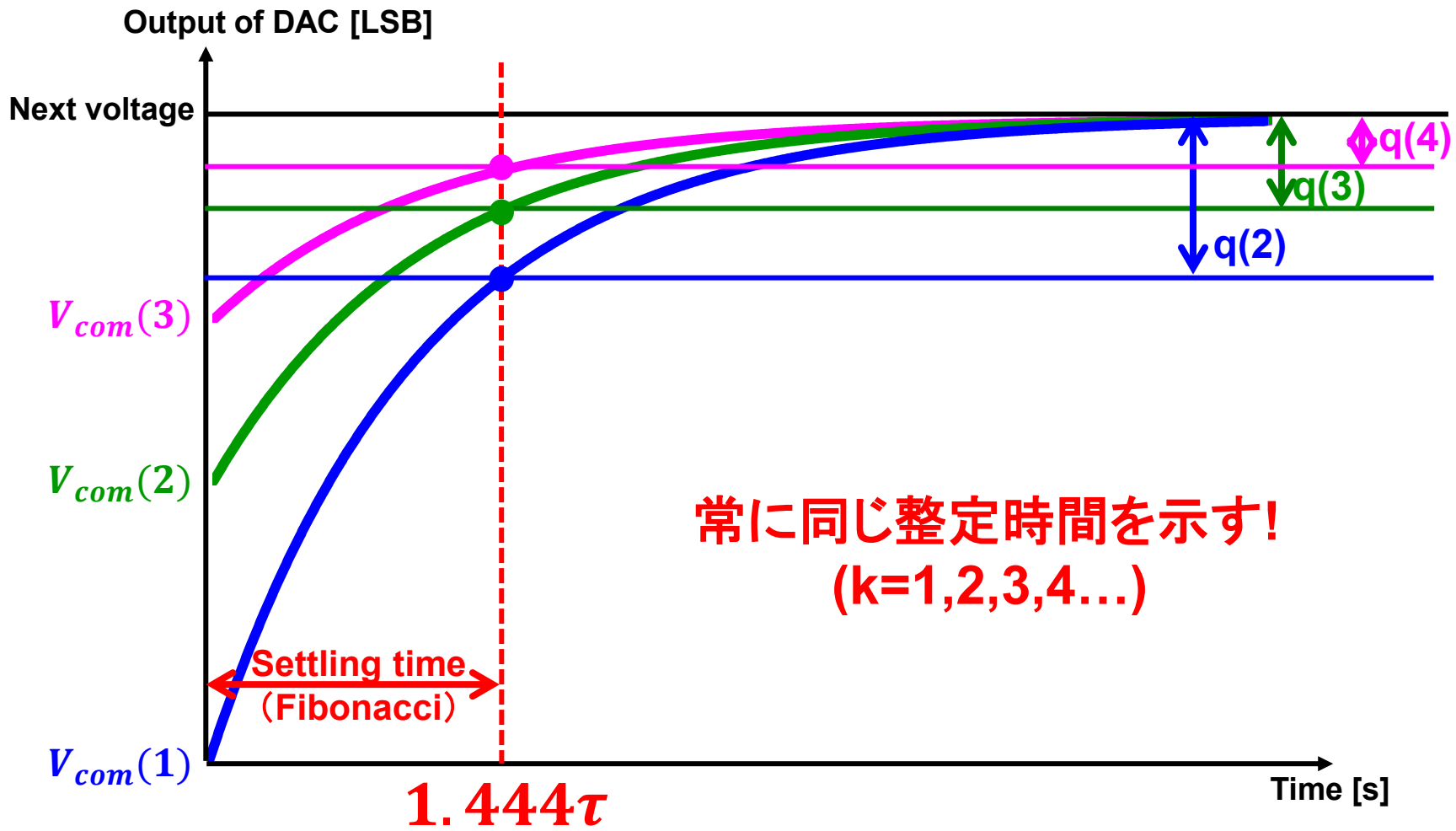


フィボナッチ手法の整定時間の性質

新たな性質の発見！

$$T_{settle}(k) = \tau \ln(2\varphi + 1)$$

$$= 1.444\tau \quad \text{for all } k$$

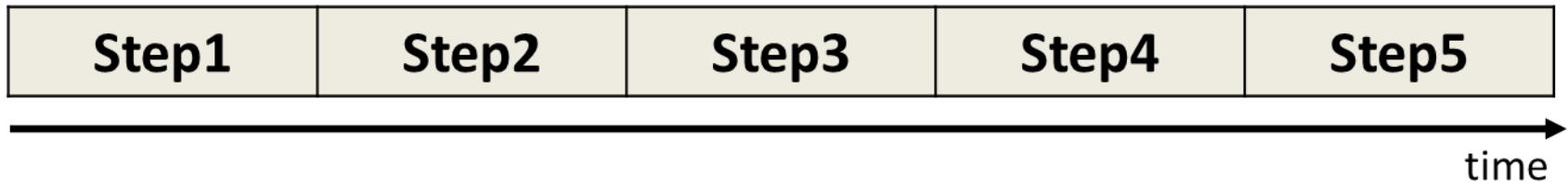


最短SAR AD変換時間

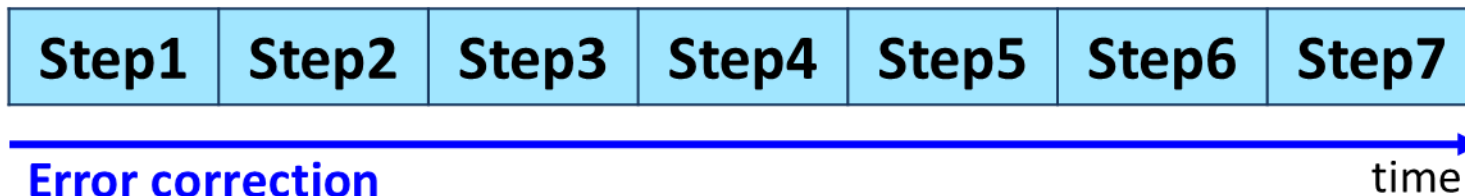
デジタル誤差補正 → DAC 不完全整定に対処

5bit SAR ADC

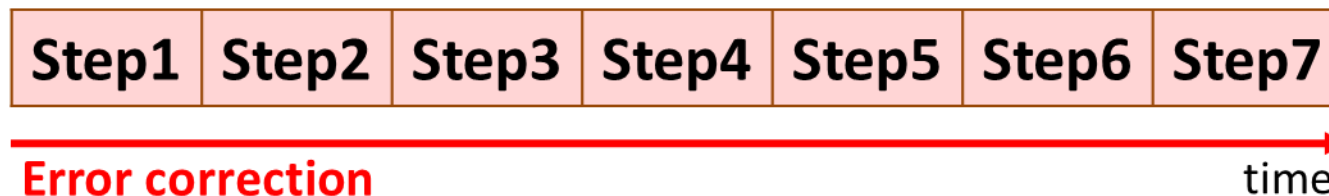
Binary search (complete settling)



Redundant search (incomplete settling)



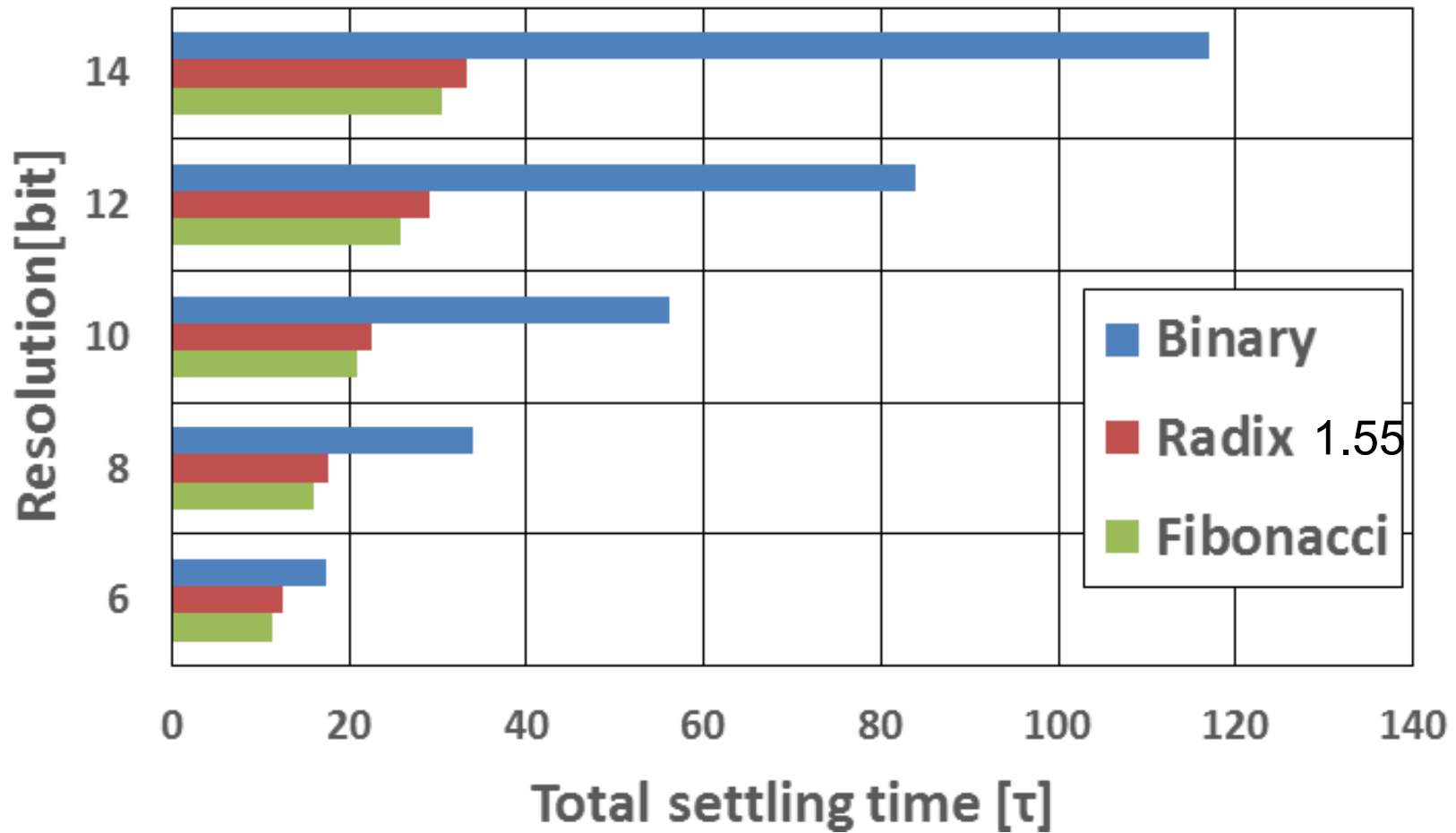
Fibonacci search (incomplete settling)



最短
AD変換時間
の実現！

AD変換時間 結果のまとめ

固定クロックにおける変換時間の比較(分解能別)



固定クロックでは.....

どの分解能でもフィボナッチ手法SAR ADCが最も早い

フィボナッチ SAR ADC の結論

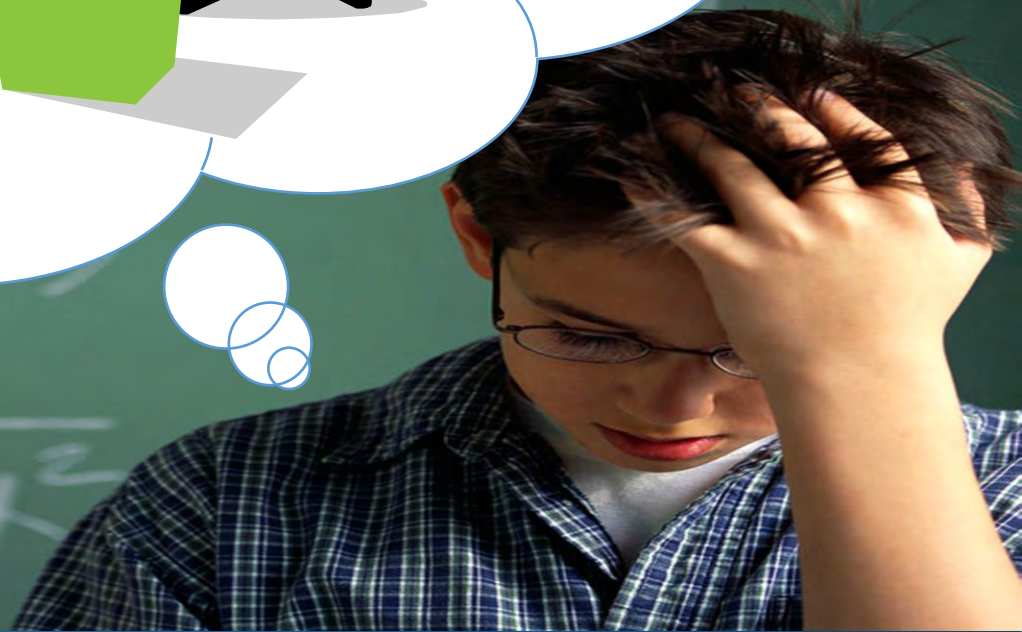
- 冗長SAR ADCの設計手法を提案
- フィボナッチ数列を利用することで重要な性質を得た
 - **高信頼性の実現**
広い入力範囲を補正できる
 - **最速のSAR AD変換**
固定クロック、DAC不完全整定の条件下
 - **基数の基準**
黄金比 $\varphi (= 1.618)$ は基数の基準
 - **一定整定時間**
DAC出力の要求整定時間はすべてのステップで一定

セグメント型DA変換器の 魔方陣レイアウト技術による線形性向上

東野将史 小林春夫



What's "Magic Square"?



$$\sqrt[3]{16x^2}$$

魔方陣について

Magic square : 魔方陣

定和性 : 各行・列・対角線の和が一定

2	9	4
7	5	3
6	1	8

3次方陣

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

4次方陣

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15

5次方陣

様々な魔方陣

完全魔方陣

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

10	5	3	16
15	4	6	9
8	11	13	2
1	14	12	7

対称魔方陣

サイの目方陣

	○		○	○	○		○		
			○	○	○	○		○	
	○		○	○	○		○		
○	○	○	○		○				
	○			○		○	○	○	
○	○	○	○		○				
○		○					○	○	○
○		○		○		○		○	
○		○					○	○	○

様々な魔方陣(続き 1)

✓ 同心魔方陣

外側からひと側ずつ取り除いても、定和性を失わない



59	5	4	62	63	1	8	58
9	18	17	49	50	42	19	56
55	20	28	33	29	40	45	10
54	44	38	31	35	26	21	11
12	43	39	30	34	27	22	53
13	24	25	36	32	37	41	52
51	46	48	16	15	23	47	14
7	60	61	3	2	64	57	6

様々な魔方陣(続き 2)

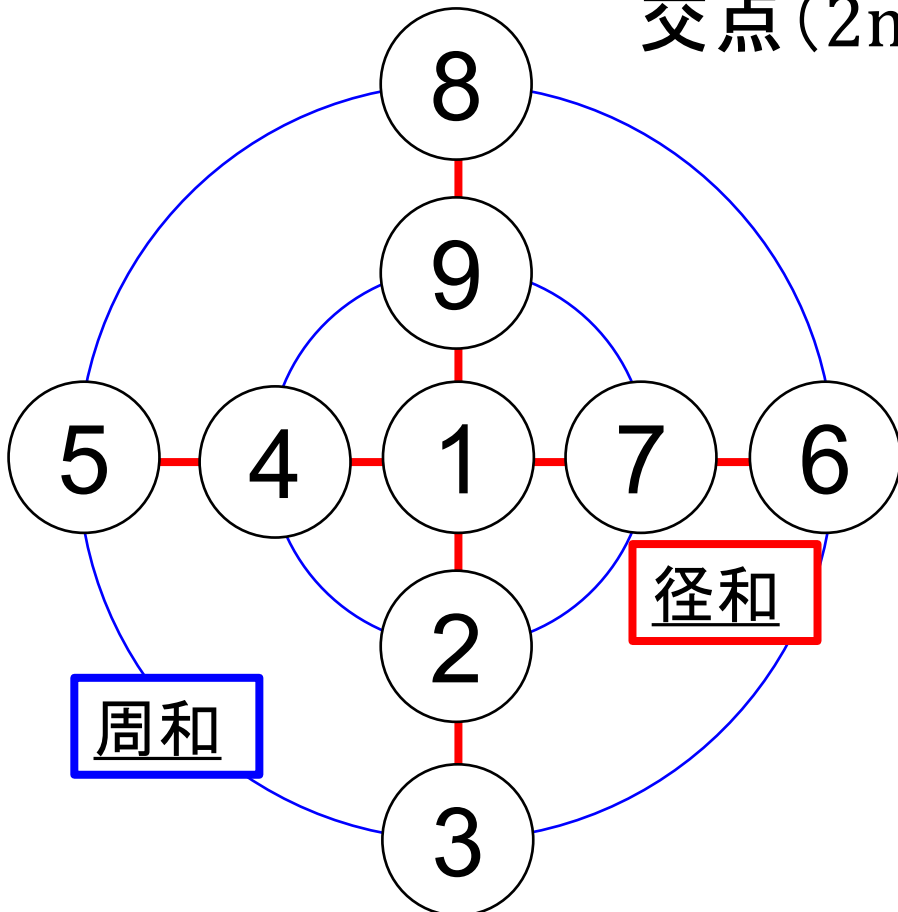
魔円陣：同心円と直径とを同じ個数だけ書き
交点($2n^2 + 1$ 個)に数字を置いたもの

$n=5$ (左図)

- 径和：直径上の $2n+1$ 個の和
- 周和：円周上の $2n$ 個の数と中心数の $2n+1$ 個の和

→ 径和と周和の一致

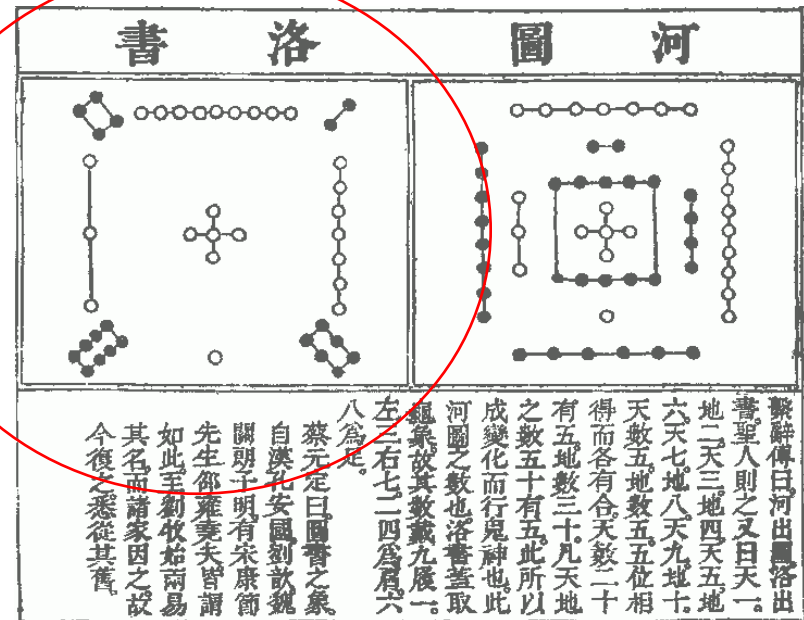
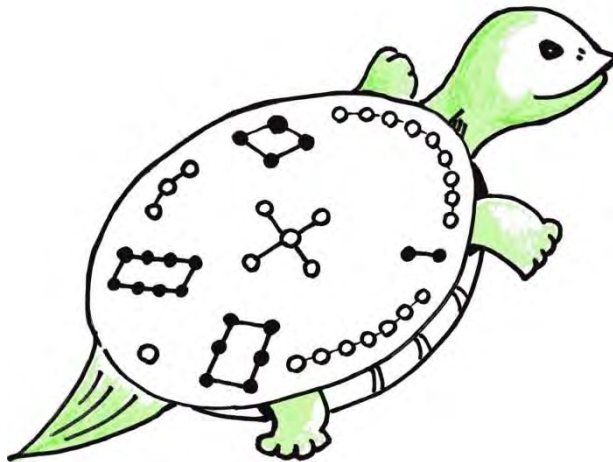
魔星陣, 立体魔方陣, etc,,,,,



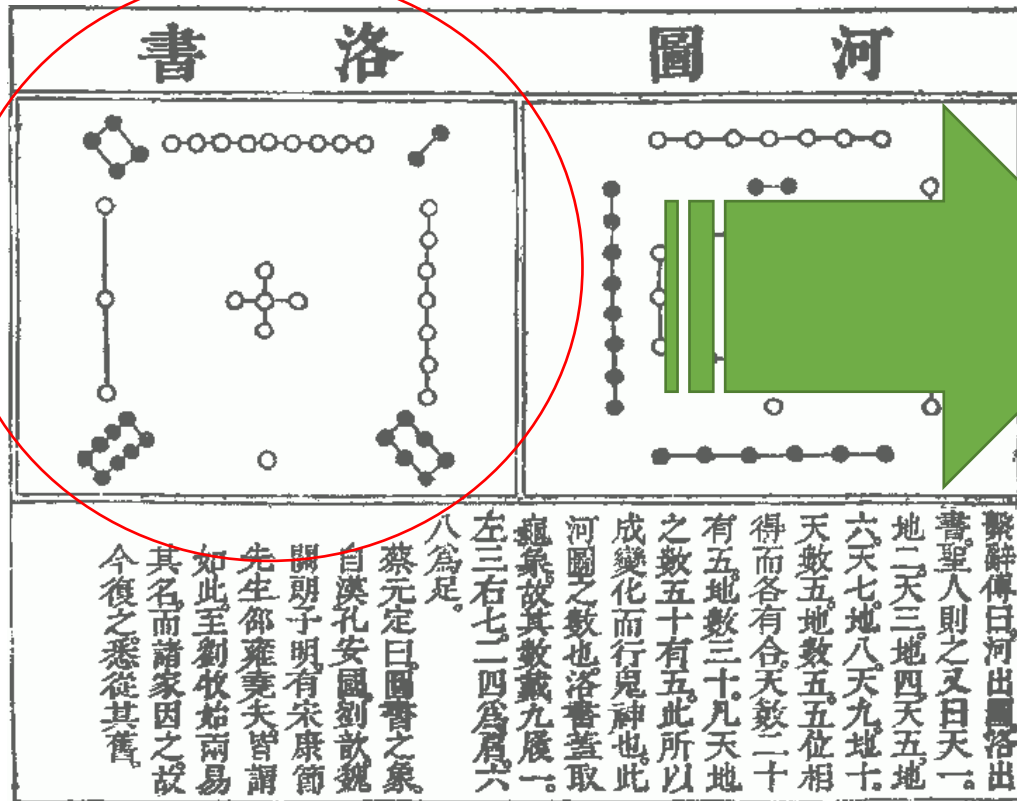
魔方陣の歴史（中国）

中国 紀元前

「夏(か)の禹王(うおう)が黄河の洪水を治めたとき、洛水から出た神亀の背に洛書が記されていた」



魔方陣の歴史（中国）



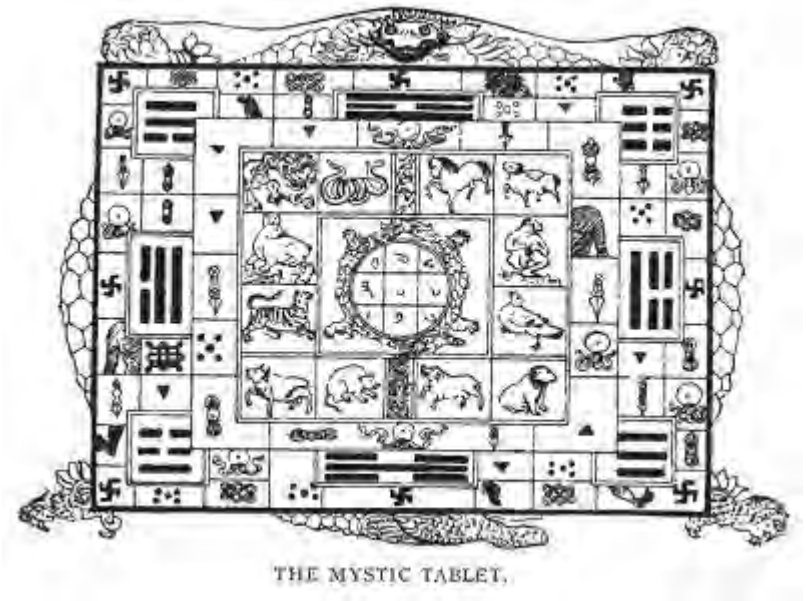
3次方陣

4	9	2
3	5	7
8	1	6

特殊な図であることから、
 九星術の根本として占星家が使用

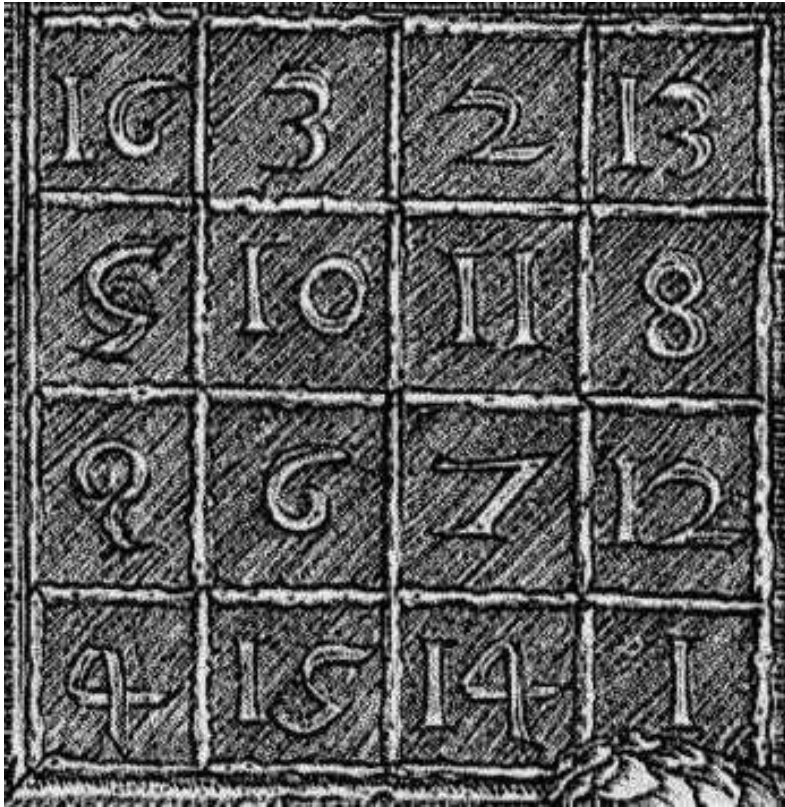
魔方陣の歴史（チベット、ネパール、ブータン）

中央の3次方陣の周りに十二支の動物を配した
“生物の輪”を刻んだお守り

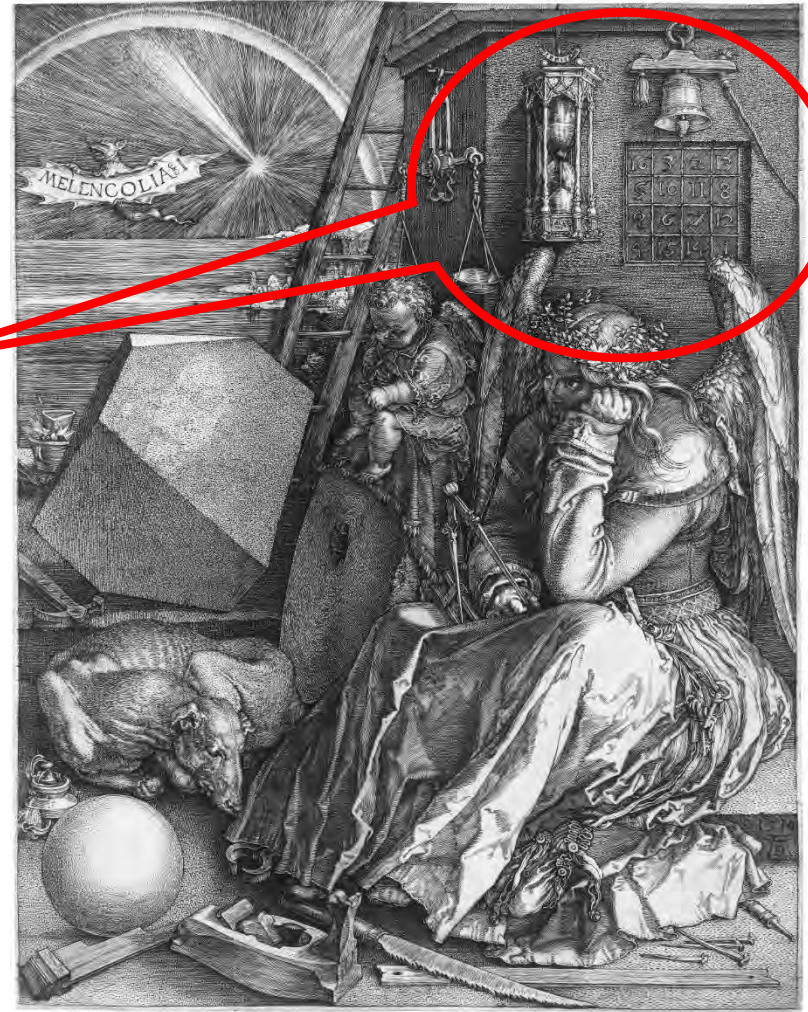


“ The mystic tablet “

15世紀 西洋



魔方陣



独: Melencolia I (1514)
作: Albrecht Durer

魔方陣の歴史（日本）

上毛かるた

「和算の大家 関孝和」

関 孝和

日本数学史上最高の英雄人物

- 江戸時代の数学者
- 群馬県藤岡市出身
- 円周率の近似値，
行列の概念を確立
- 魔方陣の研究「方陣之法」



余談

群馬県出身の学生

「群馬の若者は皆、子供の時の「上毛かるた」で関孝和を知っています。」

→ 学校教育の影響の大きさを認識

「すごいな。」

「じゃ国定忠治を知っているかい？」

「知りません。だれですか。」

「群馬には JR国定駅、赤城山があるけど。。。」

→ 若者に取り残される寂しさを感じる



魔方陣の歴史 (日本)

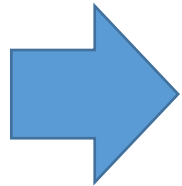
関孝和が考案した6次方陣

和が37となる2数を線で結ぶと模様が出現



4	3	35	36	28	5
6	14	19	15	26	31
30	24	17	21	12	7
29	25	16	20	13	8
10	11	22	18	23	27
32	34	2	1	9	33

和が37となる2数を線で結ぶと美しい模様が出現



37の連結線

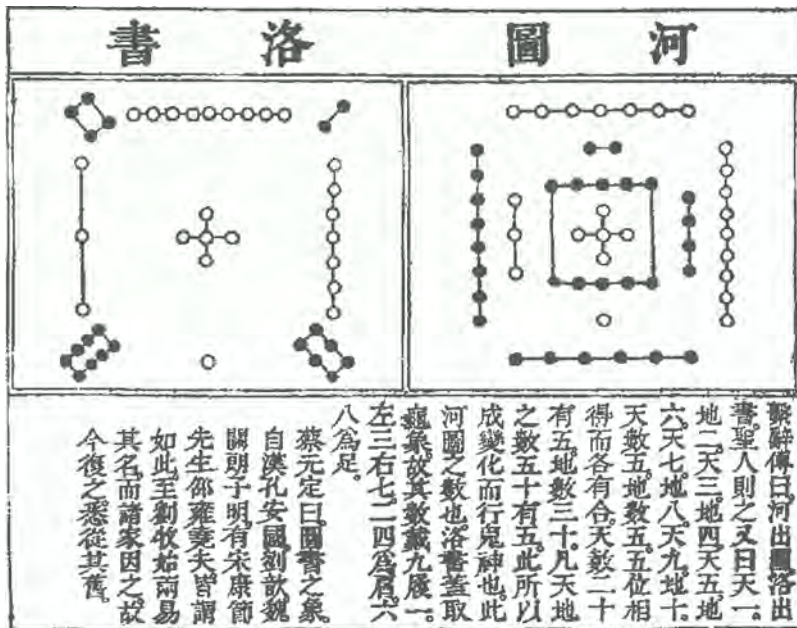
魔方陣の奥深さを感じる作品

4	3	35	36	28	5
6	14	19	15	26	31
30	24	17	21	12	7
29	25	16	20	13	8
10	11	22	18	23	27
32	34	2	1	9	33

Magic Square – 魔方陣 -

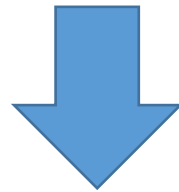
「人類最初の数論問題」

不思議な魔術ではなく、数の神秘が宿る



Magic Square – 魔方陣 -

「人類最初の数論問題」を工学へ応用
数の神秘の力より、イノベーション



魔方陣の「多様性」、「調和」、「奥深さ」、「美しさ」

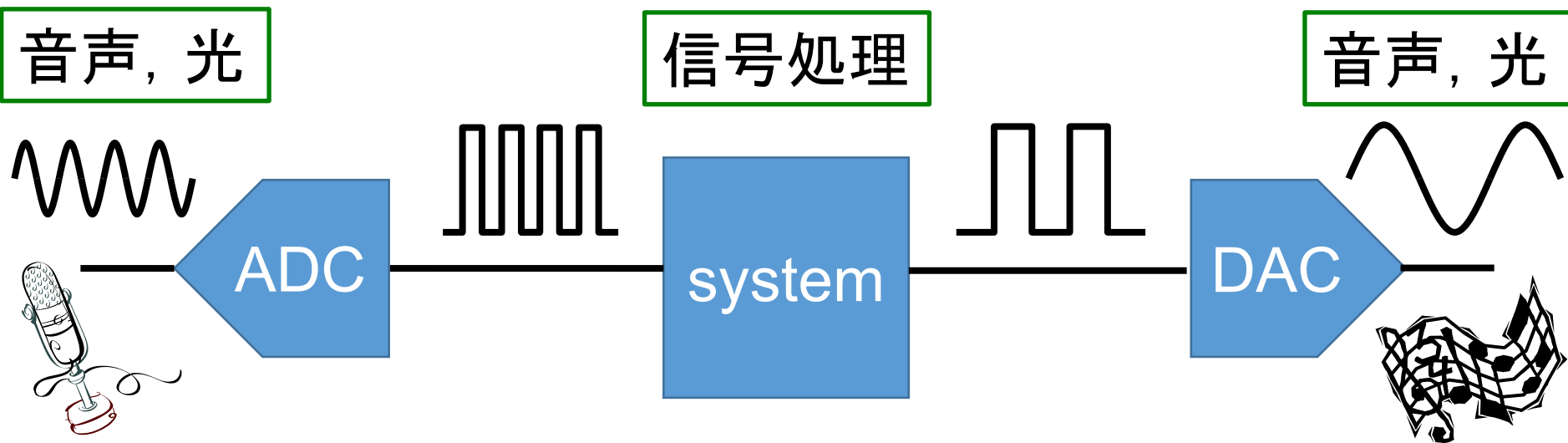
魔方陣レイアウト技術による
DA変換器の線形性向上

AD/DA変換器の重要性

電子機器 {
• 小型化
• 高速化

➡ デジタル回路が適している

✓ しかし、自然界の信号はアナログ信号であるので
信号処理が必要



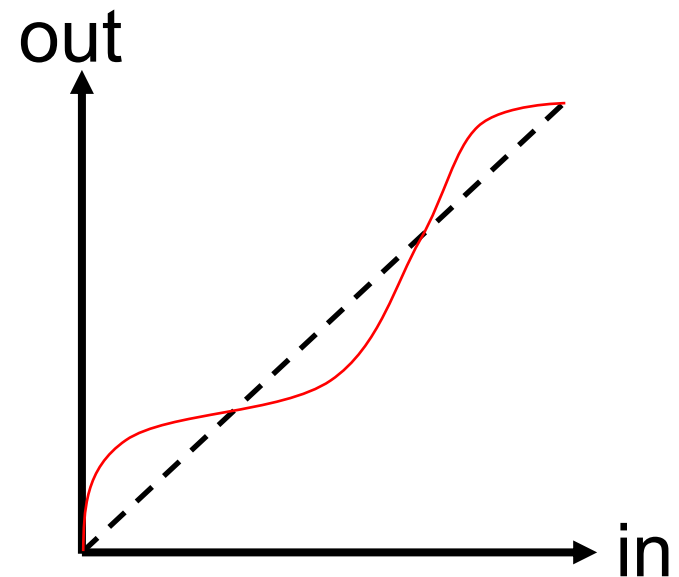
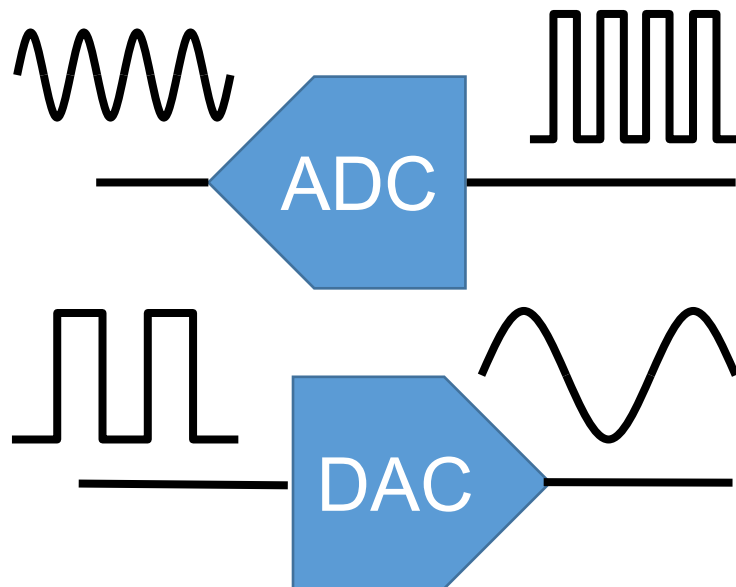
→ 高性能なAD及びDA変換器が求められている

素子ばらつきによる非線形性

- ✓ 半導体素子を構成しているシリコンウェハ上では、ばらつきが存在

ex) MOSFET特性, 抵抗, 容量

{ 素子のミスマッチ
入出力信号の線形性劣化



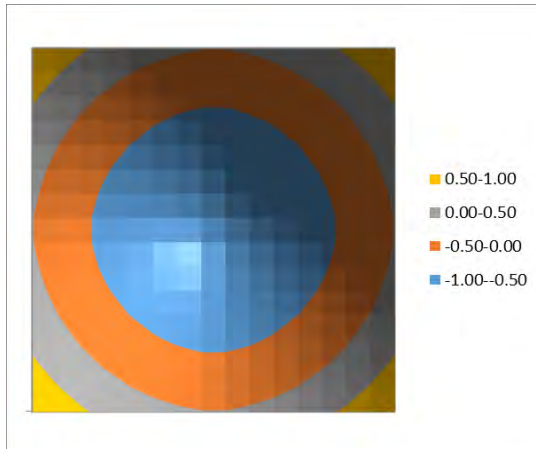
二種類の素子ばらつき

◆ ばらつきの種類

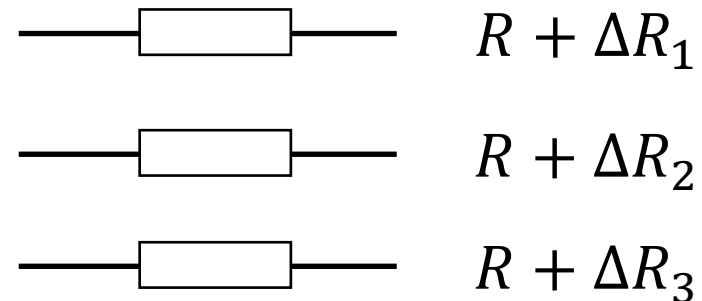
- ✓ システマティックなばらつき
- ✓ ランダムなばらつき

ex. ウェハ上で、

- システマティックな傾斜をもってばらつく
- 素子ごとにランダムにばらつく



システマティック



ランダム

システムテックばらつき

◆ ばらつきの種類

- ✓ システムティックなばらつき
- ✓ ランダムなばらつき

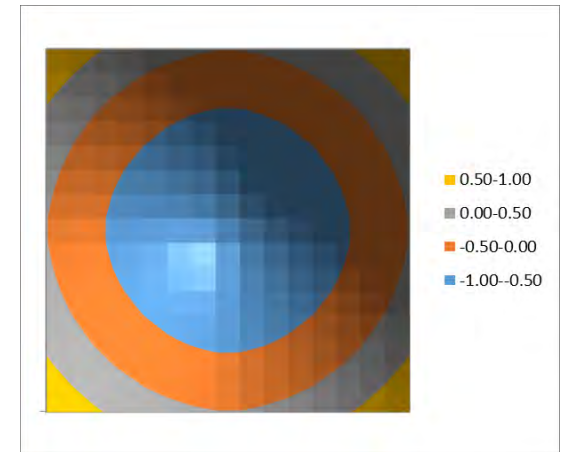
◆ システムティックなばらつき

- ✓ 電圧降下
- ✓ 酸化膜の厚さ
- ✓ ドーピング
- ✓ 機械的ストレス
- ✓ 温度分布
- ✓ ウエハ面内

レイアウトで改善

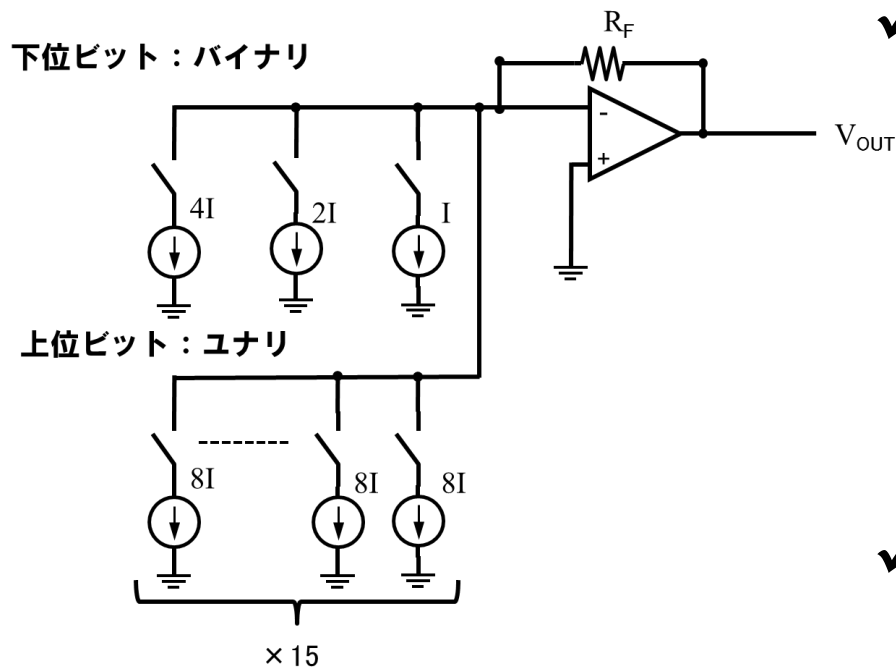
- 従来方法

Random Walk, 配置



DA変換器の構成

◆ DA変換器の構成



セグメント型DA変換器

✓ バイナリ型

- 小型化可能
- コードの切り替えでグリッチ発生
- ミスマッチの発生：大

✓ ユナリ型

- 小型化不可
- ミスマッチの影響：少
- グリッチの発生：少

DA変換器の動作

◆ DA変換器の構成

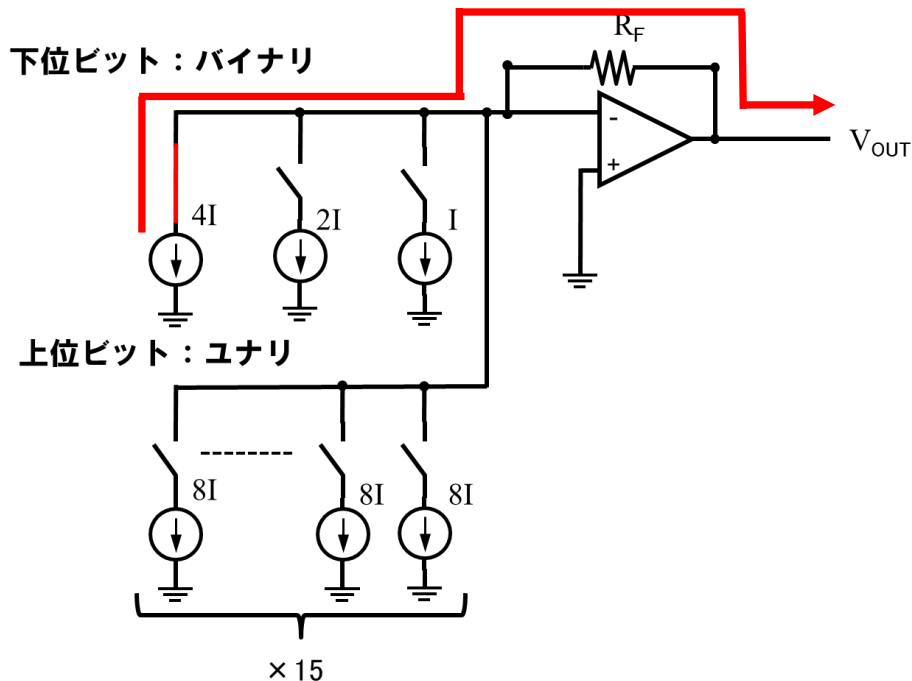
✓ 7bit DA変換器

ex.1

(0000100)



$$V_{out} = 4IR_F$$

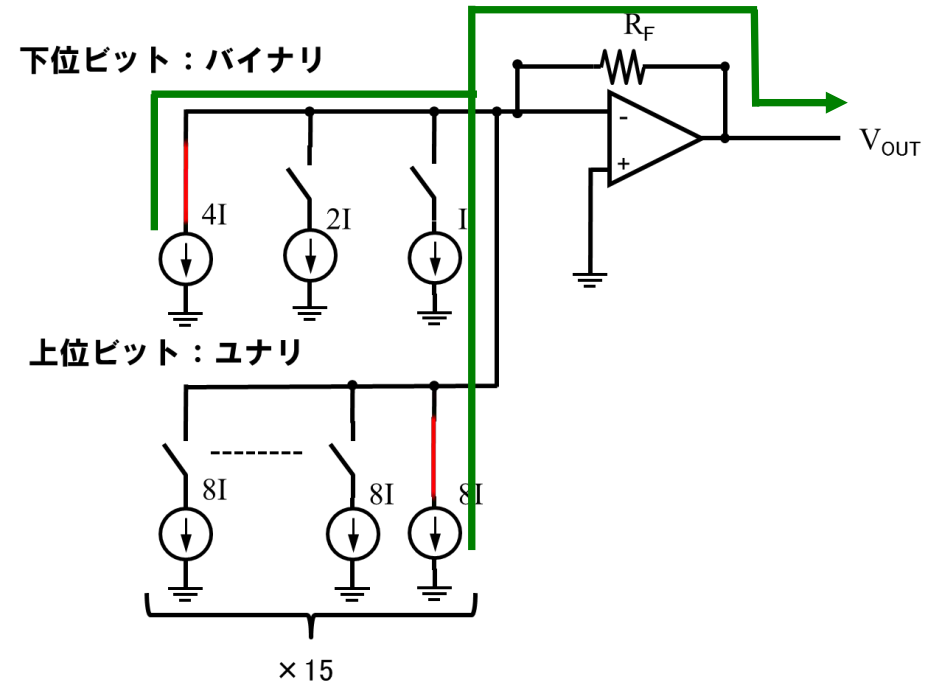


ex.2

(0001100)



$$V_{out} = 12IR_F$$



電流セル配列のレイアウト

◆ DA変換器の構成

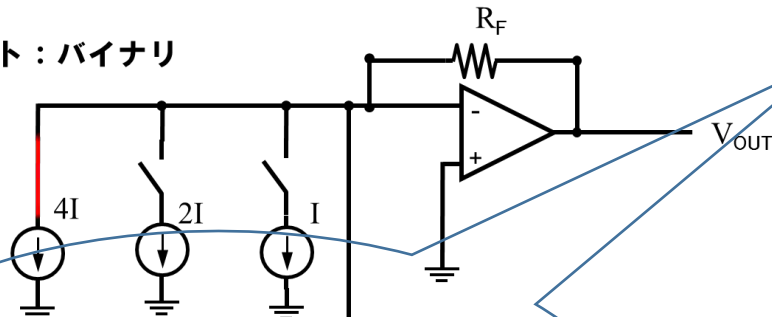
✓ 7bit DA変換器

(0001100)

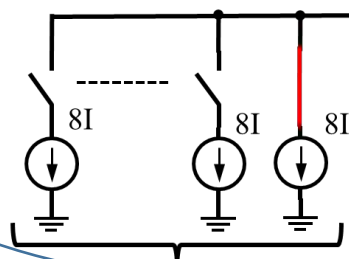


$$V_{out} = 12IR_F$$

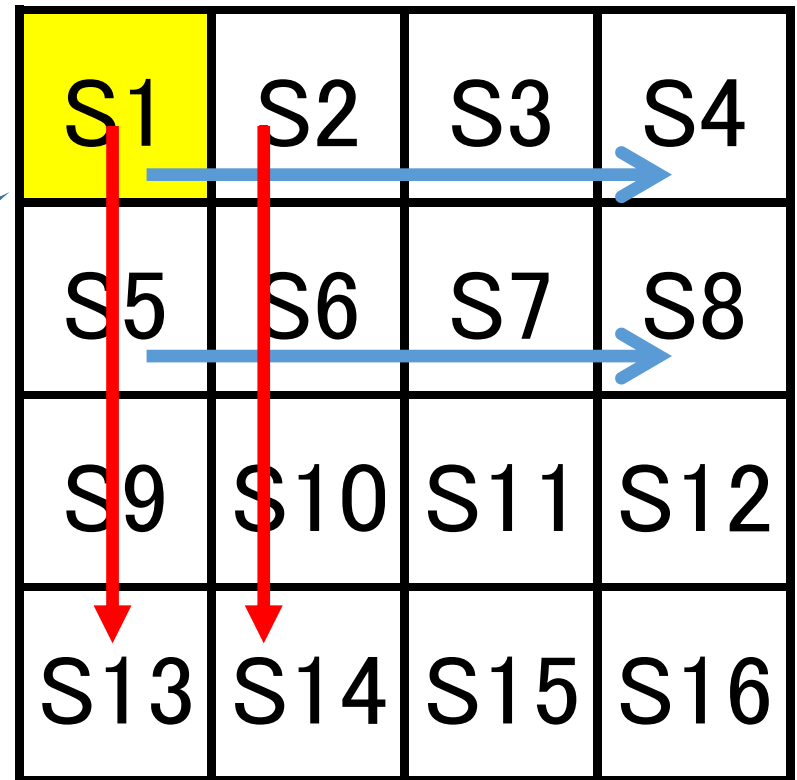
下位ビット：バイナリ



上位ビット：ユナリ



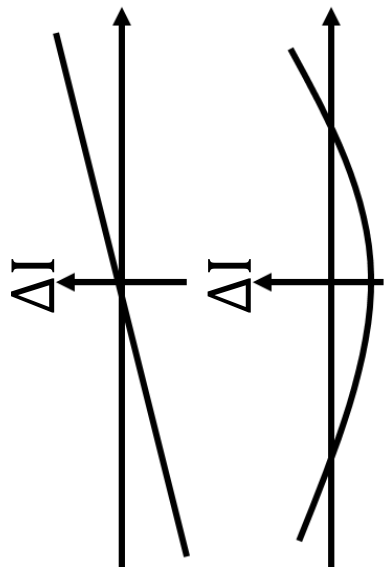
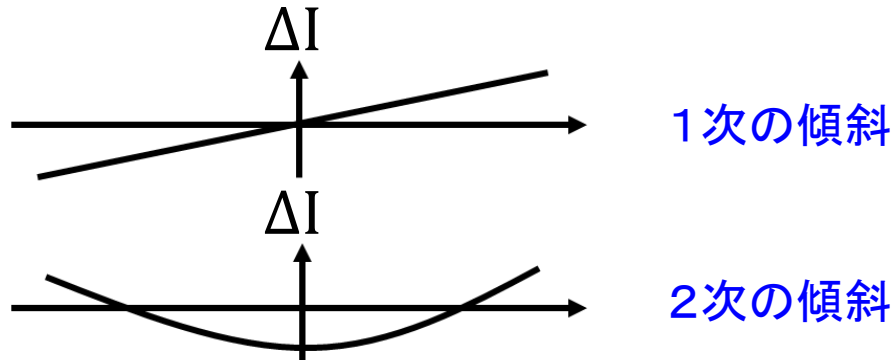
× 15



単位電流セル(ユナリ型)

電流源配列のミスマッチ傾斜

◆ DA変換器 - システムティック・ミスマッチとレイアウト

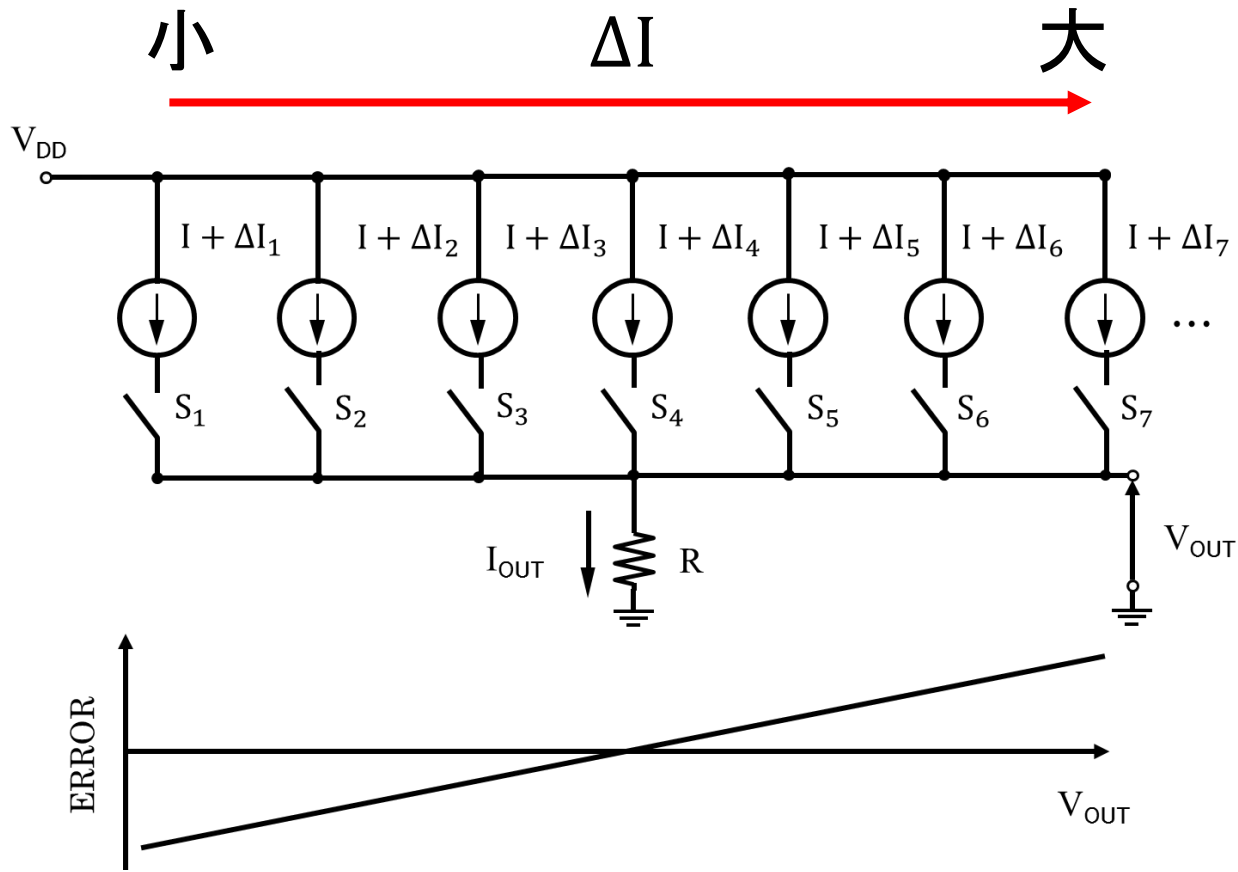


S1	S2	S3	S4
S5	S6	S7	S8
S9	S10	S11	S12
S13	S14	S15	S16

ミスマッチの傾斜がそのまま出力信号へ

電流セル配列とDAC非線形性

◆ DA変換器 - システムティック・ミスマッチとレイアウト

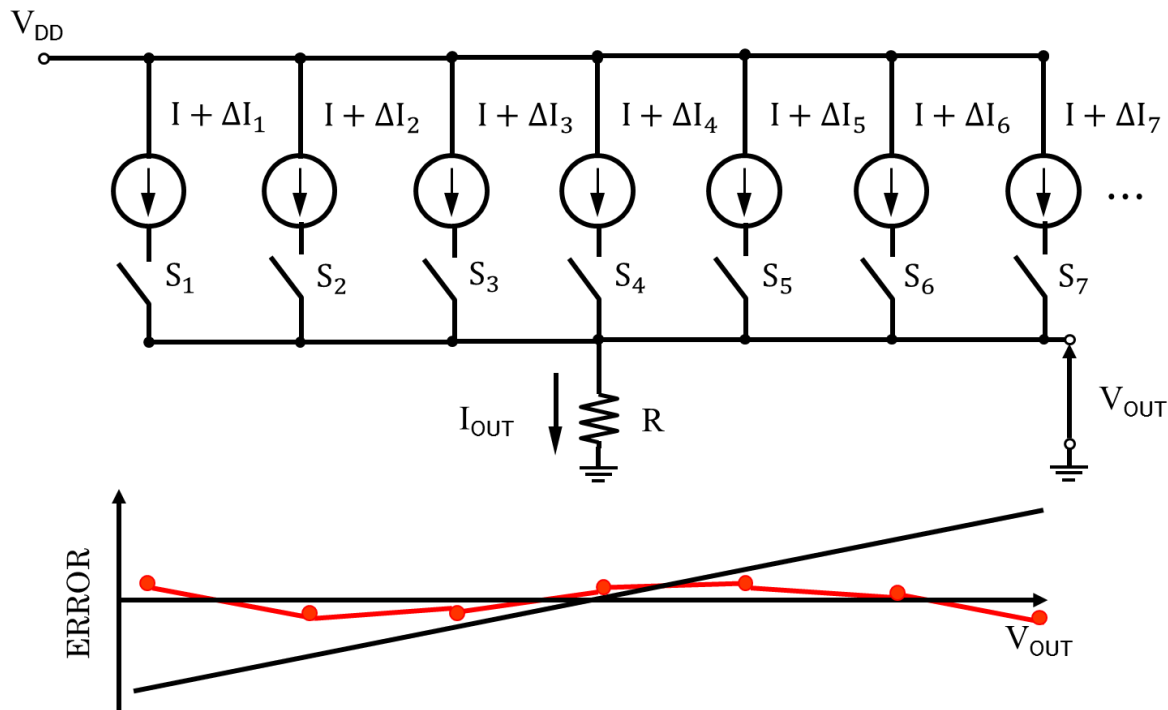


電流源のミスマッチにより入出力信号の線形性劣化が問題

電流セル配列レイアウトとDAC線形性向上

◆ DA変換器 - システムティック・ミスマッチとレイアウト

S4	S8	S12	S5
S14	S10	S6	S1
S9	S13	S2	S15
S3	S7	S16	S11



スイッチング順序を変える事によりエラーをキャンセル



Random Walk

魔方陣による電流セル配列レイアウト

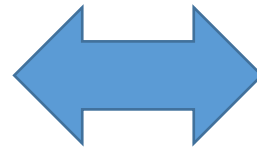
考案

魔方陣によるレイアウト

定和性の一致

4	9	7	14
16	5	11	2
13	8	10	3
1	12	6	15

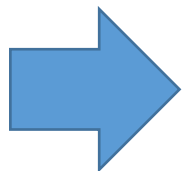
魔方陣



S1	S2	S3	S4
S5	S6	S7	S8
S9	S10	S11	S12
S13	S14	S15	S16

単位電流セル(ユナリ型)

魔方陣の「多様性」, 「調和」, 「奥深さ」, 「美しさ」



DA変換器への応用

✓ システマティックなばらつき

- Linear Error

$$\varepsilon_l(x, y) = g_l * \cos \theta * x + g_l * \sin \theta * y$$

θ : 傾きの角度, g_l : 傾きの大きさ

- Quadratic Error

$$\varepsilon_q(x, y) = g_q * (x^2 + y^2) - a_0$$

g_q : 変化量, a_0 : 位置

各魔方陣のシミュレーション方法・結果(2)

◆ 同心魔方陣

8次方陣を4つ組み合わせて8bitの単位電流源セルを表現

59	5	4	62	63	1	8	58
9	18	17	49	50	42	19	56
55	20	28	33	29	40	45	10
54	44	38	31	35	26	21	11
12	43	39	30	34	27	22	53
13	24	25	36	32	37	41	52
51	46	48	16	15	23	47	14
7	60	61	3	2	64	57	6

A1	B1
B2	A2

A:左図の魔方陣
B:45° 左回転

各魔方陣のシミュレーション方法・結果(3)

◆ 同心魔方陣

- アルゴリズム

A1	B1
B2	A2

59	5	4	62	63	1	8	58	58	56	10	11	53	52	14	6
9	18	17	49	50	42	19	56	8	19	45	21	22	41	47	57
55	20	28	33	29	40	45	10	1	42	40	26	27	37	23	64
54	44	38	31	35	26	21	11	63	50	29	35	34	32	15	2
12	43	39	30	34	27	22	53	62	49	33	31	30	36	16	3
13	24	25	36	32	37	41	52	4	17	28	38	39	25	48	61
51	46	48	16	15	23	47	14	5	18	20	44	43	24	46	60
7	60	61	3	2	64	57	6	59	9	55	54	12	13	51	7
58	56	10	11	53	52	14	6	59	5	4	62	63	1	8	58
8	19	45	21	22	41	47	57	9	18	17	49	50	42	19	56
1	42	40	26	27	37	23	64	55	20	28	33	29	40	45	10
63	50	29	35	34	32	15	2	54	44	38	31	35	26	21	11
62	49	33	31	30	36	16	3	12	43	39	30	34	27	22	53
4	17	28	38	39	25	48	61	13	24	25	36	32	37	41	52
5	18	20	44	43	24	46	60	51	46	48	16	15	23	47	14
59	9	55	54	12	13	51	7	7	60	61	3	2	64	57	6

各魔方陣のシミュレーション方法・結果(4)

◆ 同心魔方陣

- アルゴリズム

A1	B1
B2	A2

59	5	4	62	63	1	8	58	58	56	10	11	53	52	14	6
9	18	17	49	50	42	19	56	8	19	45	21	22	41	47	57
55	20	28	33	29	40	45	10	1	42	40	26	27	37	23	64
54	44	38	31	35	26	21	11	63	50	29	35	34	32	15	2
12	43	39	30	34	27	22	53	62	49	33	31	30	36	16	3
13	24	25	36	32	37	41	52	4	17	28	38	39	25	48	61
51	46	48	16	15	23	47	14	5	18	20	44	43	24	46	60
7	60	61	3	2	64	57	6	59	9	55	54	12	13	51	7
58	56	10	11	53	52	14	6	59	5	4	62	63	1	8	58
8	19	45	21	22	41	47	57	9	18	17	49	50	42	19	56
1	42	40	26	27	37	23	64	55	20	28	33	29	40	45	10
63	50	29	35	34	32	15	2	54	44	38	31	35	26	21	11
62	49	33	31	30	36	16	3	12	43	39	30	34	27	22	53
4	17	28	38	39	25	48	61	13	24	25	36	32	37	41	52
5	18	20	44	43	24	46	60	51	46	48	16	15	23	47	14
59	9	55	54	12	13	51	7	7	60	61	3	2	64	57	6

各魔方陣のシミュレーション方法・結果(5)

◆ 同心魔方陣

- アルゴリズム

A1	B1
B2	A2

59	5	4	62	63	1	8	58	58	56	10	11	53	52	14	6
9	18	17	49	50	42	19	56	8	19	45	21	22	41	47	57
55	20	28	33	29	40	45	10	1	42	40	26	27	37	23	64
54	44	38	31	35	26	21	63	50	29	35	34	32	15	2	
12	43	39	30	34	27	22	63	62	49	33	31	30	36	16	3
13	24	25	36	32	37	41	52	4	17	28	38	39	25	48	61
51	46	48	16	15	23	47	14	5	18	20	44	43	24	46	60
7	60	61	3	2	64	57	6	59	9	55	54	12	13	51	7
58	56	10	11	53	52	14	6	59	5	4	62	62	1	8	58
8	19	45	21	22	41	47	57	9	18	17	50	42	19	56	
1	42	40	26	27	37	23	64	55	20	28	33	29	40	45	10
63	50	29	35	34	32	15	2	54	44	38	31	35	26	21	11
62	49	33	31	30	36	16	3	12	43	39	30	34	27	22	53
4	17	28	38	39	25	48	61	13	24	25	36	32	37	41	52
5	18	20	44	43	24	46	60	51	46	48	16	15	23	47	14
59	9	55	54	12	13	51	7	7	60	61	3	2	64	57	6

各魔方陣のシミュレーション方法・結果(6)

◆ 同心魔方陣

- アルゴリズム

A1	B1
B2	A2

59	5	4	62	63	1	8	58	58	56	10	11	53	52	14	6
9	18	17	49	50	59	56	8	19	45	21	22	41	47	57	
55	20	28	33	29	40	45	10	1	42	40	26	27	37	23	64
54	44	38	31	35	26	21	63	50	29	35	34	32	15	2	
12	43	39	30	34	27	22	53	62	49	33	31	30	36	16	3
13	24	25	36	32	37	41	52	4	17	28	38	39	25	48	61
51	46	48	16	15	23	47	14	5	18	20	44	43	24	46	60
7	60	61	3	2	64	57	6	59	9	55	54	12	13	51	7
53	56	10	11	53	52	14	6	59	5	4	62	63	1	8	58
8	19	45	21	22	41	47	57	9	18	20	44	43	24	46	60
1	42	40	26	27	37	23	64	55	20	28	33	29	40	45	10
63	50	29	35	34	32	15	2	54	44	38	31	35	26	21	11
62	49	33	31	30	36	16	3	12	43	39	30	34	27	22	53
4	17	28	38	39	25	48	61	13	24	25	36	32	37	41	52
5	18	20	44	43	24	46	60	51	46	48	16	15	23	47	14
59	9	55	54	12	13	51	7	7	60	61	3	2	64	57	6

各魔方陣のシミュレーション方法・結果(7)

◆ 同心魔方陣

- アルゴリズム

A1	B1
B2	A2

59	5	4	62	63	1	8	58	58	56	10	11	53	52	14	6
9	18	17	49	50			56	8	19	45	21	22	41	47	57
55	20	29	33	29	40	45	10	1	42	40	26	27	37	23	64
54	44	38	31	35	26	21		63	50	29	35	34	32	15	2
12	43	39	30	34	27	22	53	62	49	33	31	30	36	16	3
13	24	25	36	32	37	41	52	4	17	28	38	39	25	48	61
51	46	48	16	15	23	47	14	5	18	20	44	43	24	46	60
7	60	61	3	2	64	57	6	59	9	55	54	12		51	7
53	56	10	11		52	14	6	59	5	4	62	62	1	8	58
8	19	45	21	22	1	47	57	9	18		50	42	19	56	
1	40	40	26	27	7	23	64	55	20	28	33	29	40	45	10
63	50		35	34	32	15	2	54	44	38	31	35	26	21	11
62	49	33	31	30	36	16	3	12	43	39	30	34	27	22	53
4	17	28	38	39	25	48	61	13	24	25	36	32	37	41	52
5	18	20	44	43	24	46	60	51	46	48	16	15	23	47	14
59	9	55	54	12	13	51	7	7	60	61	3	2	64	57	6

各魔方陣のシミュレーション方法・結果(8)

◆ 同心魔方陣

- アルゴリズム

A1	B1
B2	A2

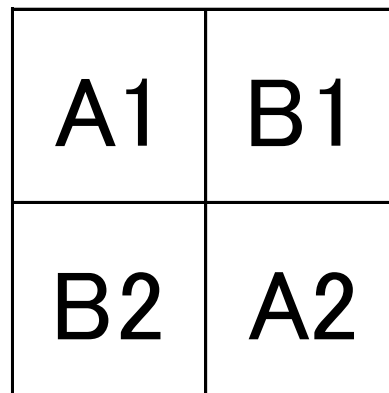
59	5	4	62	63	1	8	58	58	56	10	11	53	52	14	6
9	18	17	49	50	42	19	56	8	19	45	21	22	41	47	57
55	20	28	33	29	40	45	10	1	42	40	26	27	37	23	64
54	44	38	31	35	26	21	11	63	50	29	35	34	32	15	2
12	43	39	30	34	27	22	53	62	49	33	31	30	36	16	3
13	24	25	36	32	37	41	52	4	17	28	38	39	25	48	61
51	46	48	16	15	23	47	14	5	18	20	44	43	24	46	60
7	60	61	3	2	64	57	6	59	9	55	54	12	13	51	7
58	56	10	11	53	52	14	6	59	5	4	62	63	1	8	58
8	19	45	21	22	41	47	57	9	18	17	49	50	42	19	56
1	42	40	26	27	37	23	64	55	20	28	33	29	40	45	10
63	50	29	35	34	32	15	2	54	44	38	31	35	26	21	11
62	49	33	31	30	36	16	3	12	43	39	30	34	27	22	53
4	17	28	38	39	25	48	61	13	24	25	36	32	37	41	52
5	18	20	44	43	24	46	60	51	46	48	16	15	23	47	14
59	9	55	54	12	13	51	7	7	60	61	3	2	64	57	6

各魔方陣のシミュレーション方法・結果(9)

◆ 同心魔方陣

• アルゴリズム

1. A1の1
2. A2の1
3. B1の1
4. B2の1
5. A1の2
- ⋮
255. B1の256
256. B2の256



59	5	4	62	63	1	8	58	58	56	10	11	53	52	14	6
9	18	17	49	50	42	19	56	8	19	45	21	22	41	47	57
55	20	28	33	29	40	45	10	1	42	40	26	27	37	23	64
54	44	38	31	35	26	21	11	63	50	29	35	34	32	15	2
12	43	39	30	34	27	22	53	62	49	33	31	30	36	16	3
13	24	25	36	32	37	41	52	4	17	28	38	39	25	48	61
51	46	48	16	15	23	47	14	5	18	20	44	43	24	46	60
7	60	61	3	2	64	57	6	59	9	55	54	12	13	51	7
58	56	10	11	53	52	14	6	59	5	4	62	63	1	8	58
8	19	45	21	22	41	47	57	9	18	17	49	50	42	19	56
1	42	40	26	27	37	23	64	55	20	28	33	29	40	45	10
63	50	29	35	34	32	15	2	54	44	38	31	35	26	21	11
62	49	33	31	30	36	16	3	12	43	39	30	34	27	22	53
4	17	28	38	39	25	48	61	13	24	25	36	32	37	41	52
5	18	20	44	43	24	46	60	51	46	48	16	15	23	47	14
59	9	55	54	12	13	51	7	7	60	61	3	2	64	57	6

中央と隅を取りつつ、擬似ランダムなスイッチングを再現

各魔方陣のシミュレーション方法・結果(10)

◆ 同心魔方陣

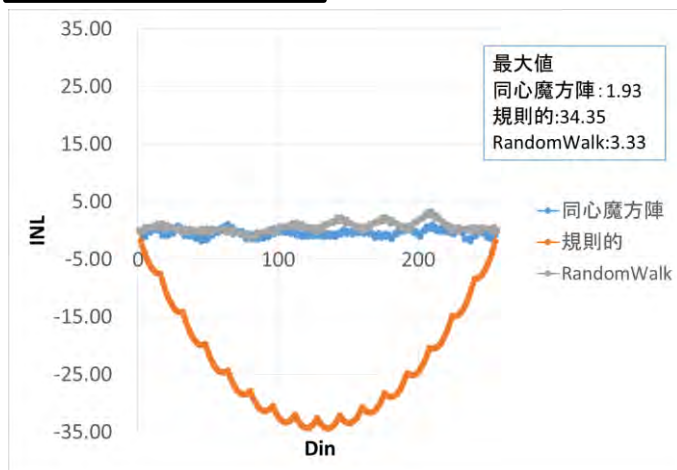
✓ Linear Error

$$\varepsilon_l(x, y) = g_l * \cos \theta * x + g_l * \sin \theta * y$$

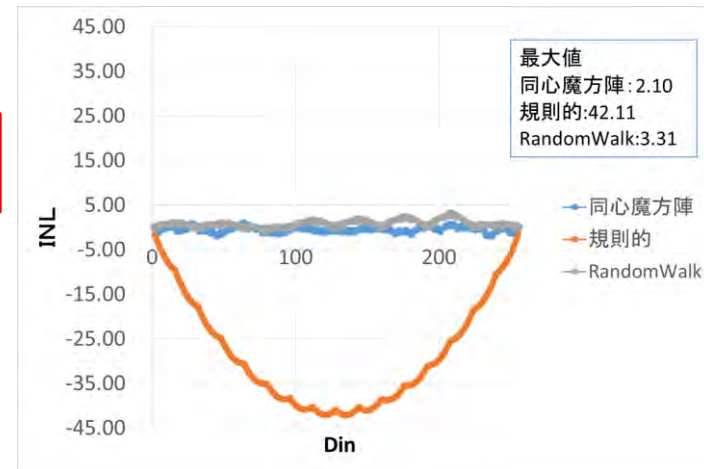
$$\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$$

$$g_l = 1$$

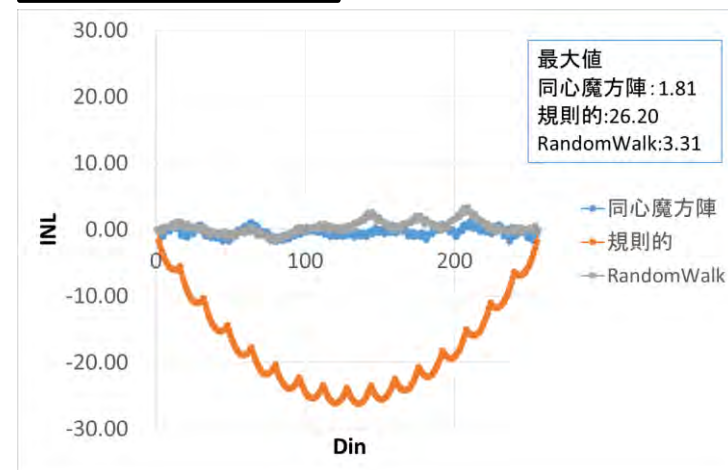
• $\theta = 45^\circ$



• $\theta = 30^\circ$



• $\theta = 60^\circ$



各魔方陣のシミュレーション方法・結果(11)

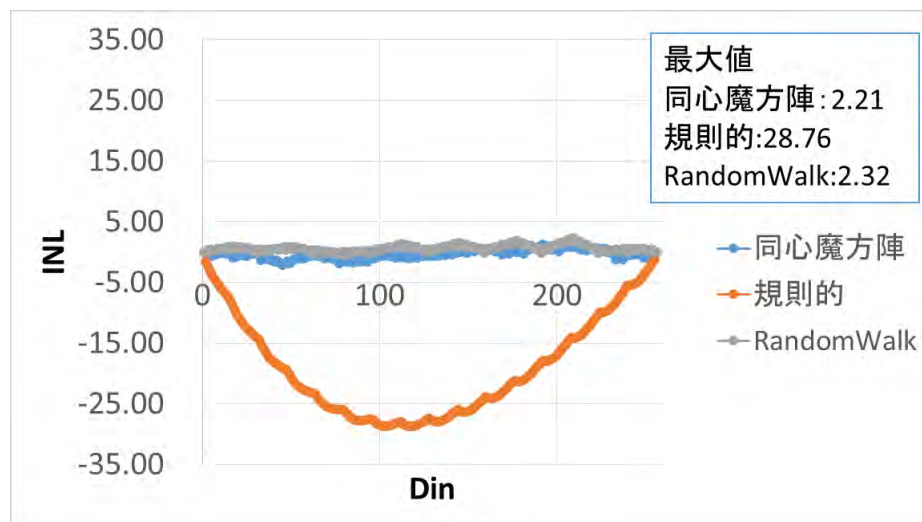
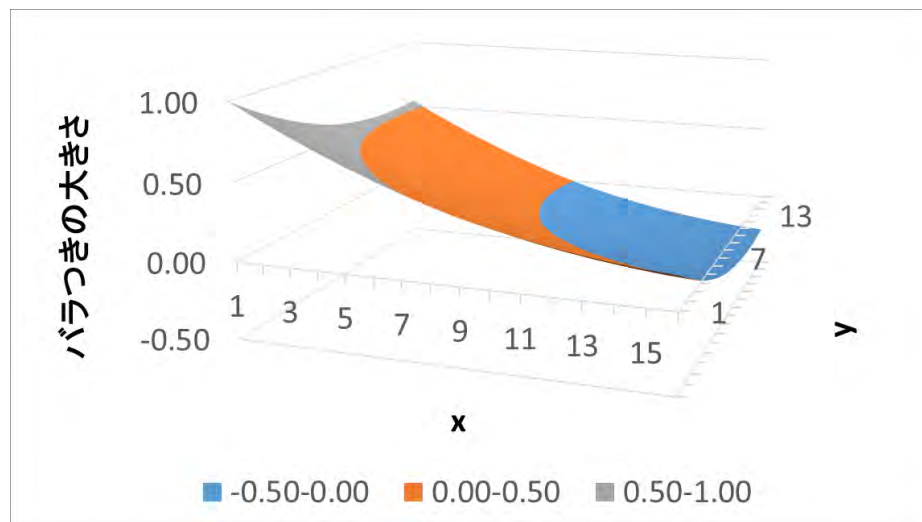
◆ 同心魔方陣

✓ Joint Error

一次 > 二次 の場合

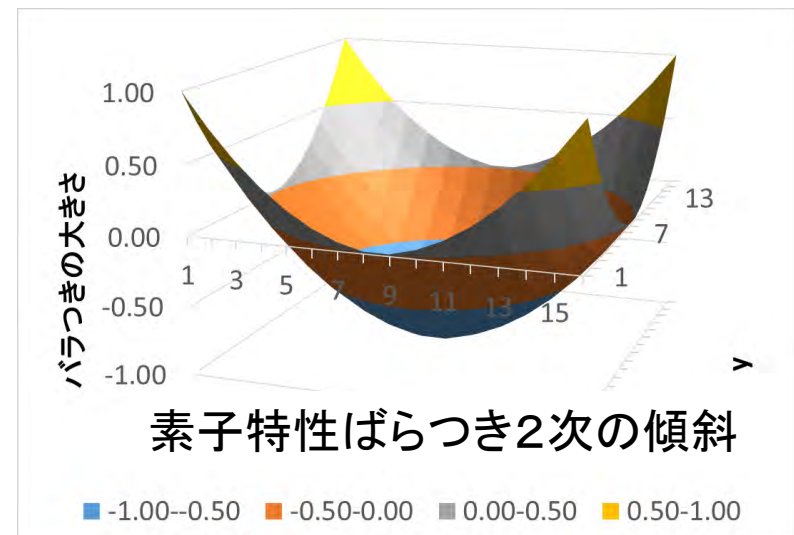
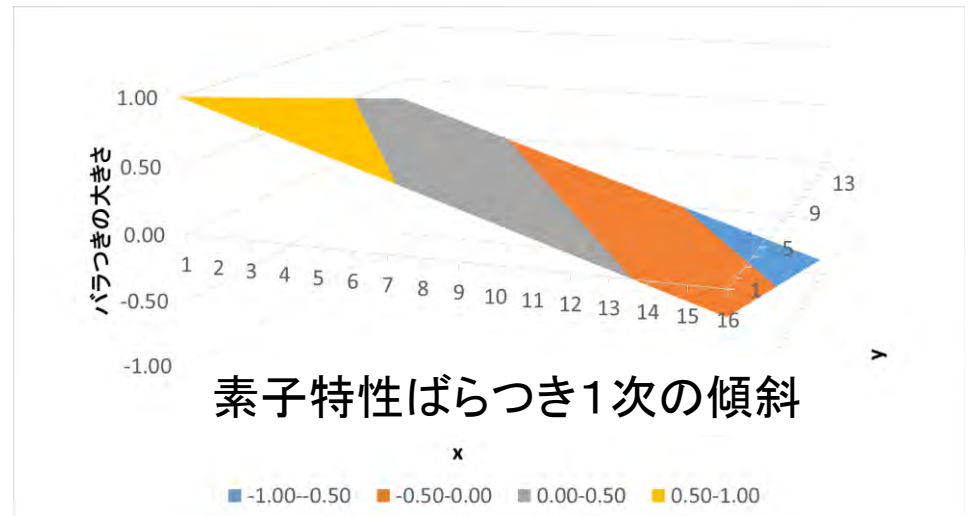


魔方陣の方が適している



魔方陣DA変換器レイアウト まとめ

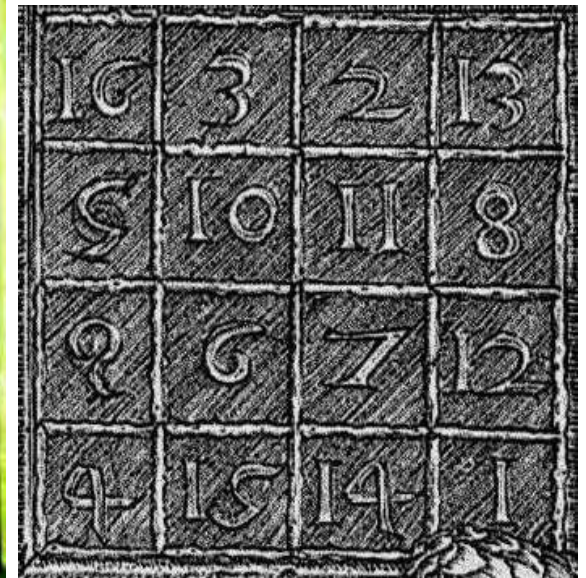
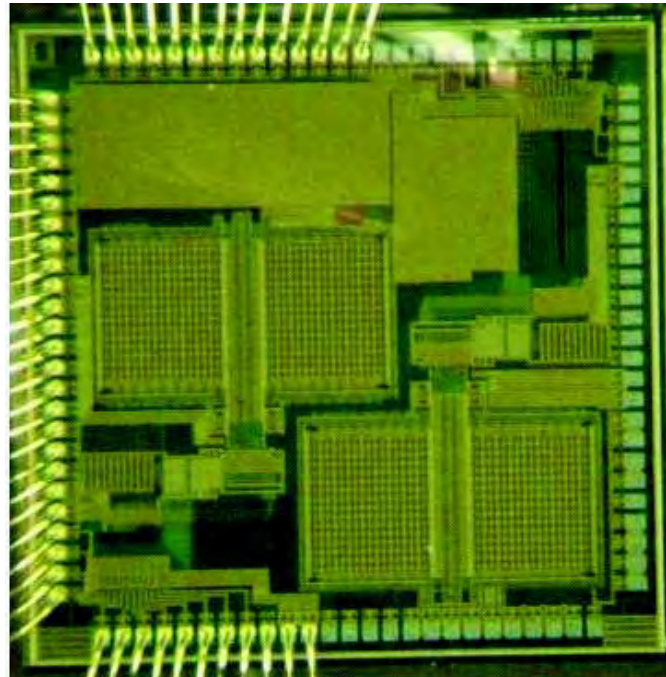
- 魔方陣レイアウトは素子ばらつき1次の傾斜キャンセルにより有効
- 他の2次元技術(画像技術等)にも展開



まとめ

Any sufficiently advanced technology is indistinguishable from **magic**.

(科学小説作家 Arthur C. Clarke の第3法則)



Magic (手品) と Magic Square (魔方陣) をかけています

剰余系(孫子算経)を用いた 時間デジタル変換回路

李从兵 (群馬大学) 加藤健太郎 (鶴岡高専)
王俊善 小林春夫 (群馬大学)

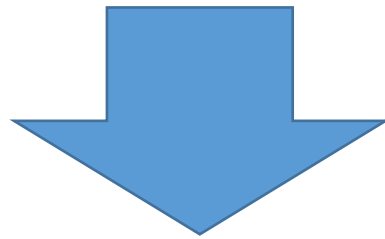


中国の剰余定理

- 中国の算術書『孫子算経』

「3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると2余る数はいくらか」

一般化



中国の剰余定理

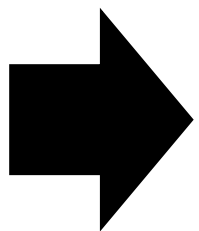
答え 23



孫子算経

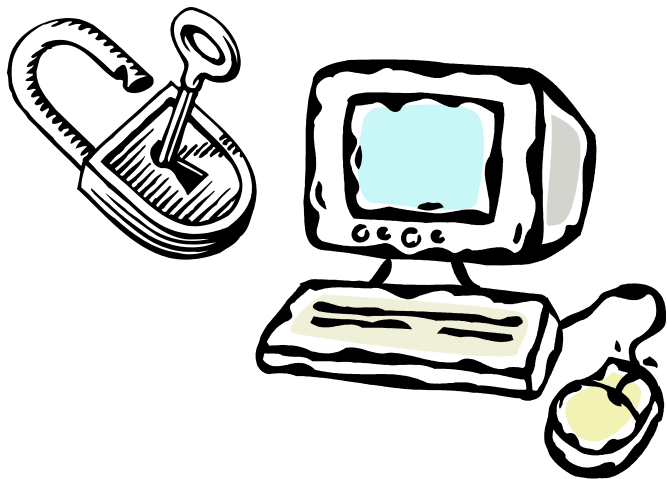
中国の剰余定理のアナログ回路への応用

- ✓ 江戸時代、「百五減算」として伝来
- ✓ 現在、情報セキュリティの暗号化に応用



古典数学によるイノベーション

集積回路に応用



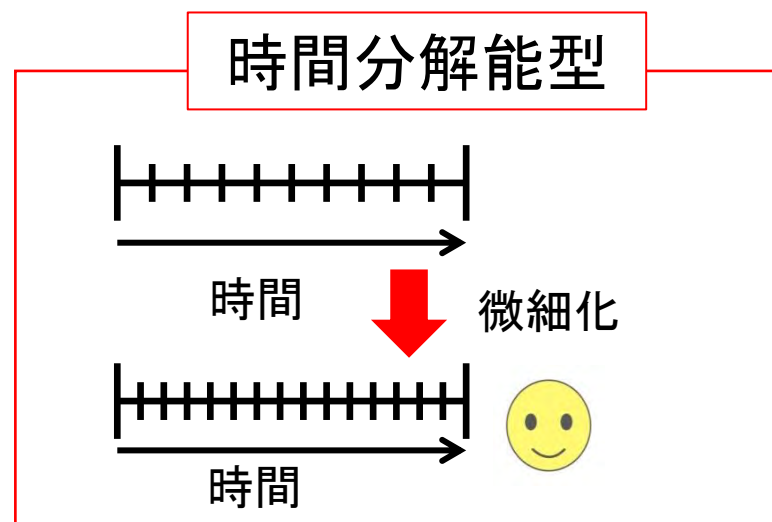
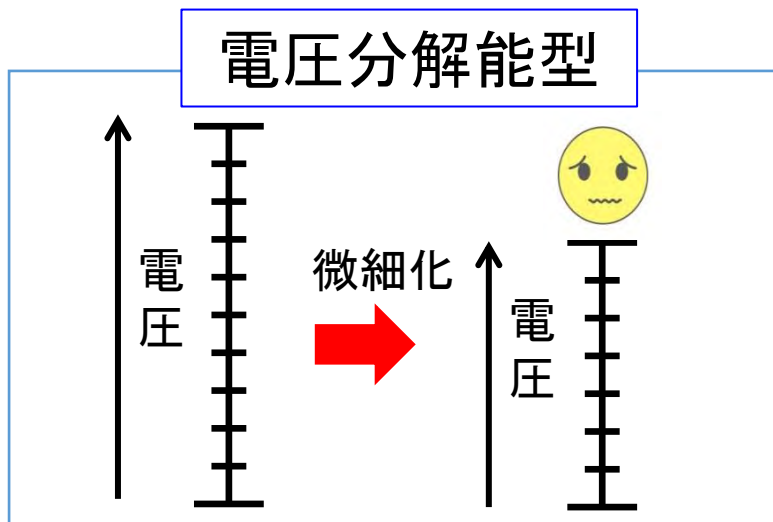
関孝和

研究背景

微細化CMOS LSI



電源電圧の低下
動作スイッチングスピードの向上

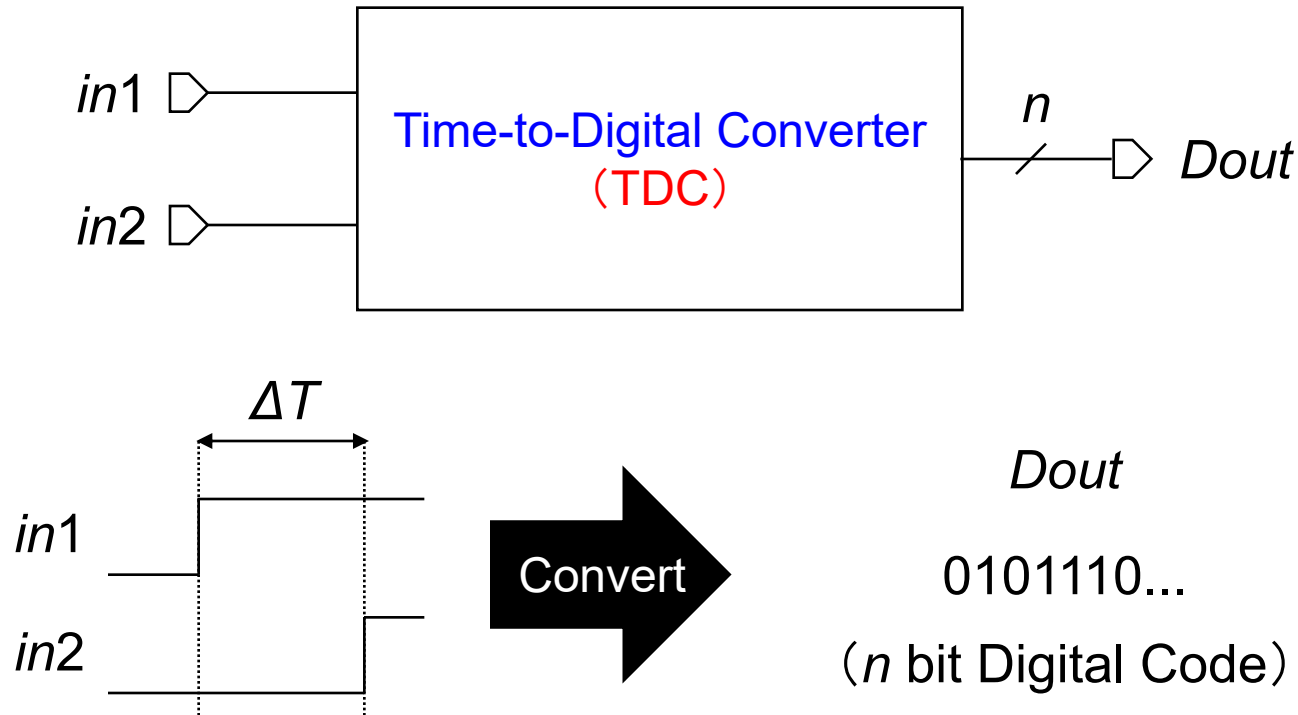


TDC (Time-to-Digital Converter) は2つのデジタル信号の時間差をデジタル値に変換



微細化CMOS LSIにおいて、TDCは時間領域アナログ回路のカギとなる
(センサ回路, All-Digital PLL, ADC, 変調回路等)

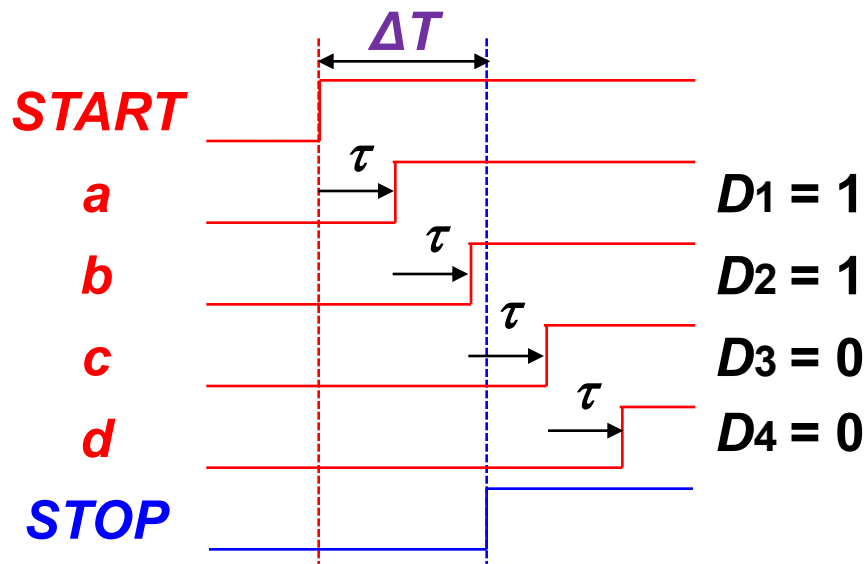
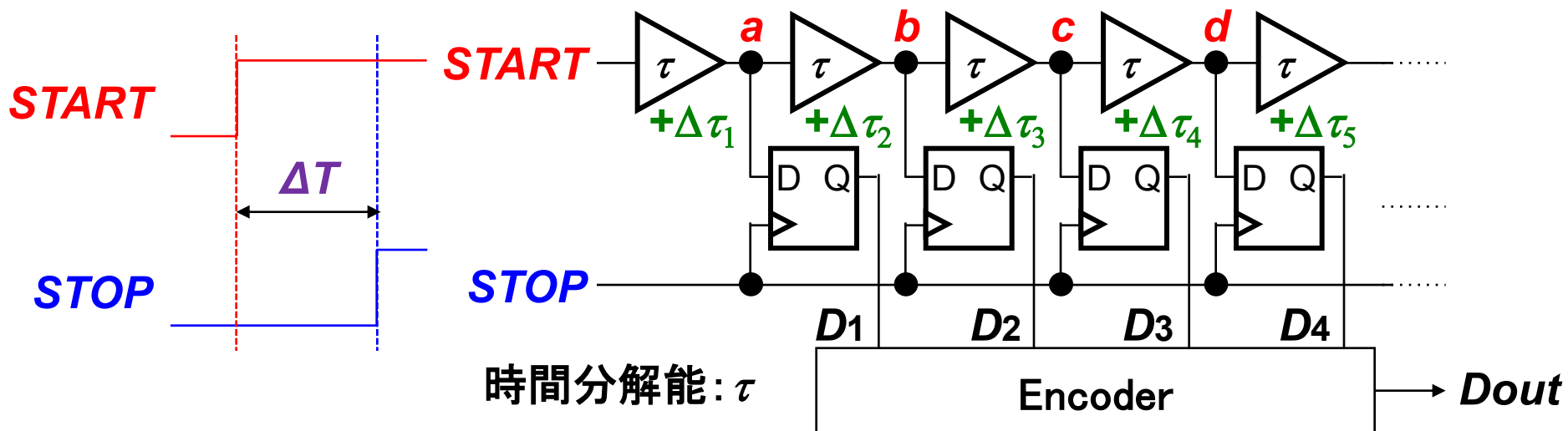
タイムデジタイザ回路



2つのデジタル信号間の時間差 ΔT をデジタル値に変換

出力のデジタル値より ΔT を測定可能

フラッシュ型 TDCの構成と動作



● ΔT の大きさに比例したデジタル値 Dout を出力

● 時間分解能 τ

高エネルギー加速器研究機構
素粒子原子核研究所
新井康夫氏による発明

フラッシュ型TDCの回路規模の問題

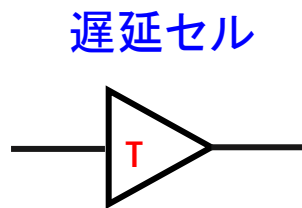
START とSTOP の立ち上がりエッジ間の時間差

測定範囲 $0 < \Delta T < N T$ ΔT

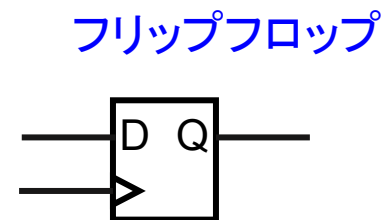
時間分解能 T

$N = 1001$ (千一) のとき

フラッシュ型TDC では大きな回路規模、大きな消費電力



1001個



1001個


提案する剰余系TDC $1001 = 7 \times 11 \times 13$
 同じ測定範囲、時間分解能で $7 + 11 + 13 = 31$ 個の
 遅延セル、フリップフロップで実現できる

千一個から三十一個へ !!

研究の目的

時間測定回路TDC

- LSIテストシステムのキーコンポーネント
- 時間信号であることを利用

 “剰余”が容易に得られる

- 剰余系を利用

フラッシュ型TDCに比べ、
同等性能、小回路規模・低消費電力TDCが
実現できる可能性あり



剰余系TDC回路を検討

剰余系の例

基数 2, 3, 5 互いに素

$$N=2 \times 3 \times 5 = 30$$

0から $N-1(=29)$ までの整数の一つを k

a: k を2で割った余り $a = \text{mod}2(k)$

b: k を3で割った余り $b = \text{mod}3(k)$

c: k を5で割った余り $c = \text{mod}5(k)$

k と (a, b, c) の組は1対1に対応する。

k を (a, b, c) で表現 \longrightarrow 剰余表現

中国人の剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)

(a, b, c) から k を求めるアルゴリズム



剰余定理の例

基数 2, 3, 5 互いに素

$$N=2 \times 3 \times 5 = 30$$

0から $N-1(=29)$ までの整数の一つを k

a : k を2で割った余り $a = \text{mod}2(k)$

b : k を3で割った余り $b = \text{mod}3(k)$

c : k を5で割った余り $c = \text{mod}5(k)$

k と (a, b, c) の組は1対1に対応する。

k を (a, b, c) で表現 \rightarrow 剰余表現

剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)

(a, b, c) から k を求めるアルゴリズム

剰余定理は、

この問題を他の整数についても適用できるように一般化したもの。

自然数 k と剰余表現 (m_1, m_2, m_3) は 1対1 対応

m_1	m_2	m_3	k
0	0	0	0
1	1	1	1
0	2	2	2
1	0	3	3
0	1	4	4
1	2	0	5
0	0	1	6
1	1	2	7
0	2	3	8
1	0	4	9
0	1	0	10
1	2	1	11
0	0	2	12
1	1	3	13
0	2	4	14

m_1	m_2	m_3	k
1	0	0	15
0	1	1	16
1	2	2	17
0	0	3	18
1	1	4	19
0	2	0	20
1	0	1	21
0	1	2	22
1	2	3	23
0	0	4	24
1	1	0	25
0	2	1	26
1	0	2	27
0	1	3	28
1	2	4	29

剰余DCの原理

TDC 回路は信号が時間であることを利用すると“剰余”が容易に得られる。

三つのリング発振回路(遅延 m_1T , m_2T , m_3T)を利用し、発振状態から経過時間 T の測定を行うことが可能で。剰余定理に基づいて、(a, b, c)から k を求め、経過時間 $T = k \times T$ を得る。

例えば、三つのリング発振回路(遅延 $2T$, $3T$, $5T$)を利用し、発振している状態から経過時間 T の測定を行う。

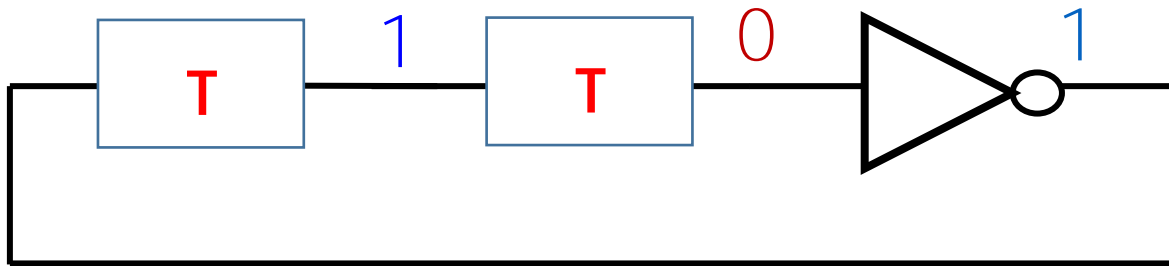
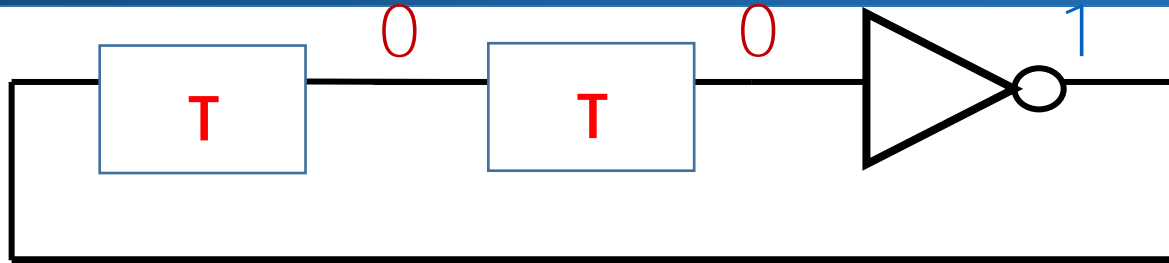
T を $2T$ で割った余りは a

T を $3T$ で割った余りは b

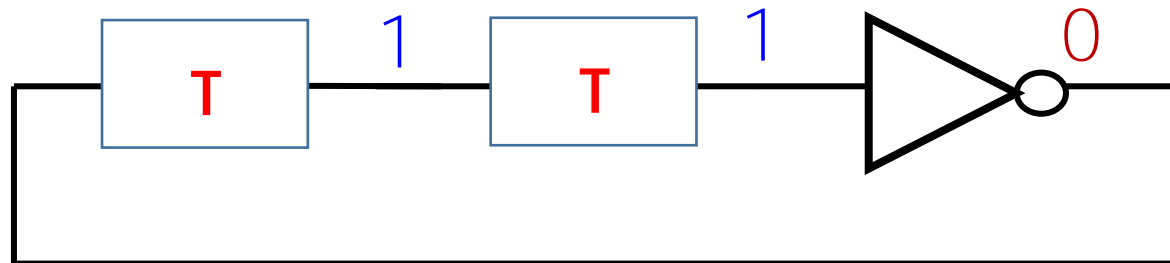
T を $5T$ で割った余りは c

⇒剰余定理で $T = k^*T$

リング発振回路で剰余が容易に得られる



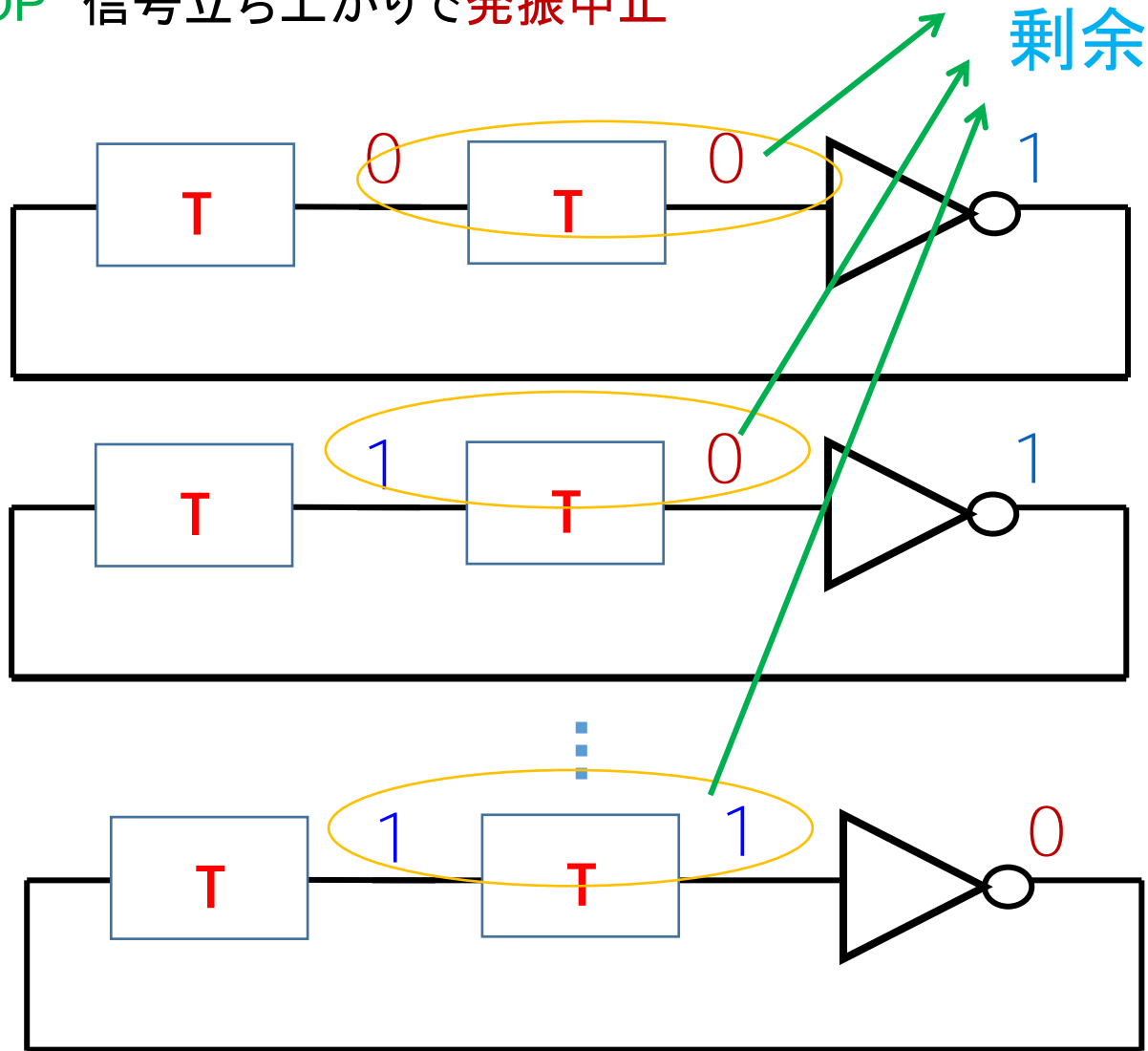
⋮



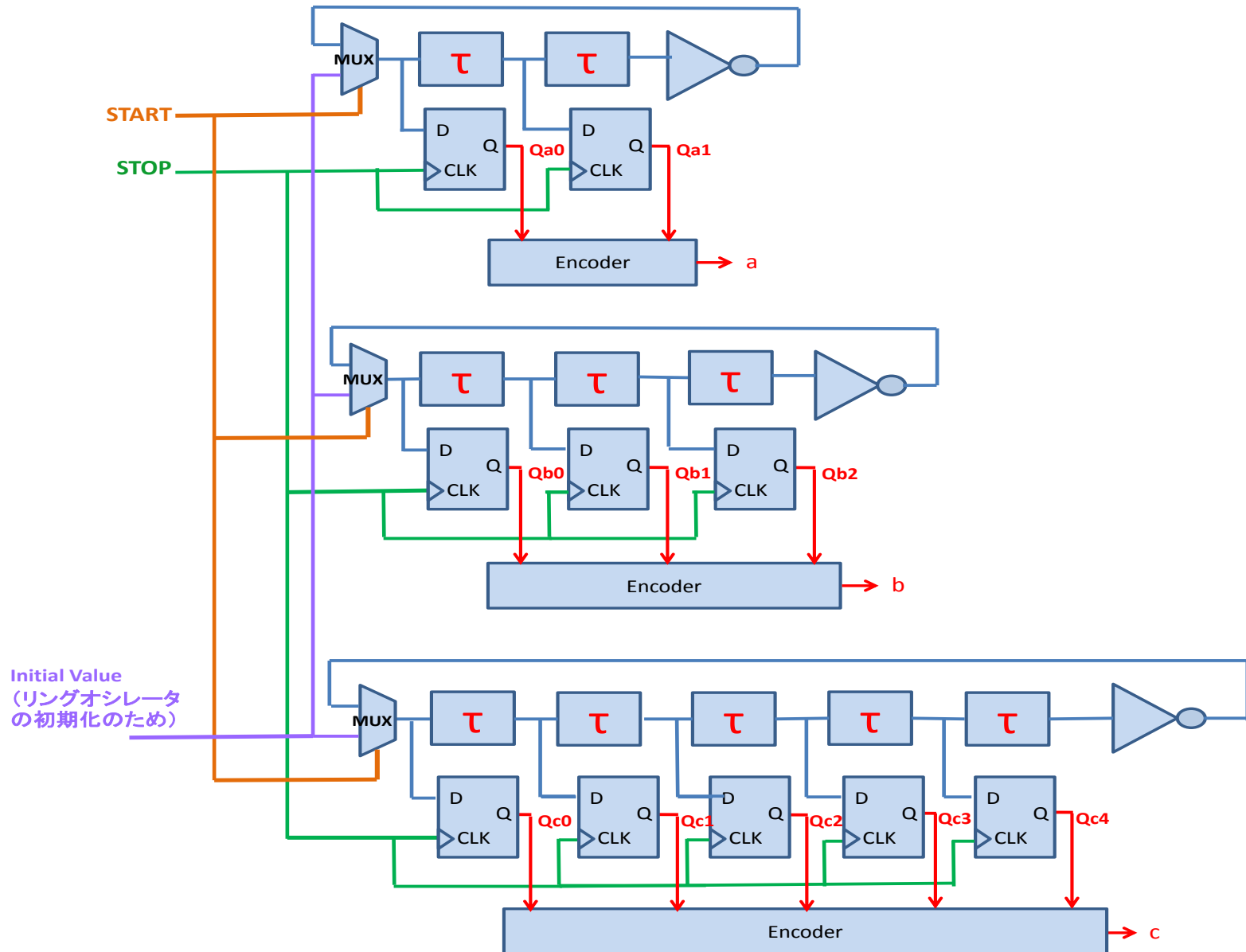
考察 TDCでは取り扱う入力信号が時間信号なので
リング発振回路構成により剰余が容易に得られる。
電圧信号を入力とするADCでは剰余を得るのは簡単ではない。

リング発振回路で剰余を得る

- **START** 信号立ち上がりで発振開始
- **STOP** 信号立ち上がりで発振中止



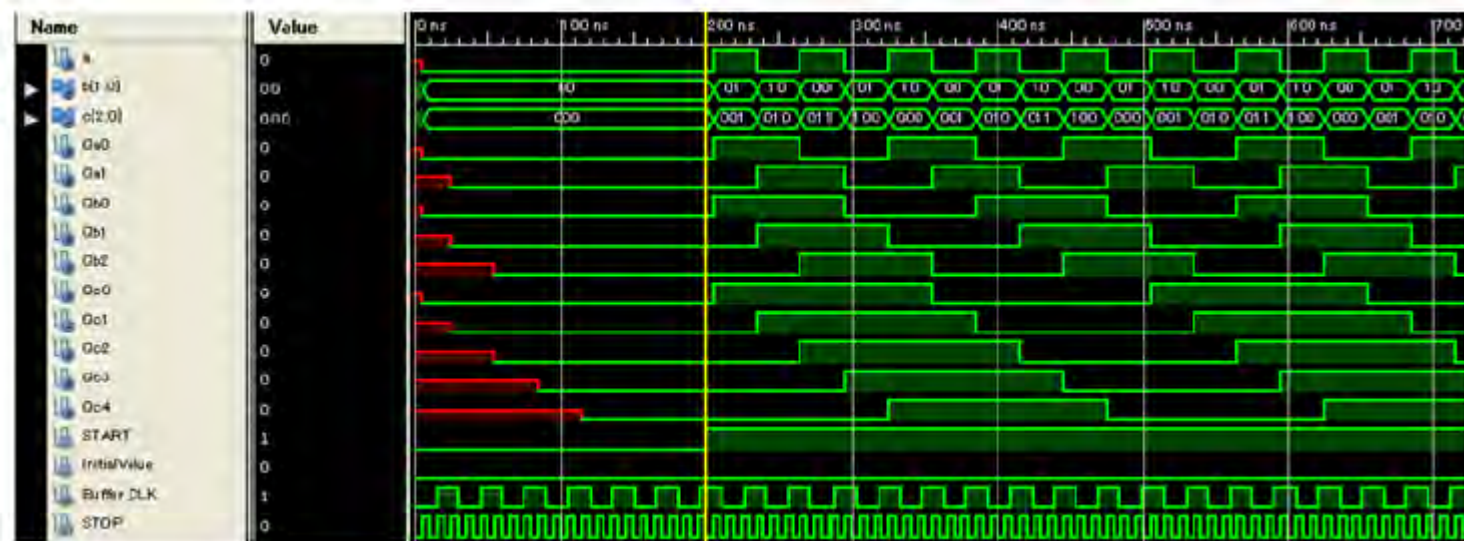
提案する剰余系TDCの回路図



RTL検証

回路機能をHDLで記述し、ISimを使用し、
下記条件でシミュレーションを行った:

- ・STOP クロック周波数 = 100MHz
- ・バッファ遅延 $T = 30.30\text{ns}$
- ・START 信号がLからHに変化 = 200ns



タイミングチャート

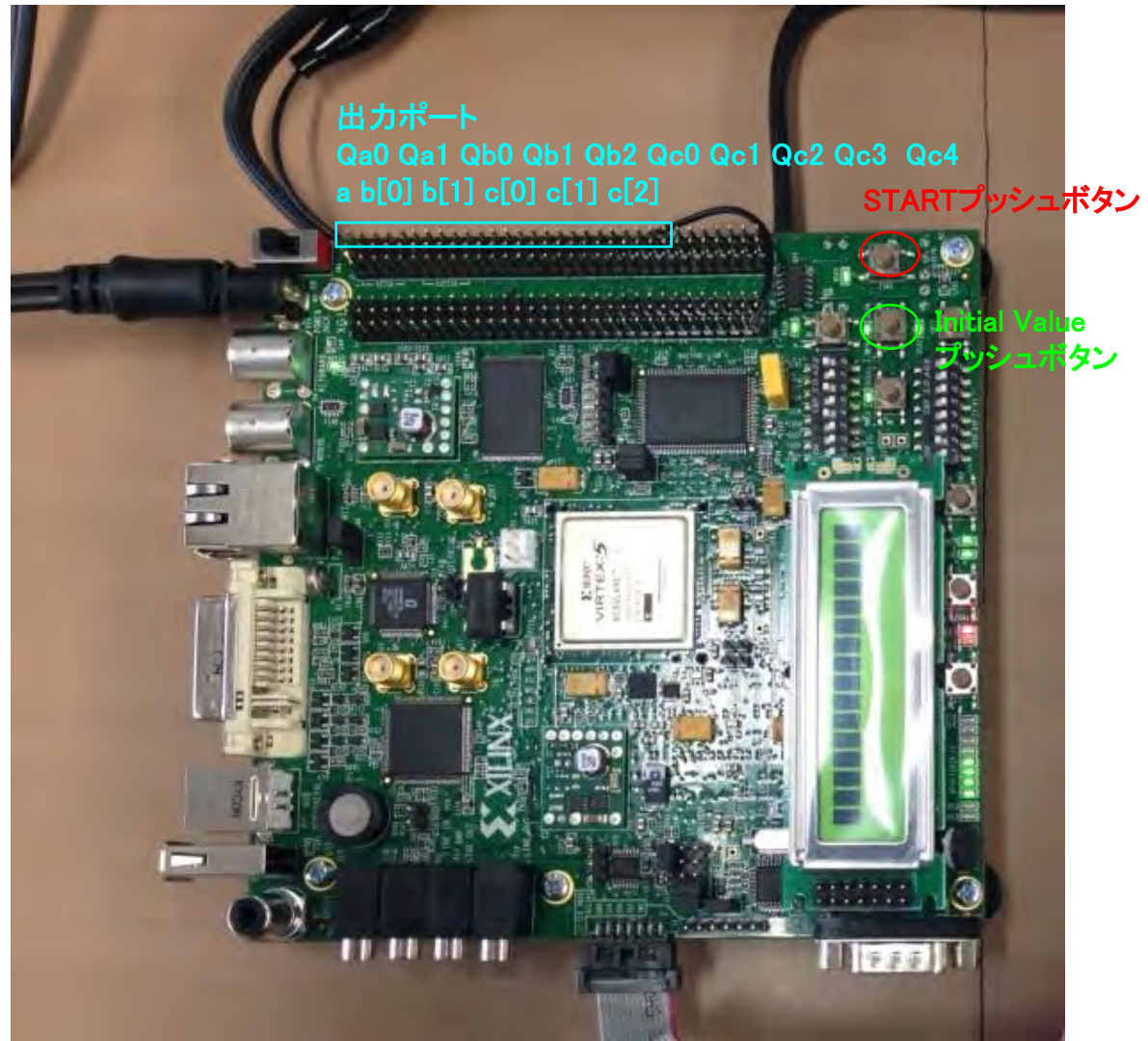
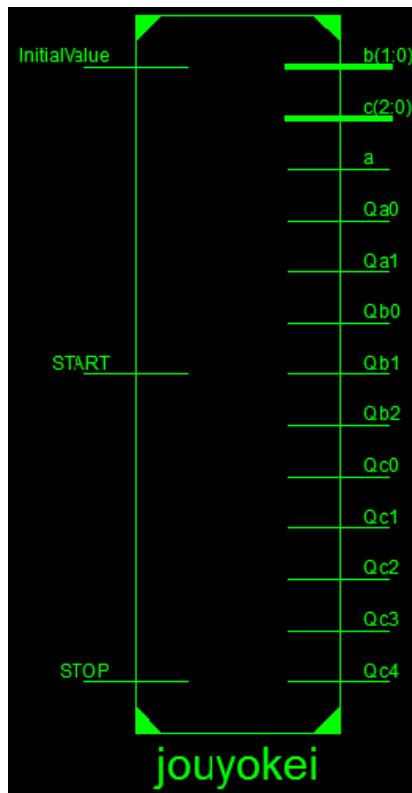
FPGA実装

STOPポートの入力: 100MHz FPGA クロック

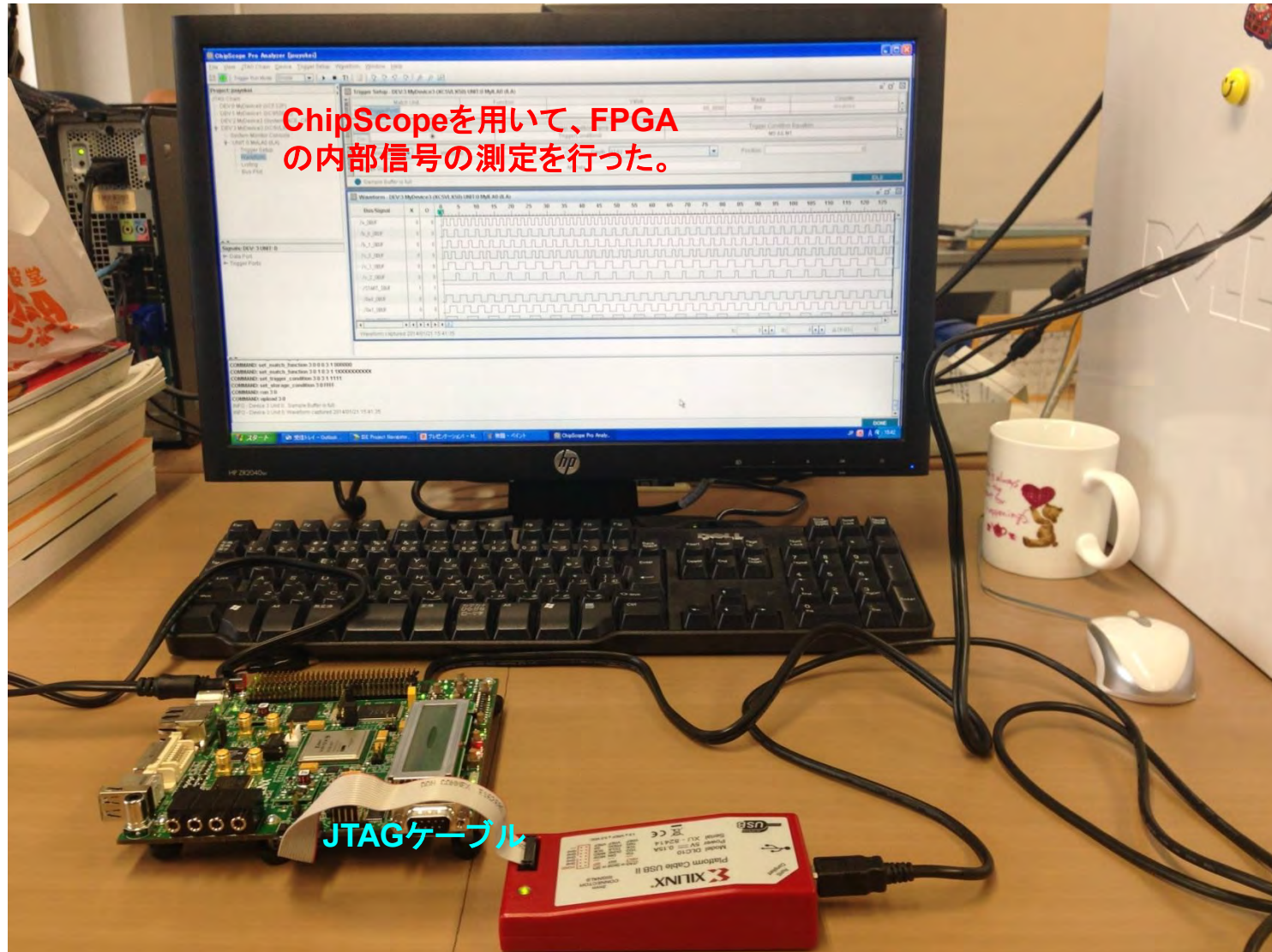
Buffer_CLKポートの入力: 33MHz FPGA クロック(バッファの遅延 $\tau = 30.30\text{ns}$)

入力ポート

出力ポート

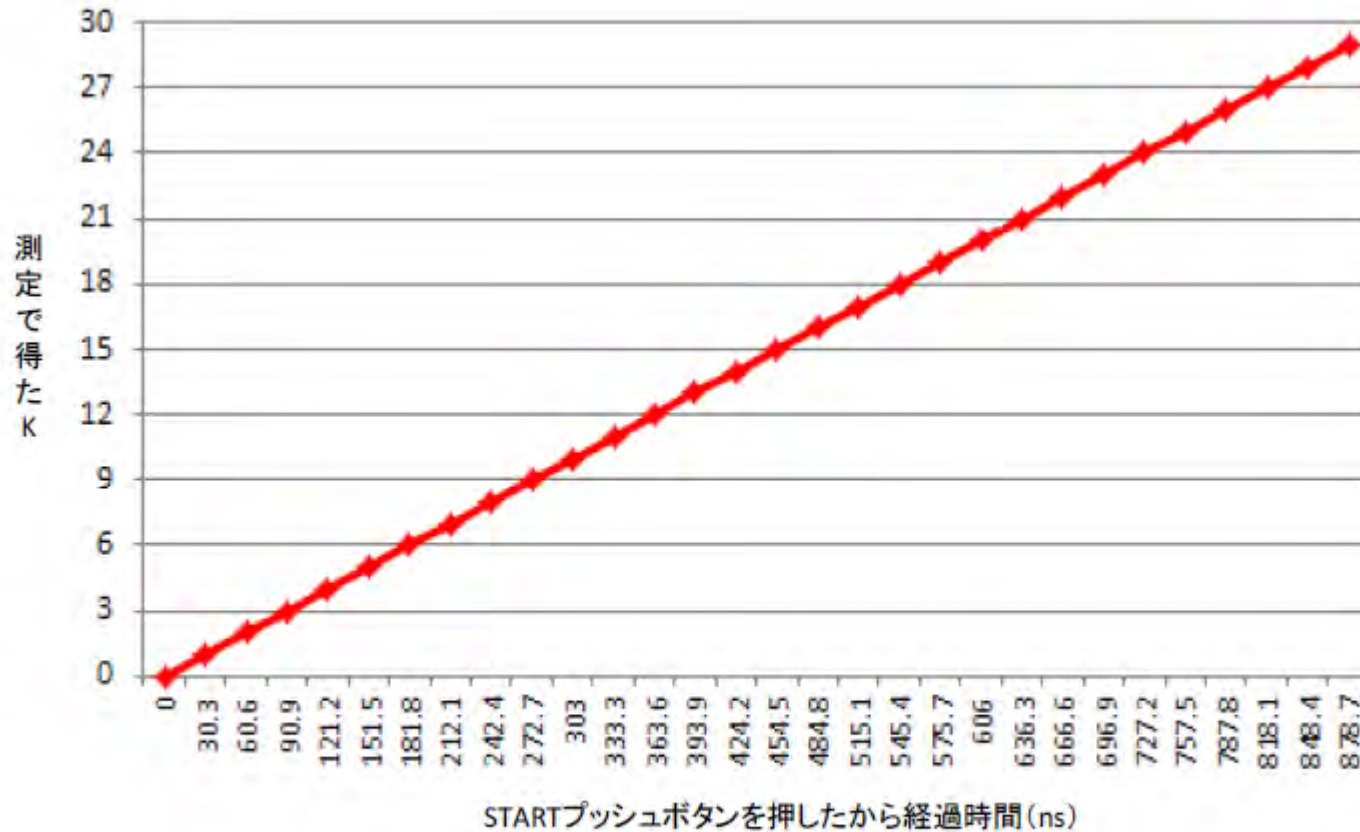


FPGA実装



FPGA実装 剰余系TDCの評価

剰余系TDC回路はFPGAで実現できることが示された。



経過時間 VS. 測定で得た k

まとめと今後の課題

- 剰余系TDC回路は時間測定可を確認。
FPGA 実現を示した。
- バッファの個数とリング発振回路の個数を増減し
他の剰余数系にも適用可。
- 剰余系を利用したTDC 回路は、
回路面積、消費電力が大幅低減可。

発表内容

- はじめに
- **フィボナッチ数列と黄金比**
逐次比較近似AD変換器 冗長アルゴリズム
- **魔方陣**
セグメント型DA変換器 レイアウト
- **剰余系(孫子算経)**
時間デジタル変換回路
- まとめ

整数論の工学応用



Carolus Fridericus Gauss
(独: 1777-1855)

「整数論は数学の女王である。」

カール・フリードリヒ・ガウス

過去の整数論

身近にあるが、謎が多く美しい。

他分野へ貢献しない孤高の学問。

現在の整数論

情報通信処理に応用(暗号化・符号論)

⇒ デジタル信号との相性良し

**AD/DA変換器, TDC回路への整数論応用は未知の世界
今後大きな発見が待っている可能性**

参考文献

フィボナッチ数列、黄金比 / 白銀比

- [1] Mario Livio (著)、齊藤 隆央 (翻訳): 黄金比はすべてを美しくするか？
最も謎めいた「比率」をめぐる数学物語、早川書房、2012年1月.
- [2] ルフレッド・S・ポザマンティエ、イングマル・レーマン (著)、松浦俊輔 (翻訳):
不思議な数列フィボナッチの秘密、日経BP社、2010年8月.
- [3] 桜井 進: “雪月花の数学”、祥伝社、2010年6月.
- [4] Keith Ball (原著)、佐藤 かおり (翻訳): フィボナッチのうさぎ—数学探険旅行、青土社、
2006年12月.
- [5] 中村 滋 : フィボナッチ数の小宇宙、日本評論社、2002年9月.

冗長逐次比較AD/DA変換器

- [6] F. Kuttner, “A 1.2V 10b 20MSample/s non-binary successive approximation ADC in 0.13 μ m CMOS,” Tech. Digest of ISSCC, (Feb. 2007).
- [7] T. Ogawa, H. Kobayashi, Y. Takahashi, N. Takai, M. Hotta, H. San, T. Matsuura, A. Abe, K. Yagi, T. Mori : “SAR ADC Algorithm with Redundancy and Digital Error Correction”,
EICE Trans. Fundamentals, vol.E93-A, no.2, (Feb. 2010).
- [8] 小川 智彦, 松浦 達治, 小林 春夫, 高井 伸和, 堀田 正生, 傘 昊, 阿部 彰, 八木 勝義, 森 俊彦,
“逐次比較近似ADC コンパレータ・オフセット影響の冗長アルゴリズムによるデジタル補正技術,”
電子情報通信学会誌 和文誌C, Vol.J94-C, No.3 (2011年3月)

参考文献

- [9] 小林佑太郎, 香積正基, 楊志翔, 小林春夫: ” ADC/DAC のフィボナッチ数列を用いた冗長性設計の検討”, 電気学会 電子回路研究会, ECT-13-087, 奈良 (2013年10月).
- [10] 楊志翔, 小林佑太郎, シャイフルニザムビンモーヤ, 小林春夫
「フィボナッチ数列を用いたDA変換回路アーキテクチャ」 電気学会 電子回路研究会,
ECT-13-087, 奈良 (2013年10月).
- [11] 小林佑太郎, 小林春夫: “黄金分割法を用いたSAR ADC冗長設計”, 第4回 電気学会
東京支部 栃木・群馬支所 合同研究発表会, ETT-14-28, ETG-14-28 (2014年3月).
- [12] 小林佑太郎, 小林春夫: ” 逐次比較近似ADCの整数論に基づく冗長アルゴリズム設計”,
電気学会 電子回路研究会, ECT-14-059, 島根 (2014年7月).
- [13] Y. Kobayashi, H. Kobayashi, “SAR ADC Algorithm with Redundancy Based on Fibonacci Sequence”,
The 3rd Solid State Systems Symposium-VLSIs and Semiconductor Related Technologies &
The 17th International Conference on Analog VLSI Circuits, Ho Chi Minh City, Vietnam (Oct. 2014)

魔方陣、魔方陣を用いたDA変換器レイアウト

- [14] 大森清美, ”魔方陣の世界”, 日本評論社, 2013年8月10日
- [15] 東野将史, 小林春夫, ”セグメント型DA変換器の魔方陣レイアウト技術による線形性向上”,
電気学会 電子回路研究会, 2014年10月9, 10日

剰余系時間デジタイザ回路

- [16] C. Li, K. Katoh, H. Kobayashi, J. Wang, S. Wu, S. N. Mohyar,
“Time-to-Digital Converter Architecture with Residue Arithmetic and its FPGA Implementation”,
11th International SoC Design Conference, Jeju, Korea (Nov. 2014).

(付録1) 日本のおもしろさ“白銀比”

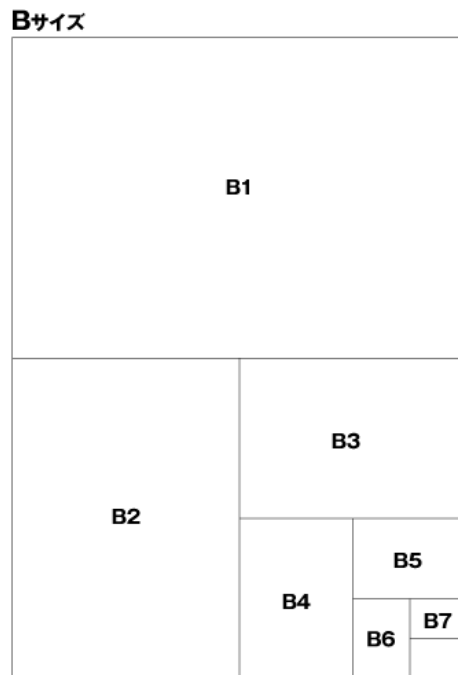
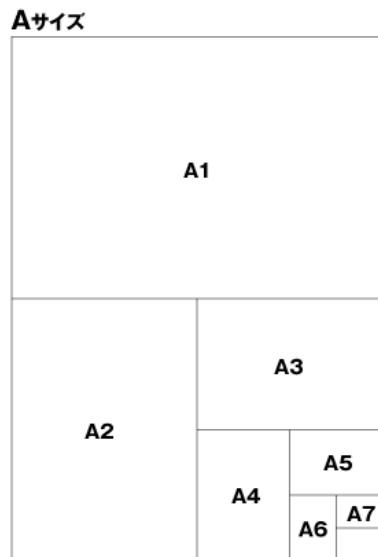
日本人が思う美しい比率

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = 1.414 = \text{白銀比}$$

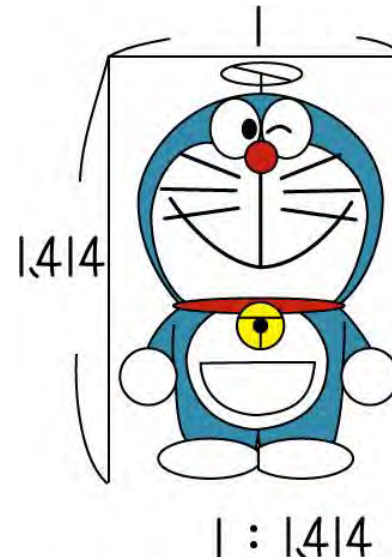
コピー用紙
A版、B版とも 縦横比率が白銀比

ドラえもん、アンパンマン、トトロ、
クレヨンしんちゃん が白銀比

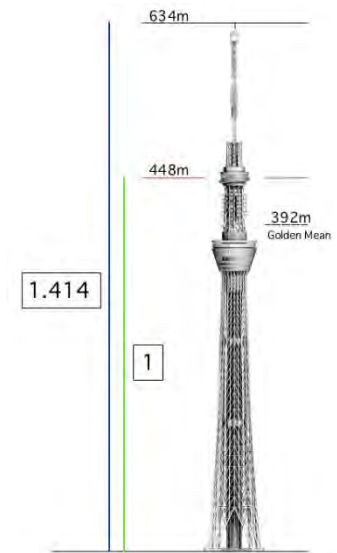
コピー用紙



キャラクター



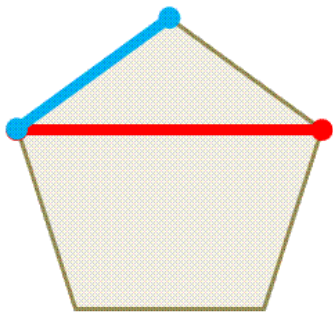
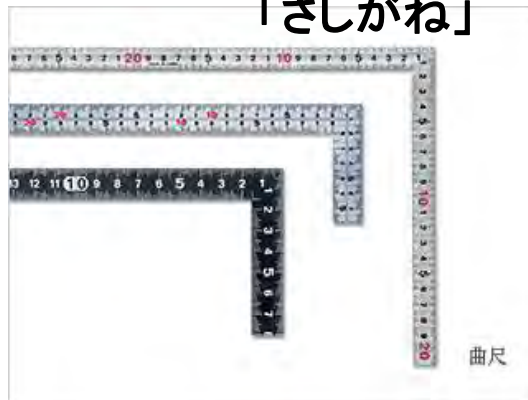
スカイツリー



(付録1) 日本の美しさ“白銀比” (続き)

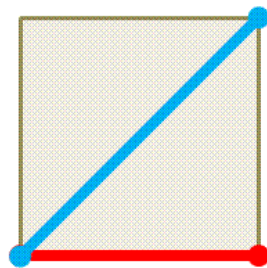
日本人は風呂敷、畳、法隆寺等 正方形を好む。

日本古来の工具
「さしがね」



黄金比

1 : 0.618



白銀比

1 : 1.414

法隆寺

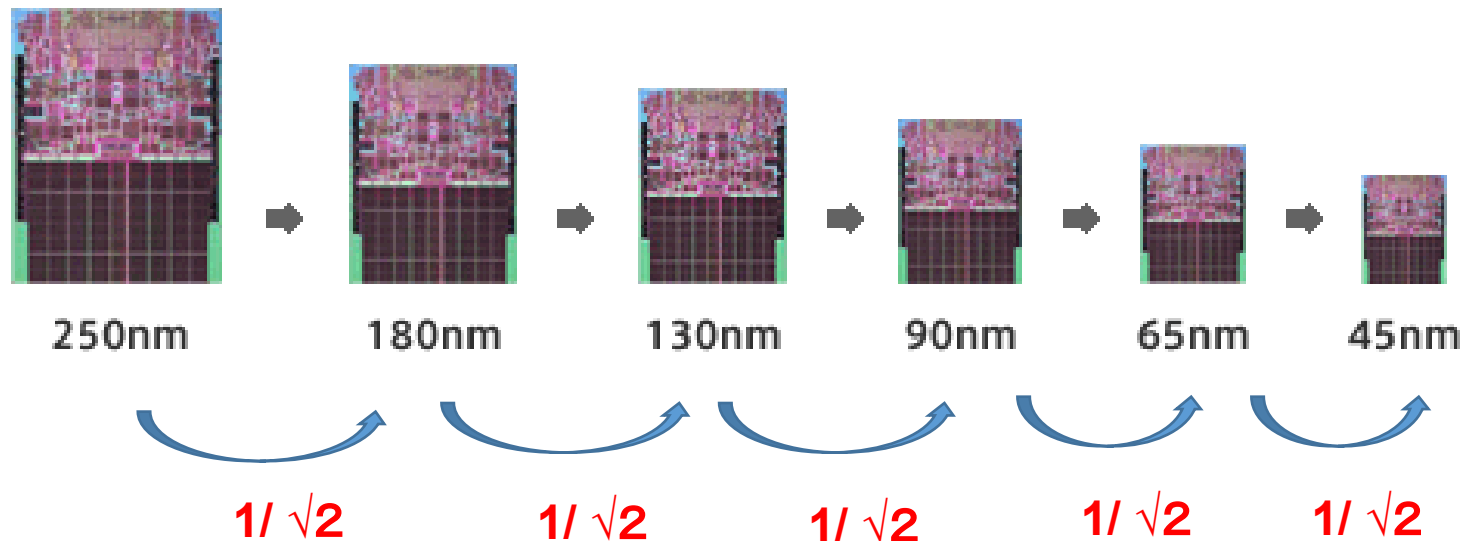


正方形： 丸い材木から
最も無駄を出さない切り方。

無駄を好まない島国の心。

(付録2) 集積回路と“白銀比”

LSIプロセス進展



黄金比は動的な比率 (無限の螺旋)

⇔ 白銀比は静的な比率 (合理化)

両者に発展の可能性が存在する。

講演終了後 聴衆の方より

「自然界が1.6進(黄金比 進)ならば、
2進で計測するというのは
無理があるかもしれないと思った。
1.6進(黄金比 進)のほうが良い計測が
できそうだというのはなるほどと思った。」

孫子算經(剰余系)の 電子回路設計への応用

阿部優大 片山翔吾 李从兵 小林春夫

群馬大学 理工学部 電子情報理工学科

アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

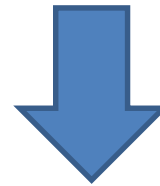
研究目的・目標

研究目標：高周波信号の簡易な周波数推定回路の実現

取扱い難

複数低周波サンプリング回路

高い周波数でサンプリング
スペクトルの折り返し：発生しない
高周波サンプリング回路実現：難



剰余系を利用

複数の低周波数サンプリング回路



スペクトルの折り返しから周波数推定

アウトライン

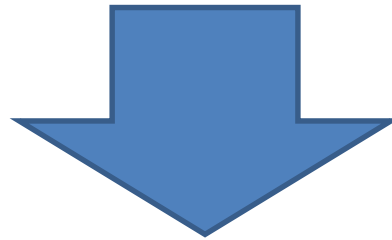
- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

中国の剰余定理

- 中国の算術書『孫子算経』

「3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると2余る数は何か」

一般化



中国の剰余定理

答え 23



孫子算経

孫子算經

- 「3で割ると2余り、5で割ると3余り、
7で割ると2余る数は何か」 答え 23
➡ 一般化したのが「**中国人の剰余定理**」。

- **鶏兔同籠(けいとどうりゅう)**

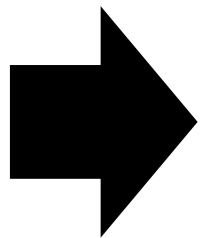
「キジとウサギが同じ籠(かご)。頭が35個
足は94本。キジ、ウサギはそれぞれいくらか。

➡ 日本に入ってきて「**鶴亀算**」となる



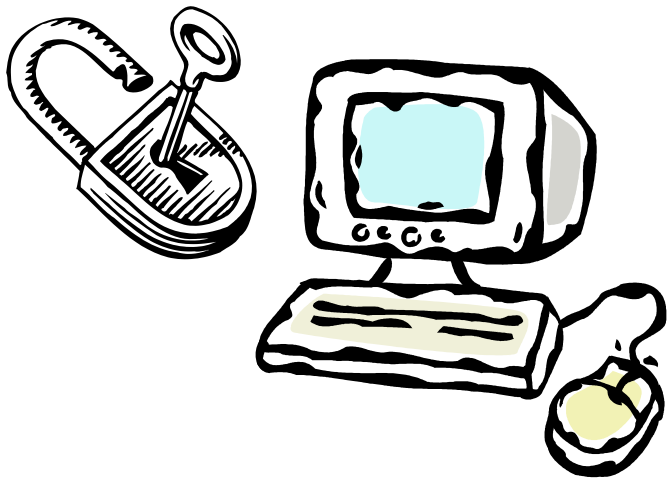
中国の剰余定理の集積回路への応用

- ✓ 江戸時代、「百五減算」として伝来
- ✓ 現在、情報セキュリティの暗号化に応用



古典数学によるイノベーション

集積回路に応用



関孝和

剰余系の例

基数 2, 3, 5 互いに素

$$N=2 \times 3 \times 5 = 30$$

0から $N-1(=29)$ までの整数の一つを k

a: k を2で割った余り $a = \text{mod}_2(k)$

b: k を3で割った余り $b = \text{mod}_3(k)$

c: k を5で割った余り $c = \text{mod}_5(k)$

k と (a, b, c) の組は1対1に対応する。

k を (a, b, c) で表現 \longrightarrow 剰余表現

中国人の剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)

(a, b, c) から k を求めるアルゴリズム



剰余定理の例

基数 2, 3, 5 互いに素

$$N=2 \times 3 \times 5 = 30$$

0から $N-1(=29)$ までの整数の一つを k

a : k を 2 で割った余り $a = \text{mod}2(k)$

b : k を 3 で割った余り $b = \text{mod}3(k)$

c : k を 5 で割った余り $c = \text{mod}5(k)$

k と (a, b, c) の組は1対1に対応する。

k を (a, b, c) で表現 \rightarrow 剰余表現

a	b	c	k
0	0	0	0
1	1	1	1
0	2	2	2
1	0	3	3
0	1	4	4
1	2	0	5
0	0	1	6
1	1	2	7
0	2	3	8
1	0	4	9
0	1	0	10
1	2	1	11
0	0	2	12
1	1	3	13
0	2	4	14

a	b	c	k
1	0	0	15
0	1	1	16
1	2	2	17
0	0	3	18
1	1	4	19
0	2	0	20
1	0	1	21
0	1	2	22
1	2	3	23
0	0	4	24
1	1	0	25
0	2	1	26
1	0	2	27
0	1	3	28
1	2	4	29

剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)

(a, b, c) から k を求めるアルゴリズム

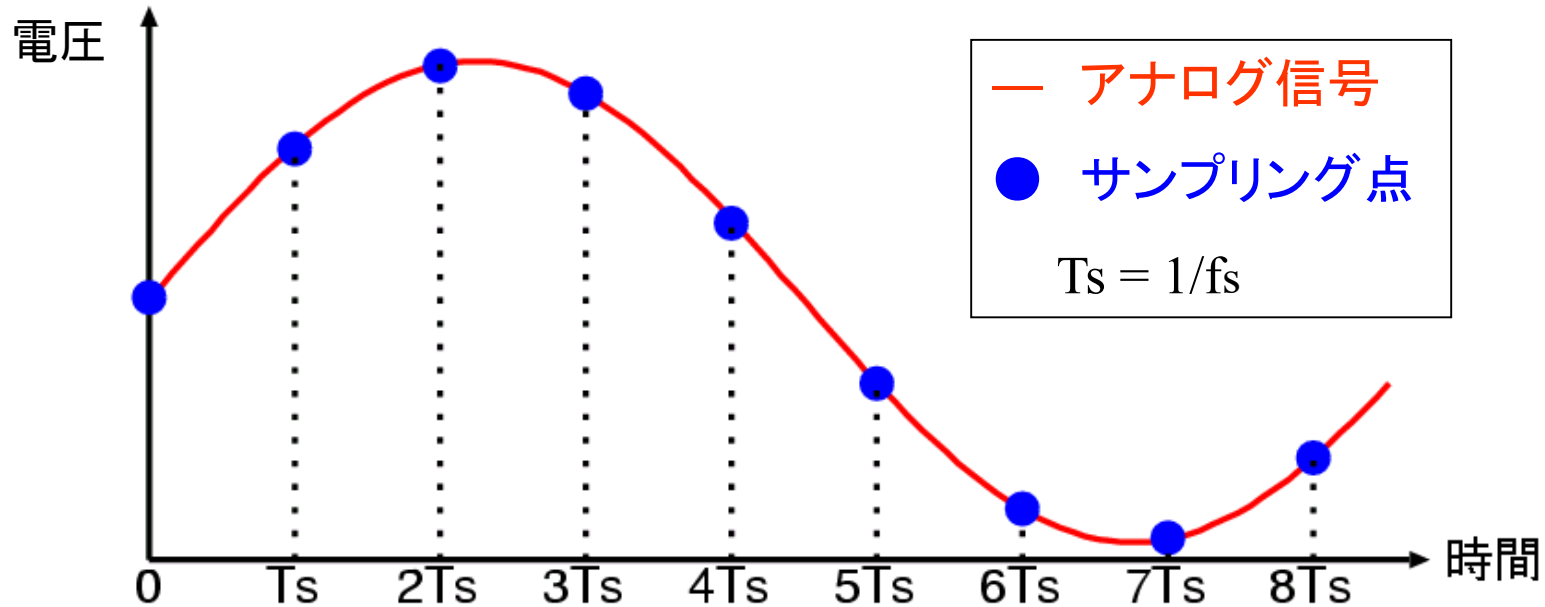
剰余定理は、

この問題を他の整数についても適用できるように一般化したもの。

アウトライン

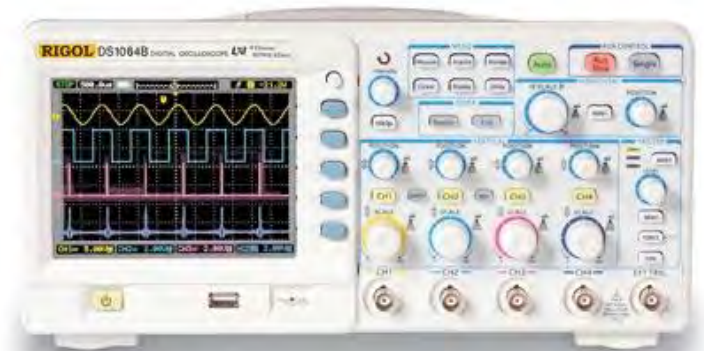
- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- **波形のサンプリング**
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

波形のサンプリング



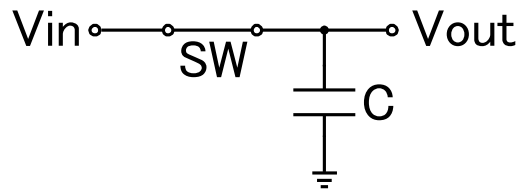
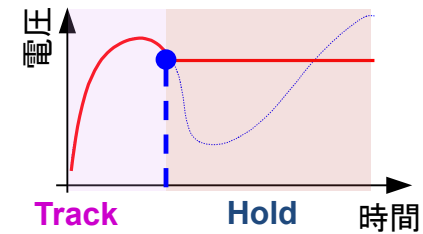
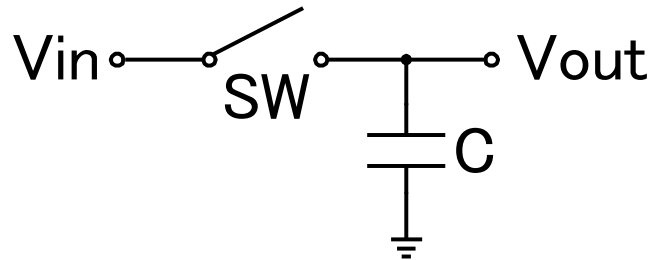
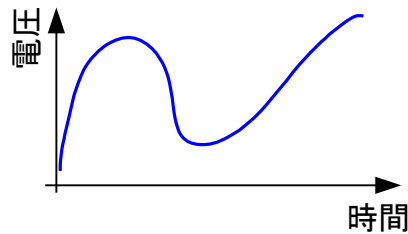
一定時間間隔のデータを取り、間のデータは捨ててしまう。

デジタルオシロスコープ等での
波形の電子計測に
波形サンプリング技術は用いられる



サンプリング回路の構成と動作

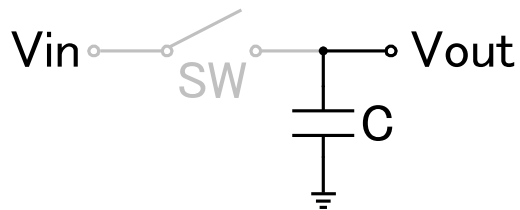
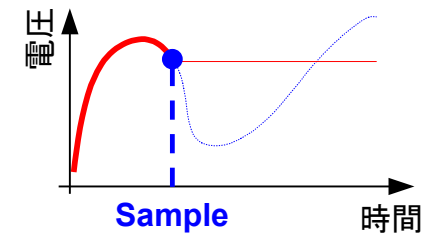
基本構成: スイッチと容量



• スイッチSWがONの時

• $V_{out}(t) = V_{in}(t)$

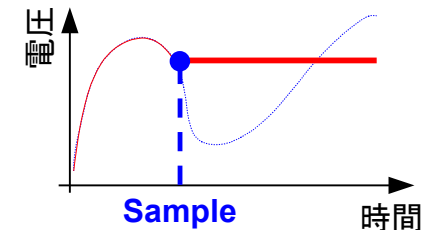
Track動作



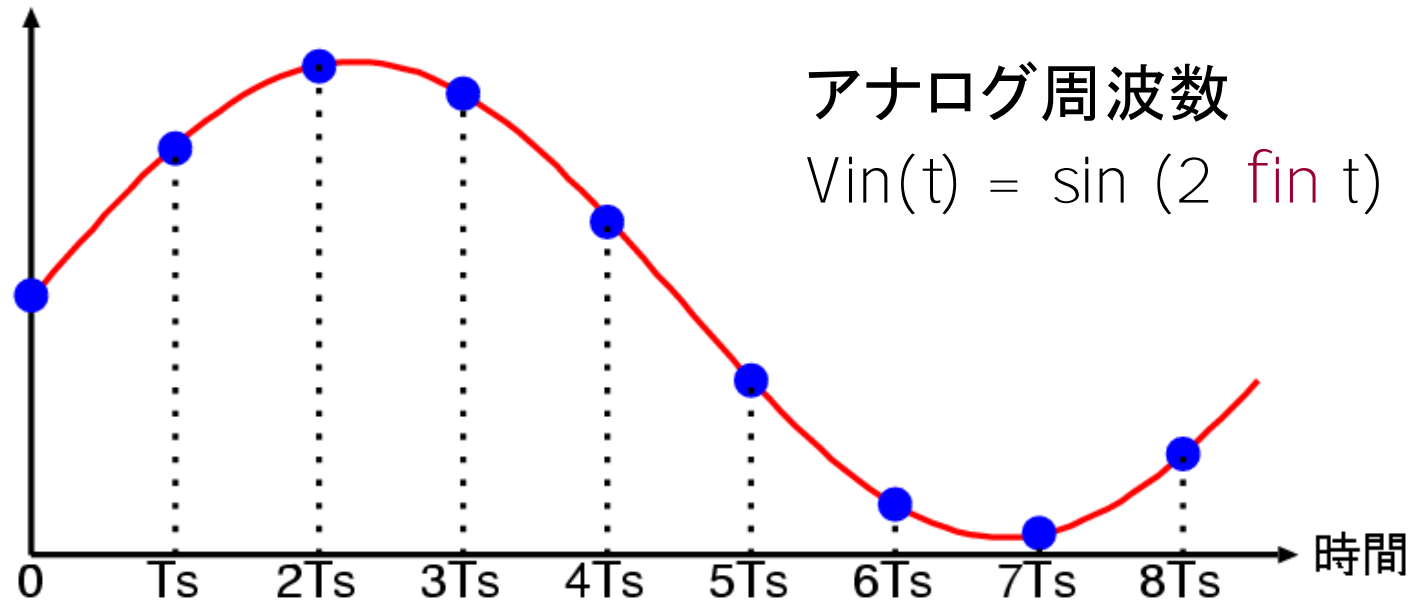
• スイッチSWがOFFの時

• $V_{out}(t) = V_{in}(t_{OFF})$

Hold動作



サンプリング定理



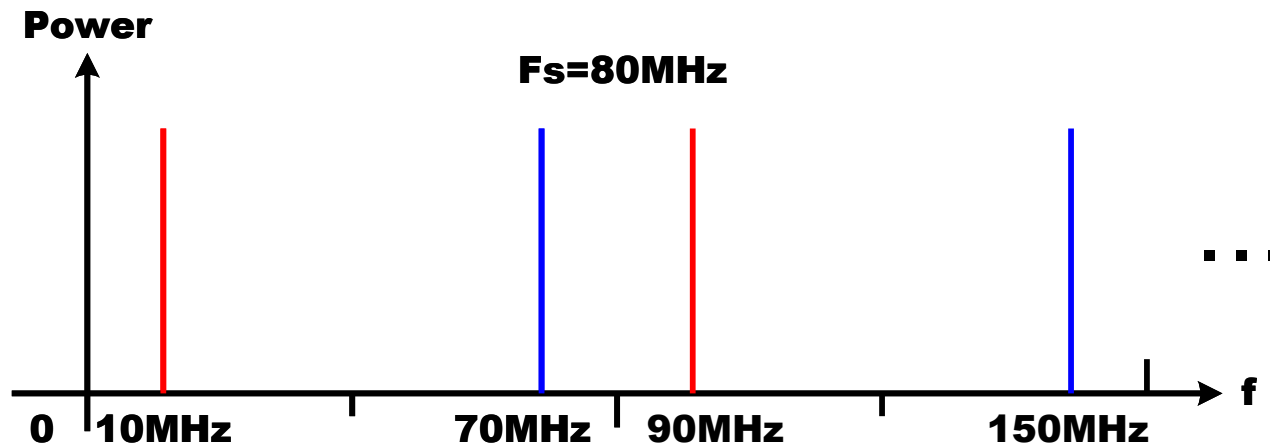
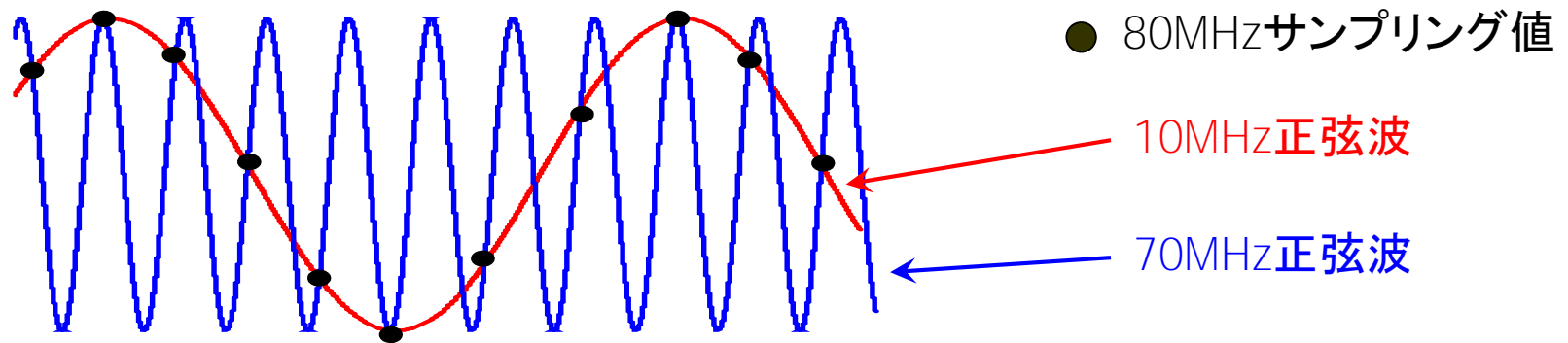
サンプリング周波数 $f_s = 1/T_s$

$f_s > 2 f_{in}$ ならば サンプリングされたデータ(●)から
アナログデータ(—)が復元できる。

信号に含まれる最大周波数 f_{in} の2倍より大きな周波数 f_s
でサンプリングする。

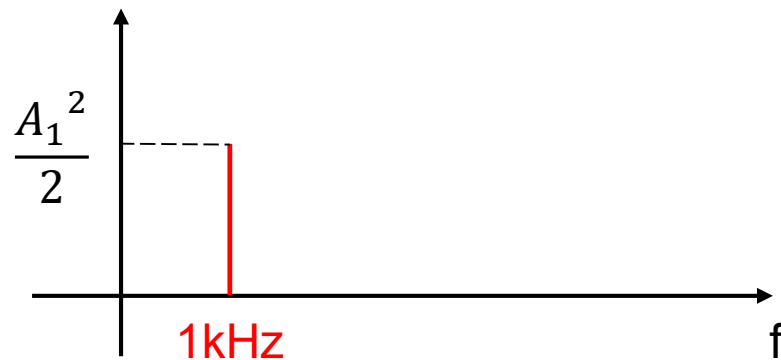
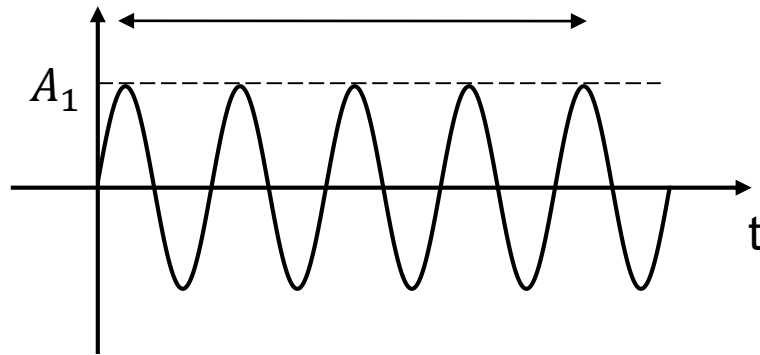
サンプリングと折り返し(aliasing)

80MHzでサンプリングを行うと10MHzと70MHzは区別できない

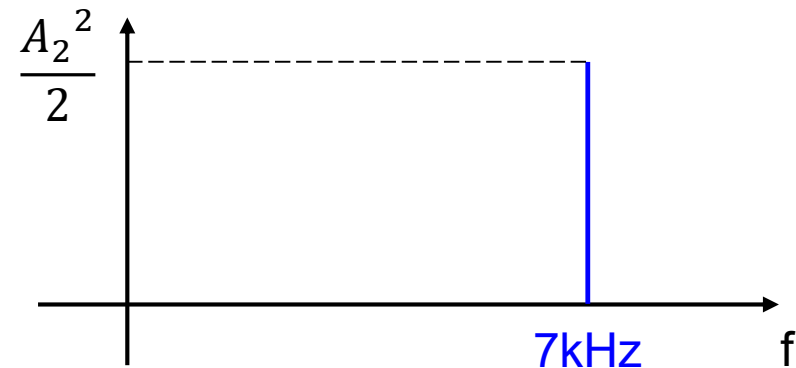
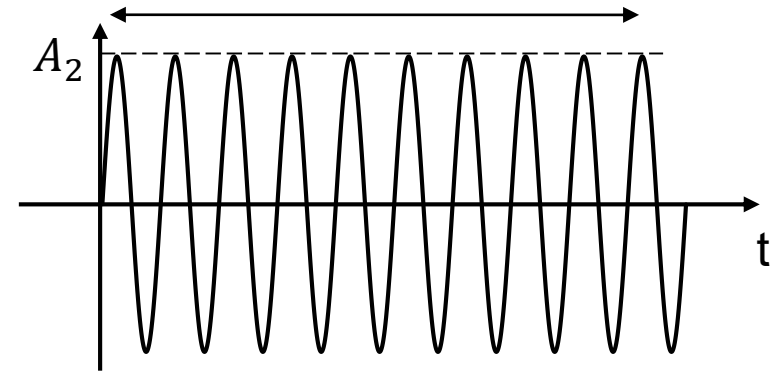


周波数領域でのスペクトル

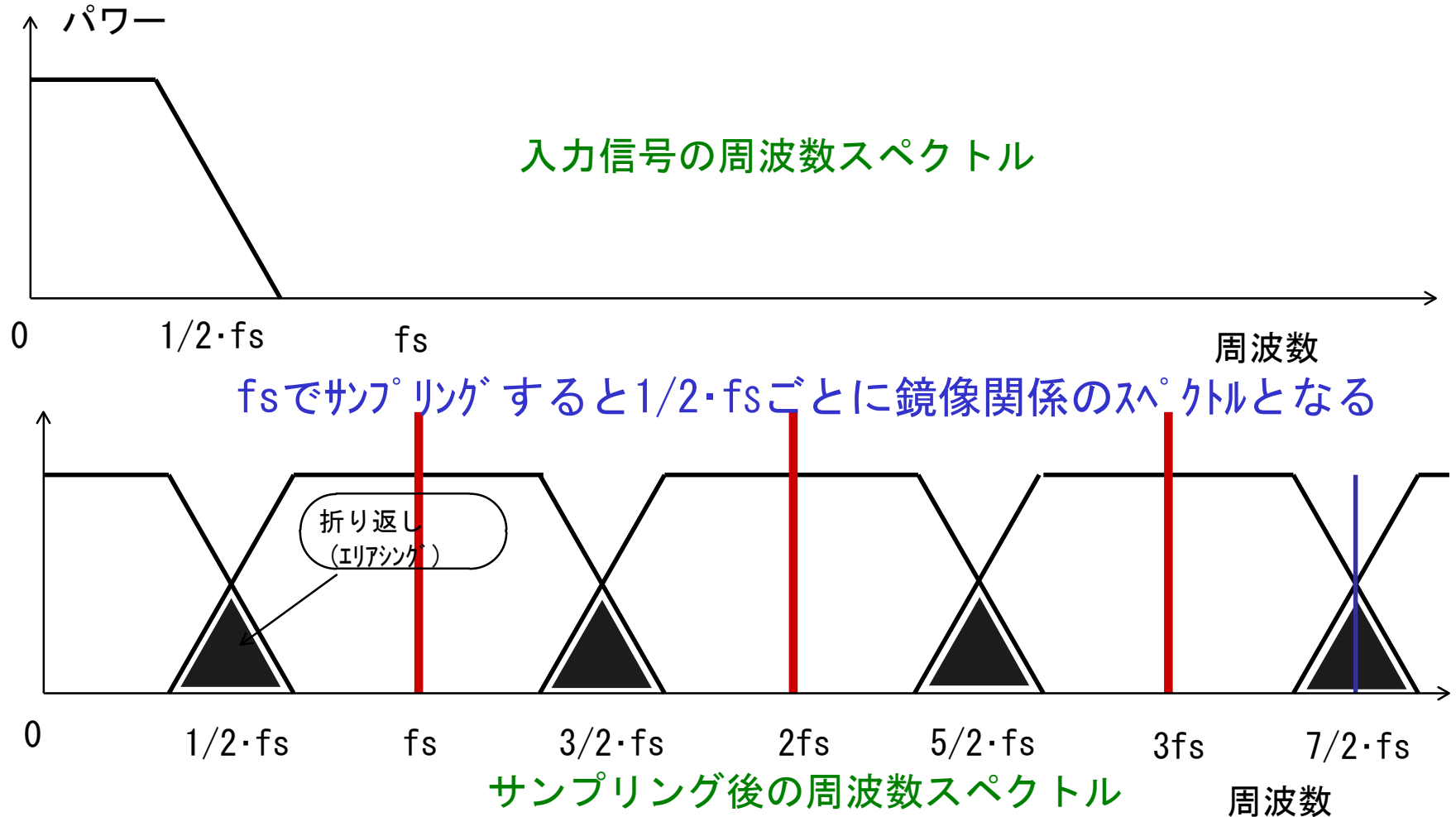
1kHz正弦波は
1秒間に山が1000個



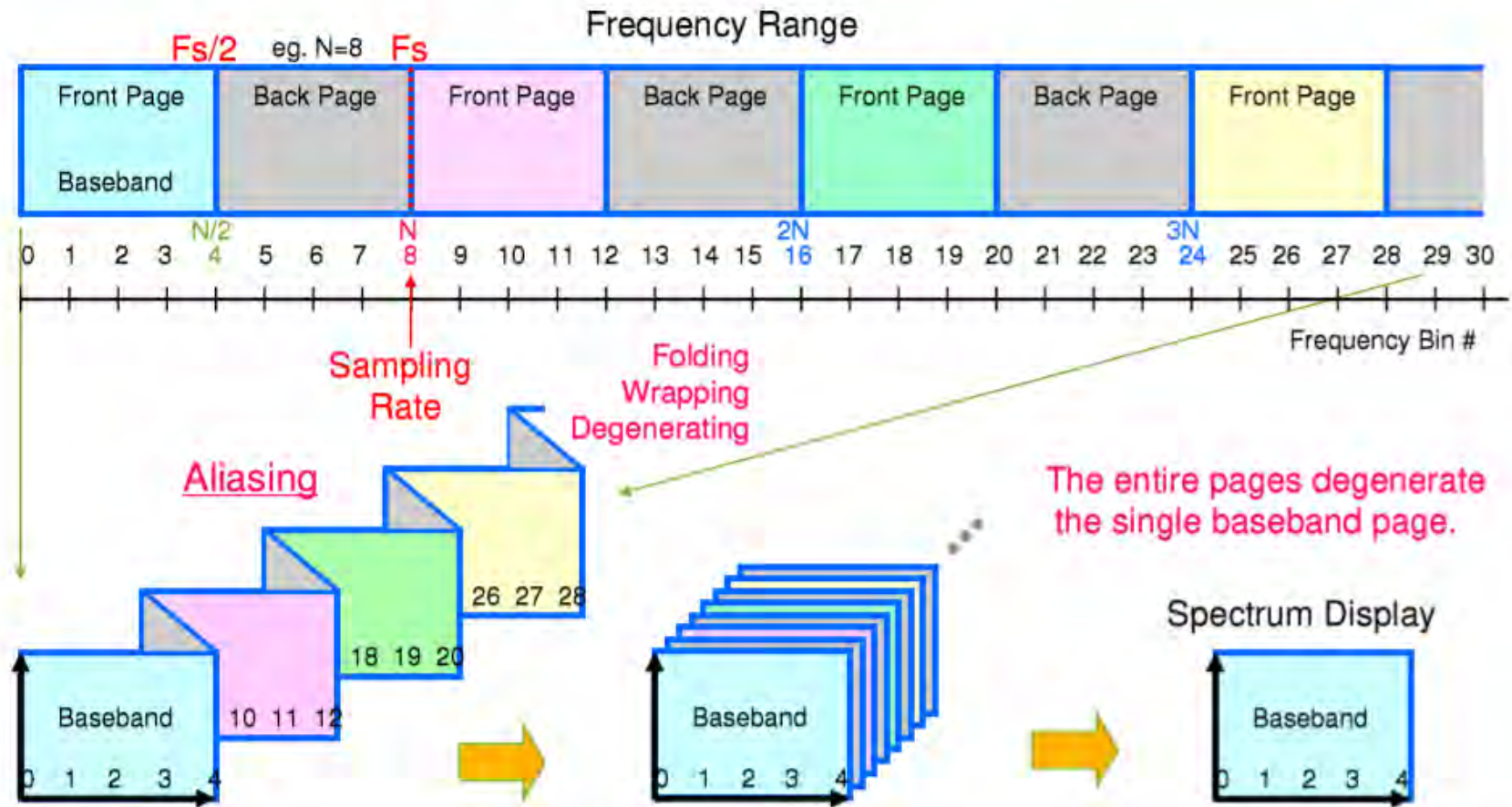
7kHz正弦波は
1秒間に山が7000個



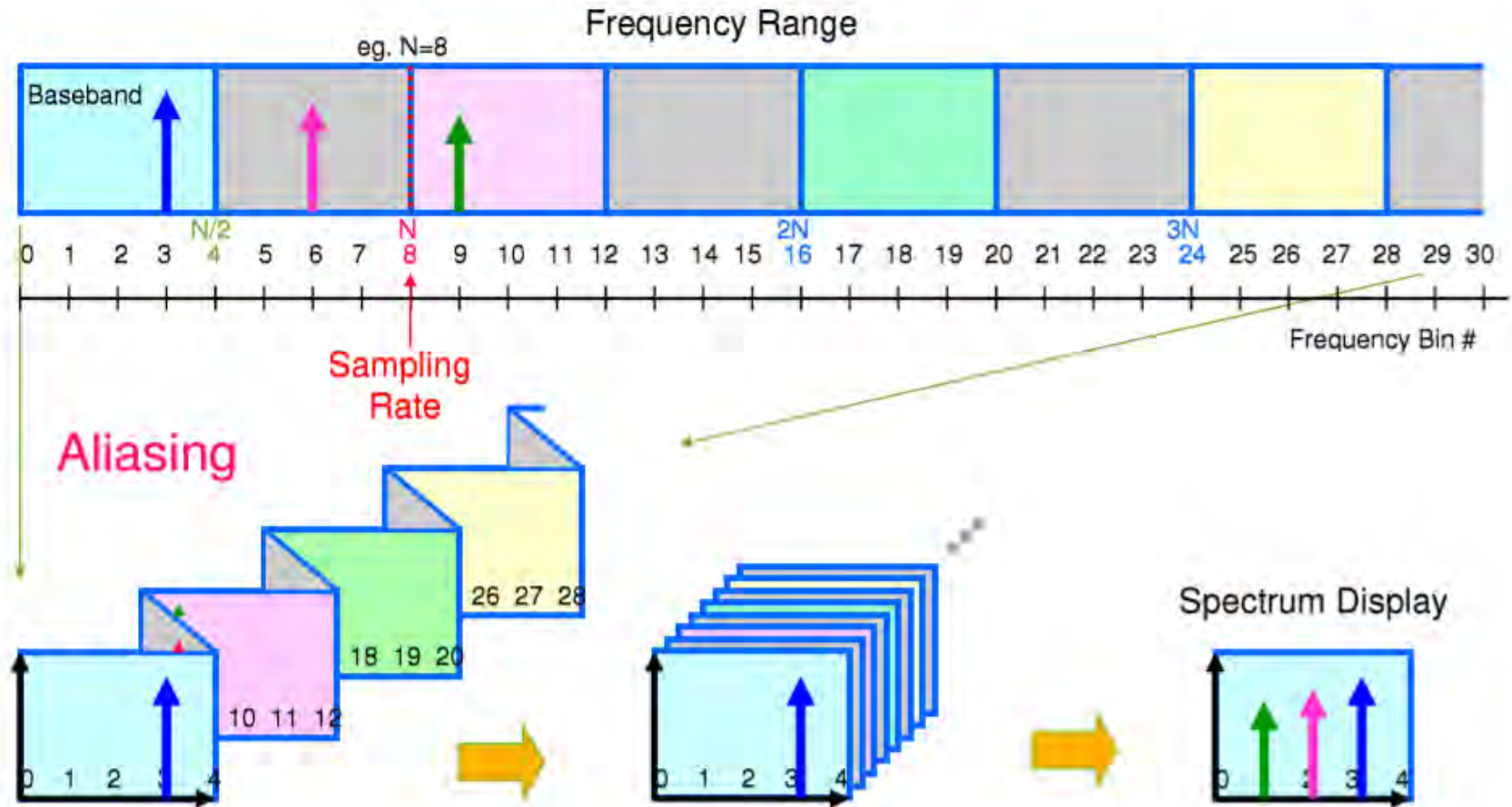
サンプリングと周波数スペクトル



サンプリング周波数と周波数領域



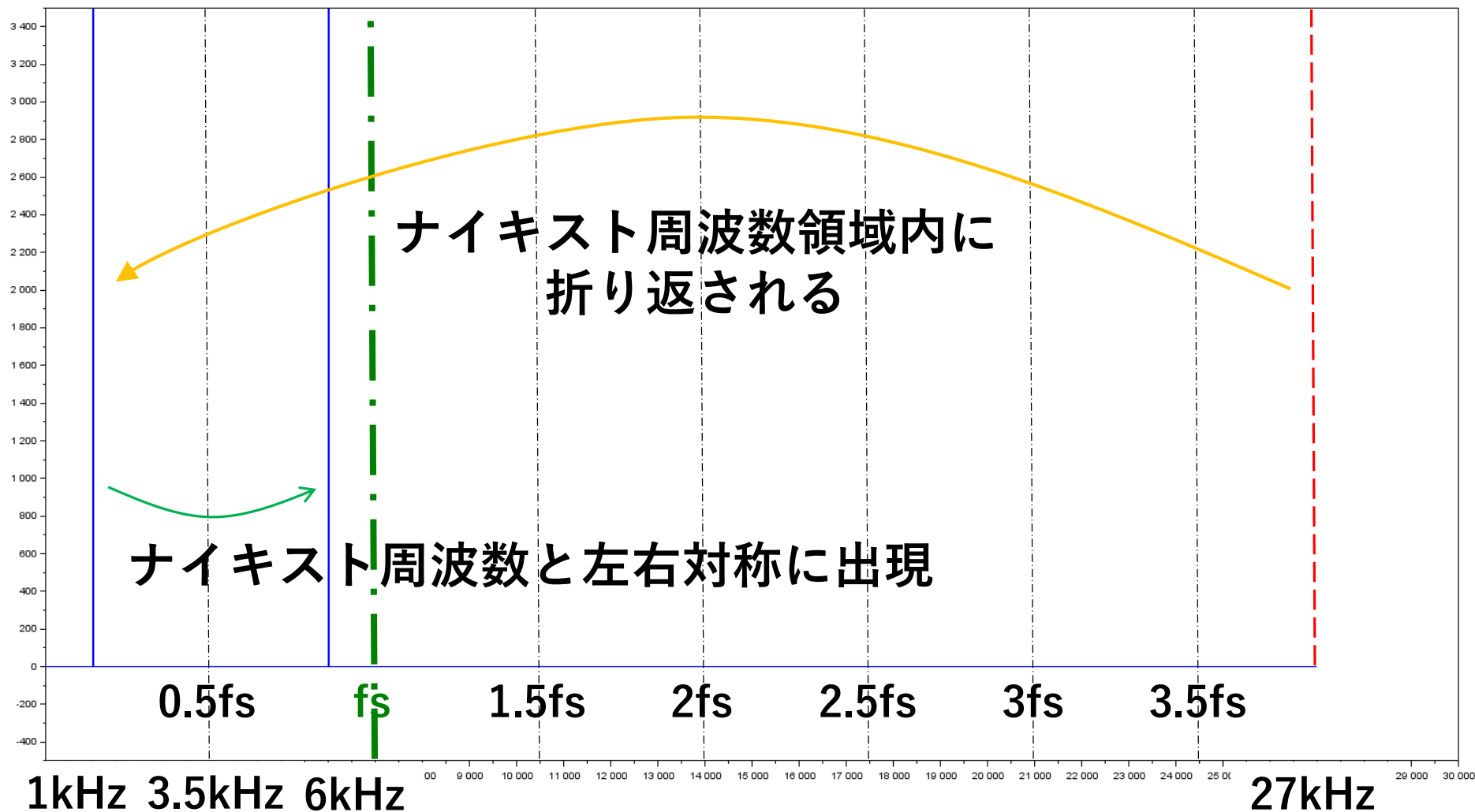
波形サンプリングによるスペクトル折り返し



サンプリング定理を満たさないときのスペクトル

サンプリング周波数 $f_s = 7\text{kHz}$

入力周波数 $f_{in} = 27\text{kHz}$



ナイキスト周波数：サンプリング周波数の1/2の周波数

アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

ヒルベルト・フィルタ

RC ポリフェーズフィルタ

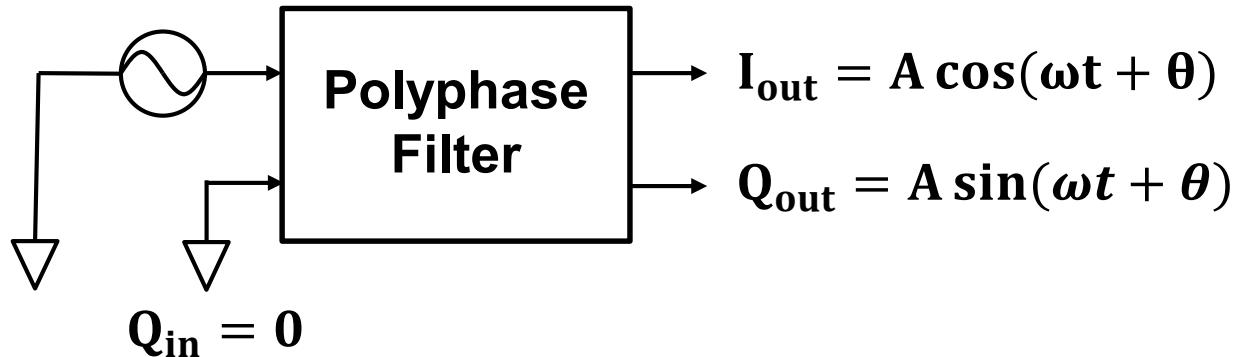


アナログ・ヒルベルト・フィルタ

David Hilbert
独 数学者
1862-1943



$$I_{in} = \cos(\omega t)$$

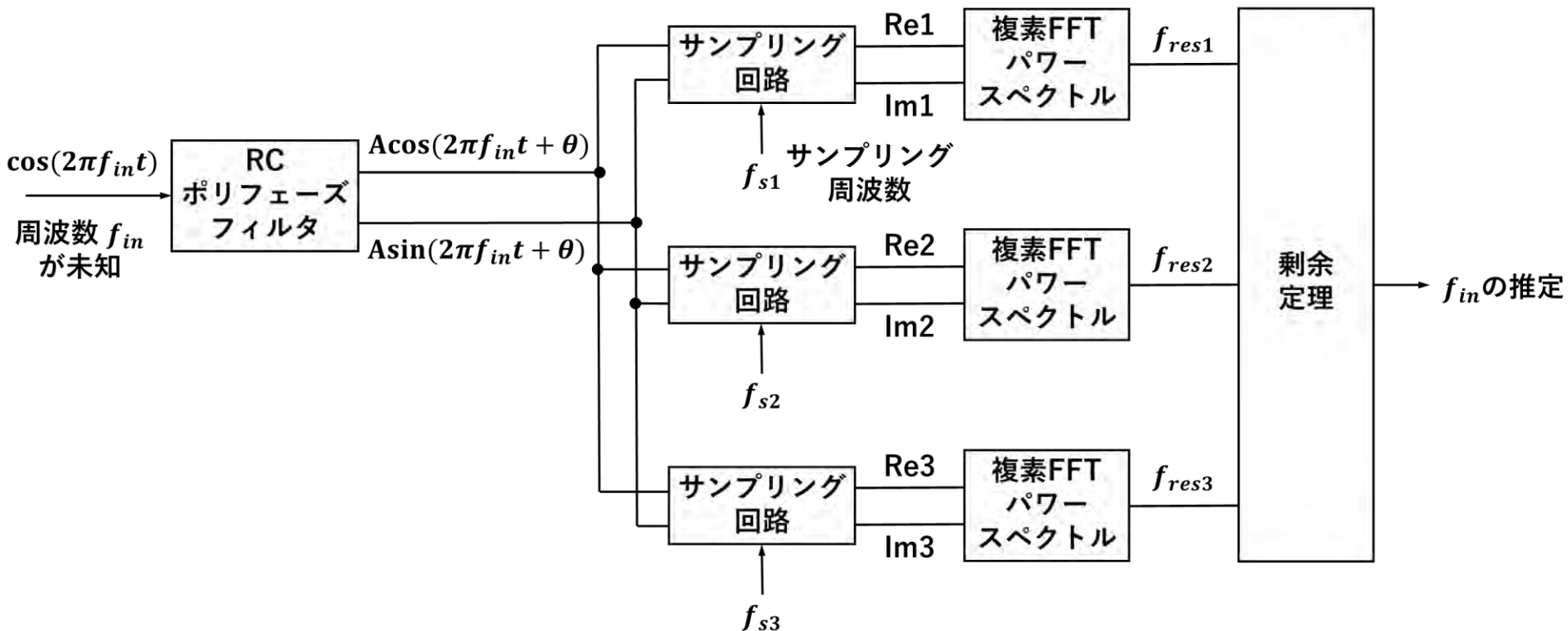


単一cos波入力信号から
位相が90°異なったcos波, sin波を生成

アウトライン

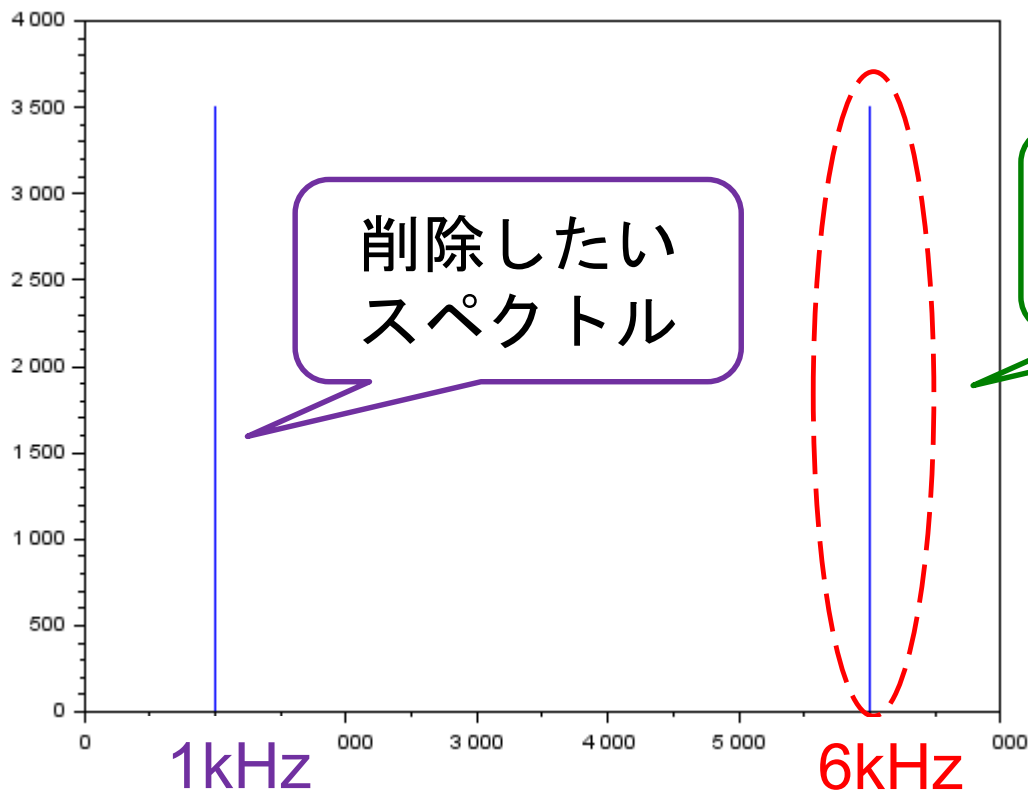
- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

提案する周波数推定回路のブロック図



折り返しによるスペクトル

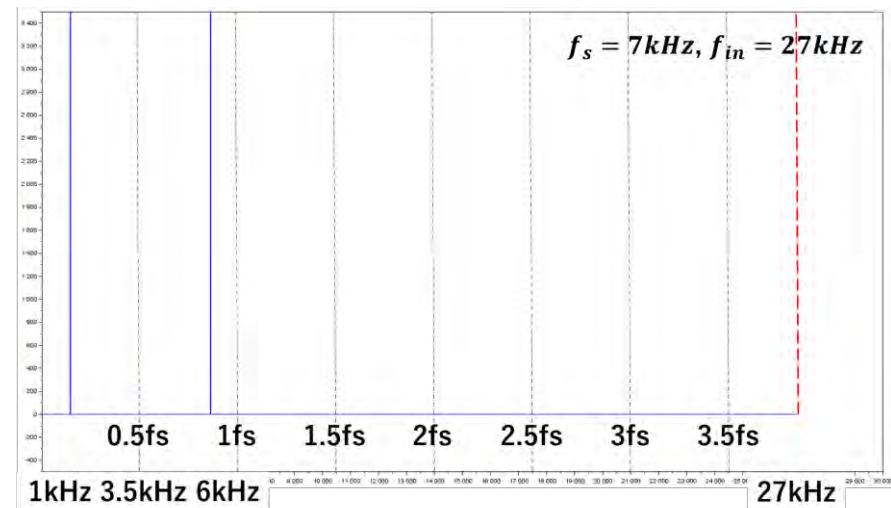
$$f_s = 7\text{kHz}, f_{in} = 27\text{kHz}$$



27を7で割った余り：6

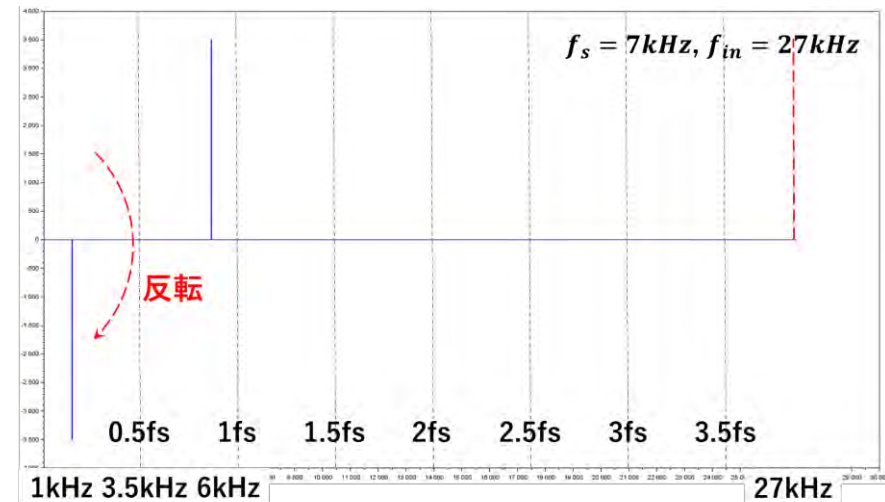
ヒルベルト・フィルタによって生成した
cos波,sin波を用いて削除する

スペクトルの消去



$$\cos(2\pi f_{in} t)$$

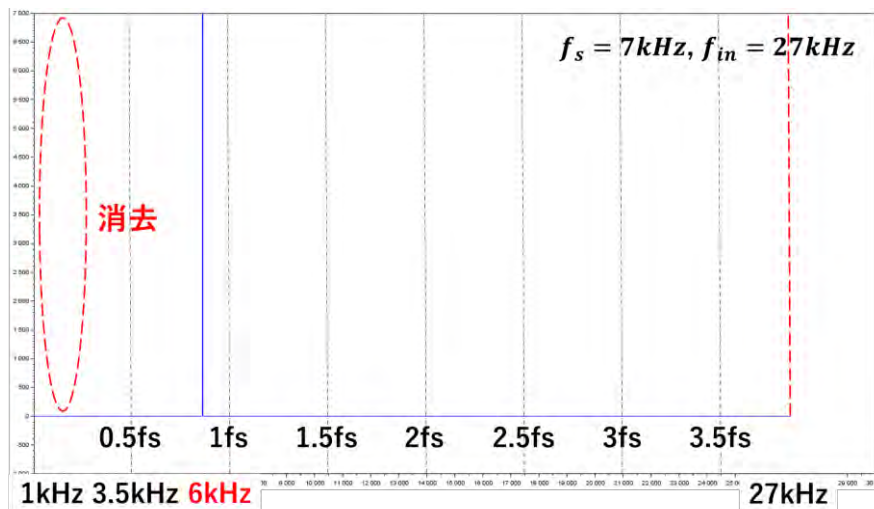
+



$$i \times \sin(2\pi f_{in} t)$$

i : 虚数単位

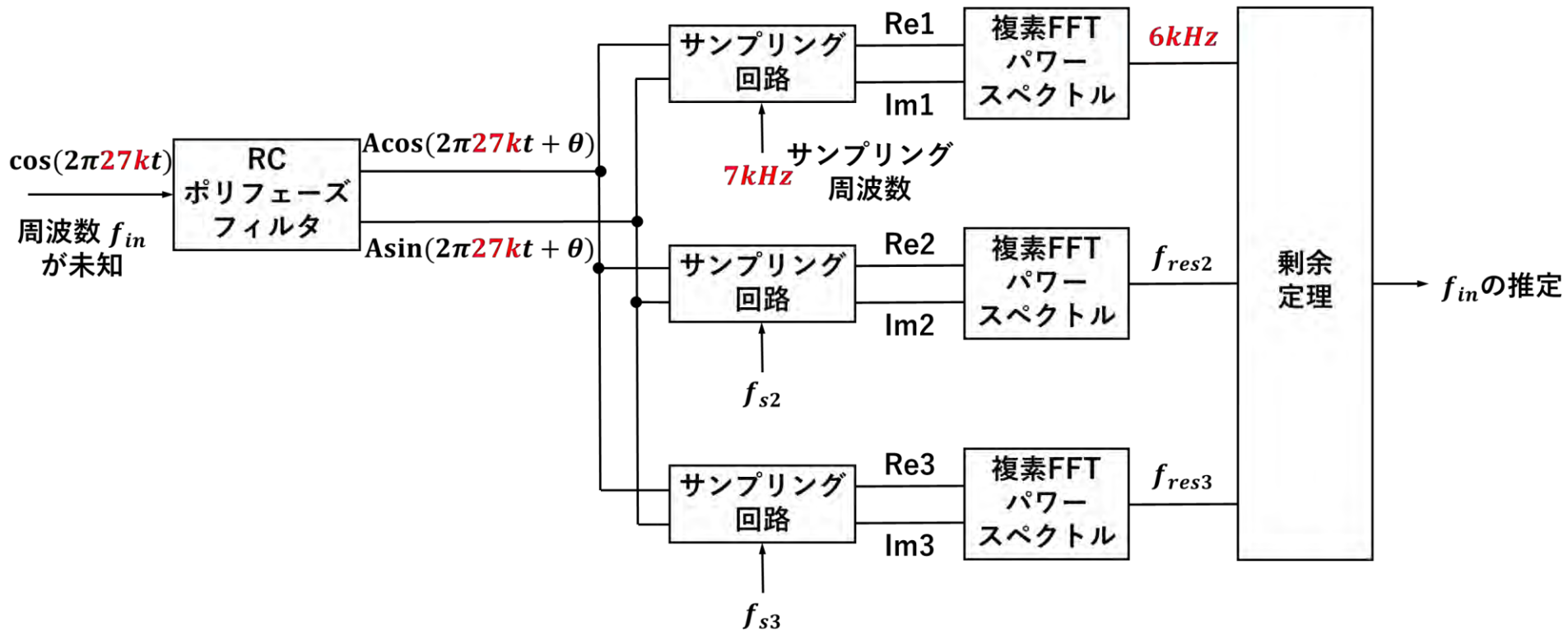
=



$$\cos(2\pi f_{in} t) + i \times \sin(2\pi f_{in} t)$$

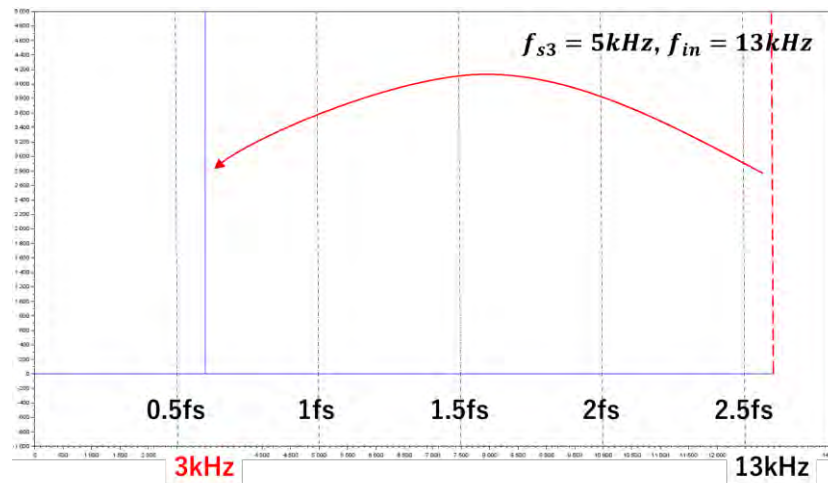
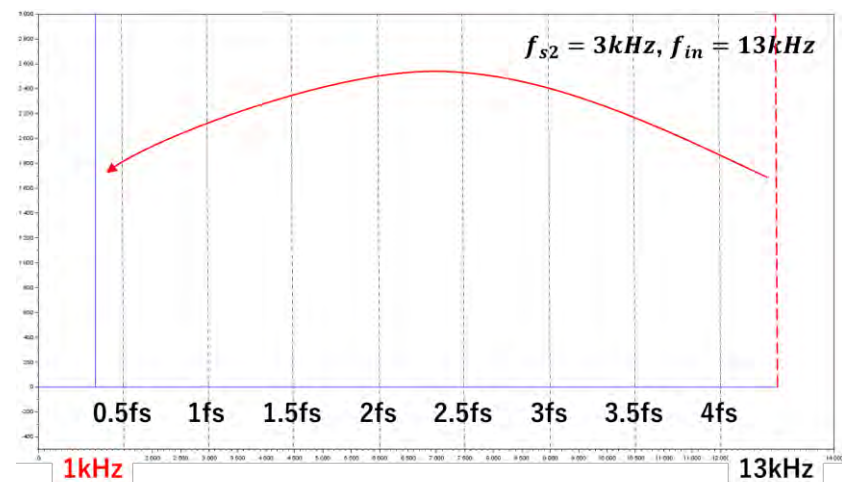
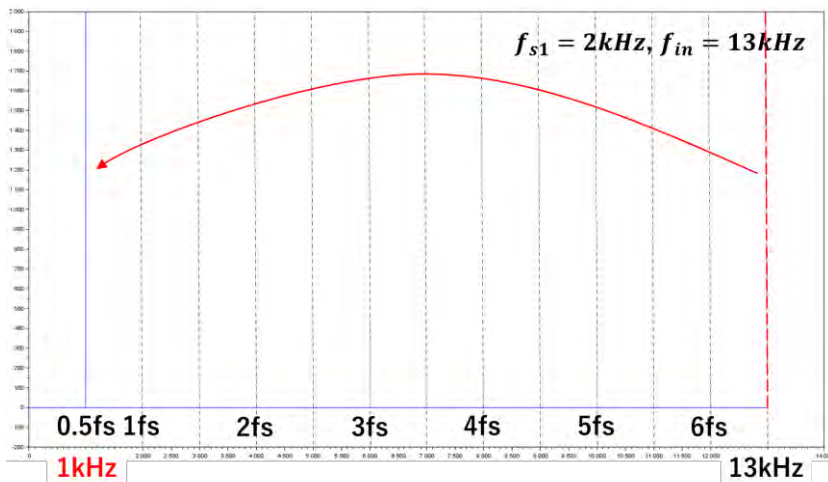
入力周波数 27kHz
 に対する
 サンプル周波数 7kHz
 の
 剰余周波数 6kHz
 を得る

剰余周波数の一つを決定



様々なサンプリング周波数による剰余周波数

入力周波数 $f_{in} = 13\text{kHz}$, 互いに素のサンプリング周波数



サンプリング周波数 剰余周波数

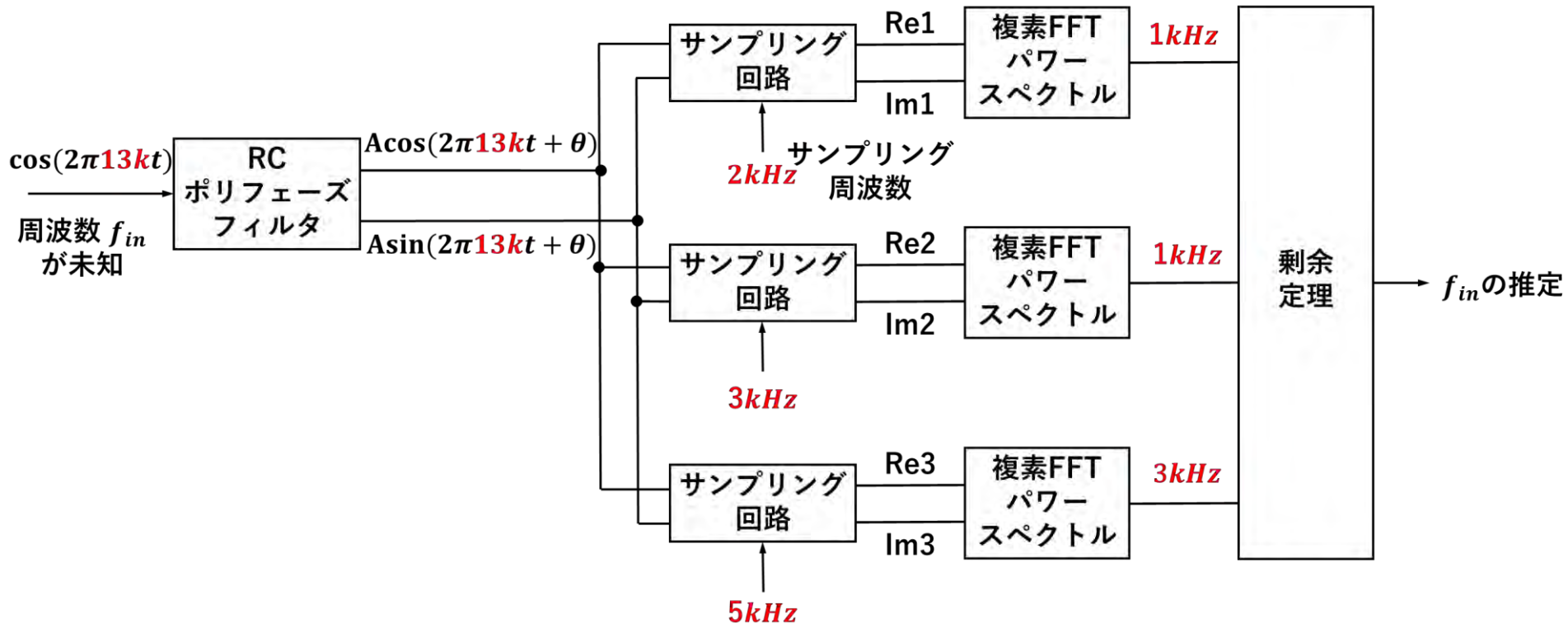
$f_{s1} = 2\text{kHz}$ のとき 1kHz

$f_{s2} = 3\text{kHz}$ のとき 1kHz

$f_{s3} = 5\text{kHz}$ のとき 3kHz

でスペクトルが発生

剰余周波数の決定



高周波入力周波数の推定

$f_{in} = 13\text{kHz}$ のとき

$$m_1 = 1\text{kHz}$$

$$m_2 = 1\text{kHz}$$

$$m_3 = 3\text{kHz}$$

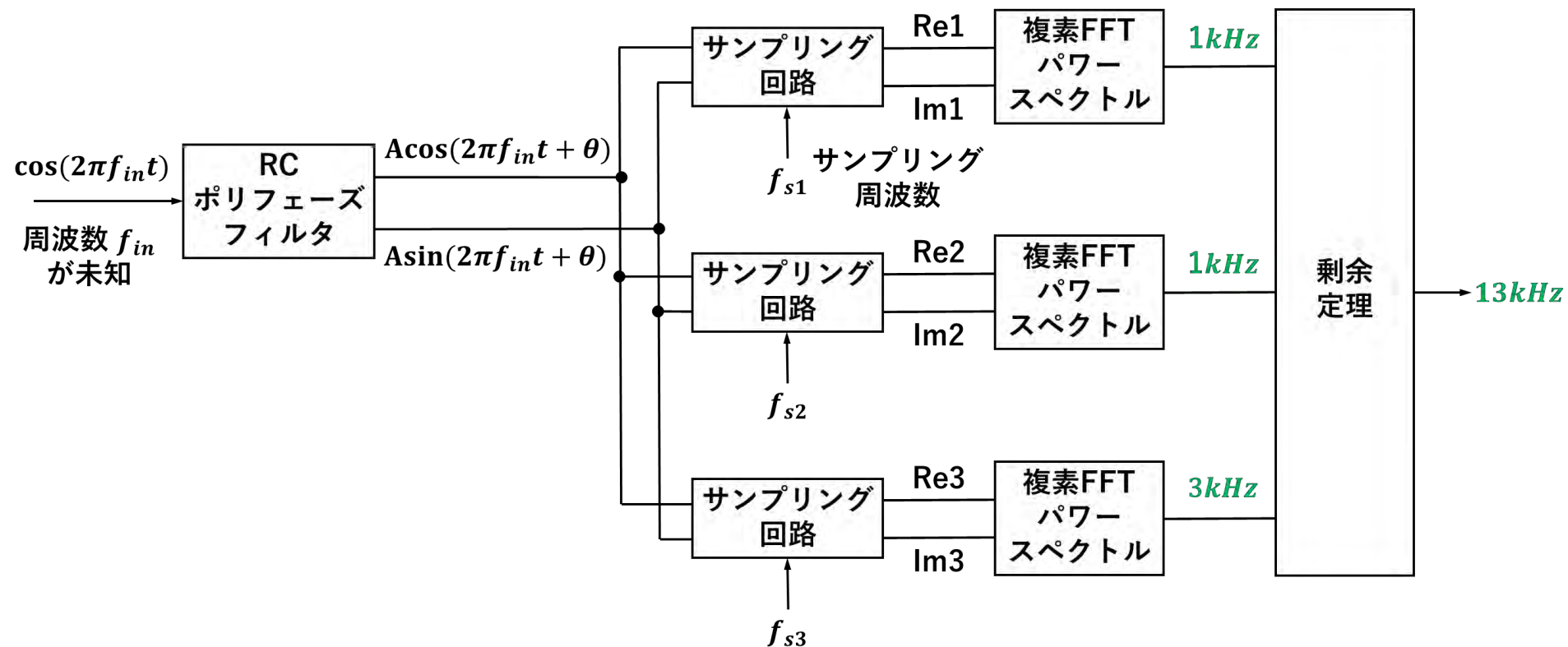
$f_{in} = 13\text{kHz}$
と推定できる

f_{s1}	f_{s2}	f_{s3}	f_{in}
a	b	c	k
0	0	0	0
1	1	1	1
0	2	2	2
1	0	3	3
0	1	4	4
1	2	0	5
0	0	1	6
1	1	2	7
0	2	3	8
1	0	4	9
0	1	0	10
1	2	1	11
0	0	2	12
1	1	3	13
0	2	4	14

f_{s1}	f_{s2}	f_{s3}	f_{in}
a	b	c	k
1	0	0	15
0	1	1	16
1	2	2	17
0	0	3	18
1	1	4	19
0	2	0	20
1	0	1	21
0	1	2	22
1	2	3	23
0	0	4	24
1	1	0	25
0	2	1	26
1	0	2	27
0	1	3	28
1	2	4	29

入力周波数 $f_{in} = 0, 1 \text{ kHz}, \dots \sim 29 \text{ kHz}$ を全て
提案原理で周波数推定できることを確認した

剰余周波数から入力周波数の推定



提案手法の周波数測定範囲

サンプリング周波数により決定

$f_{s1} = 1009, f_{s2} = 1013, f_{s3} = 1019$ (互いに素) の場合

$$1009 \times 1013 \times 1019 = 1,041,537,223$$

∴ 0 – 1,041,537,222Hz まで測定可能 (1Hz刻み)



約**1kHz**の複数サンプリング周波数から
1GHzの周波数が推定可

提案手法の欠点

a	b	c	k
0	0	0	0
1	1	1	1
0	2	2	2
1	0	3	3
0	1	4	4
1	2	0	5
0	0	1	6
1	1	2	7
0	2	3	8
1	0	4	9
0	1	0	10
1	2	1	11
0	0	2	12
1	1	3	13
0	2	4	14

a	b	c	k
1	0	0	15
0	1	1	16
1	2	2	17
0	0	3	18
1	1	4	19
0	2	0	20
1	0	1	21
0	1	2	22
1	2	3	23
0	0	4	24
1	1	0	25
0	2	1	26
1	0	2	27
0	1	3	28
1	2	4	29

m1, m2, m3 に測定誤差が生じた場合
推定周波数 k は全く異なる値となる

アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

まとめ

- 剰余定理を用いることで
複数の低い周波数のサンプリングから
高周波信号の周波数を推定する方式を考案し
理論・シミュレーションにて確認



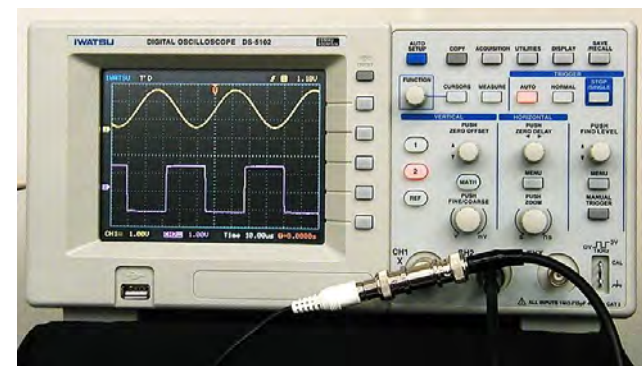
回路実現が容易

- 入力周波数の推定範囲は、
複数のサンプリング周波数の積
- 制限
 - ① 推定可能な入力周波数は離散値のみ
 - ② 剰余周波数に誤差があると測定誤差大

最後に

温故知新

古典数学は先端電子計測技術に
貢献できる



発表内容の新規性

- 高周波信号の周波数を複数の低周波数サンプリング結果から推定・測定する
先行研究あり. 例えば 下記.

Xiaowei Li, Hong Liang, and Xiang-Gen Xia,

“A Robust Chinese Remainder Theorem With Its Applications in Frequency Estimation
From Undersampled Waveforms”,

IEEE Trans. Signal Processing, vol. 57, no.11 (Nov. 2009).

- ここでの発表の新規性は、内部にアナログ・ヒルベルトフィルタ (RC ポリフェーズフィルタ) を併用したこと. RCポリフェーズフィルタのヒルベルトフィルタとの関係性は下記.

Yoshiro Tamura, Ryo Sekiyama, Koji Asami, Haruo Kobayashi,

"RC Polyphase Filter As Complex Analog Hilbert Filter",

IEEE 13th International Conference on Solid-State and Integrated Circuit Technology, Hangzhou (Oct. 2016).

<http://kobaweb.ei.st.gunma-u.ac.jp/news/pdf/2016/ICSICTpresentation1021.pdf>

<http://ieeexplore.ieee.org/document/7999091/>

<http://kobaweb.ei.st.gunma-u.ac.jp/lecture/WE2B-1.pdf>

Q&A

- Q1. 除数の1つを10倍することで少数でも表せるのでは？
- Q2. 他の周波数推定回路と比べてどのような点が利点となるか？
- Q3. どのくらいの頻度で誤差が生じるか？
- Q4. どのようなアプリケーションに応用できるか？

整数論に基づく無理数近似値 アナログ信号生成回路

群馬大学 理工学部 電子情報理工学科

平井 愛統，
桑名杏奈，小林 春夫

Outline

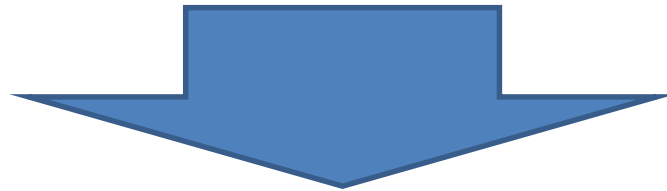
- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
 - 合成抵抗の収束値
 - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
 - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
 - 合成抵抗と連分数展開との対応
 - ネイピア数 e , 円周率 π
- まとめ

Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
 - 合成抵抗の収束値
 - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
 - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
 - 合成抵抗と連分数展開との対応
 - ネイピア数 e , 円周率 π
- まとめ

研究背景・目的

- IC内での抵抗値はばらつく
「比精度」はよい(0.1% 程度の誤差)
- 無理数は連分数展開で表せる

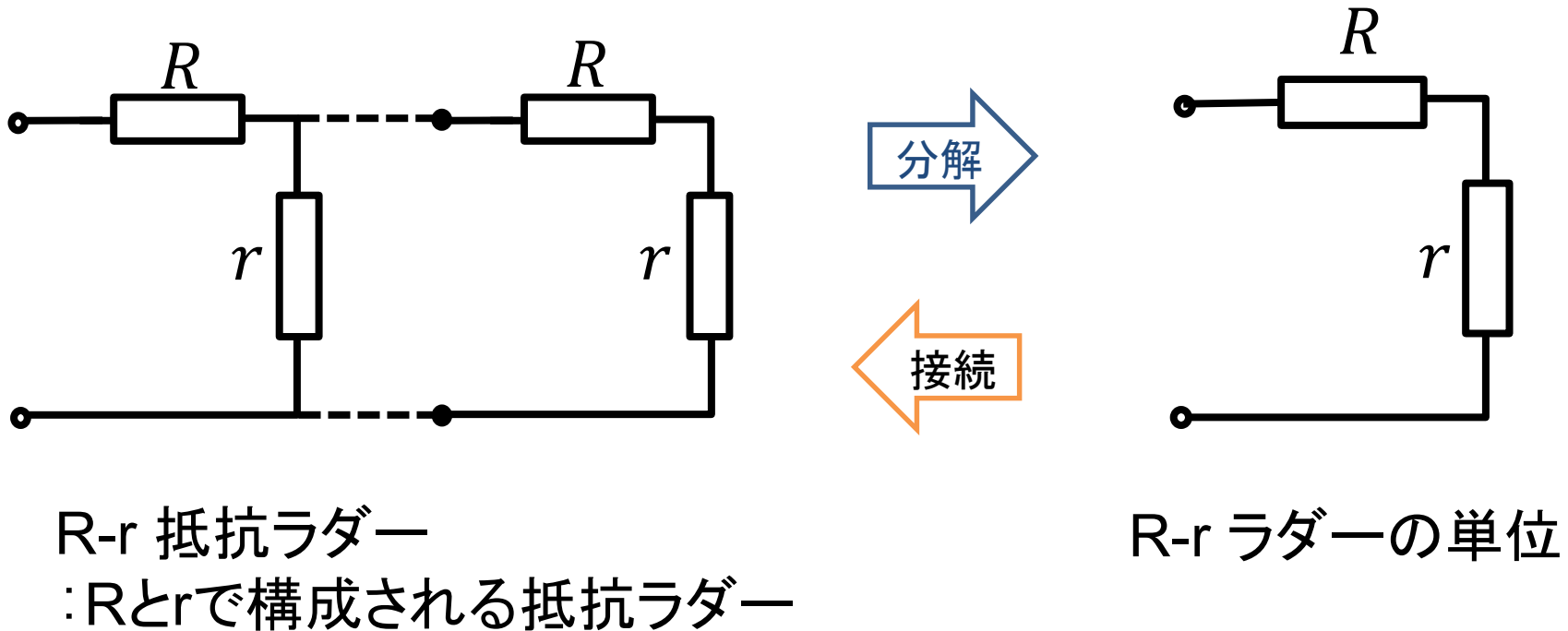


- 整数比の抵抗でのネットワークで
無理数(近似)の比抵抗を構成
- 無理数アナログ信号を生成

Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
 - 合成抵抗の収束値
 - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
 - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
 - 合成抵抗と連分数展開との対応
 - ネイピア数 e , 円周率 π
- まとめ

R-r ラダーの合成抵抗値




抵抗ラダーはRとrの単位に分割できる

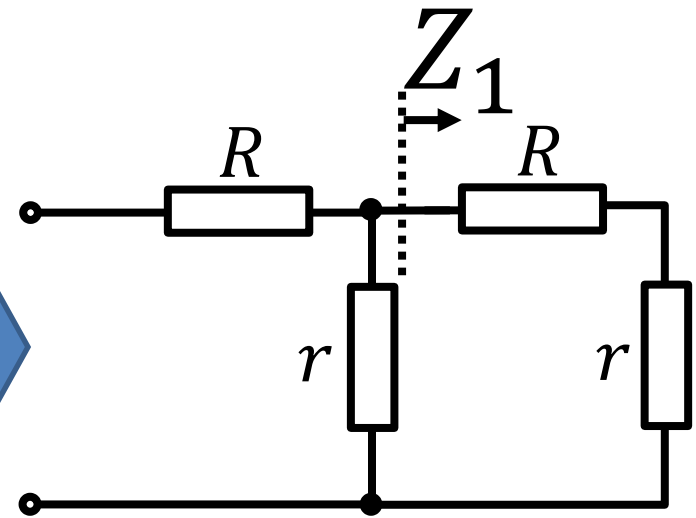
R-rラダーの合成抵抗値

- ・接続する”単位”を増やす

二段ラダー Z_2


$$Z_2 = R + \frac{r(R+r)}{r+(R+r)}$$

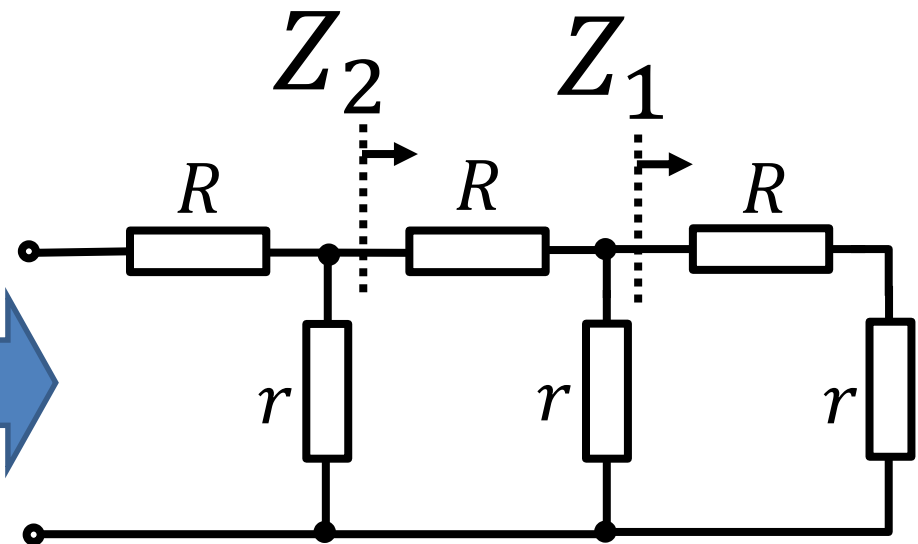
Z_2 



三段ラダー Z_3

$$Z_3 = R + \frac{rZ_2}{r+Z_2}$$

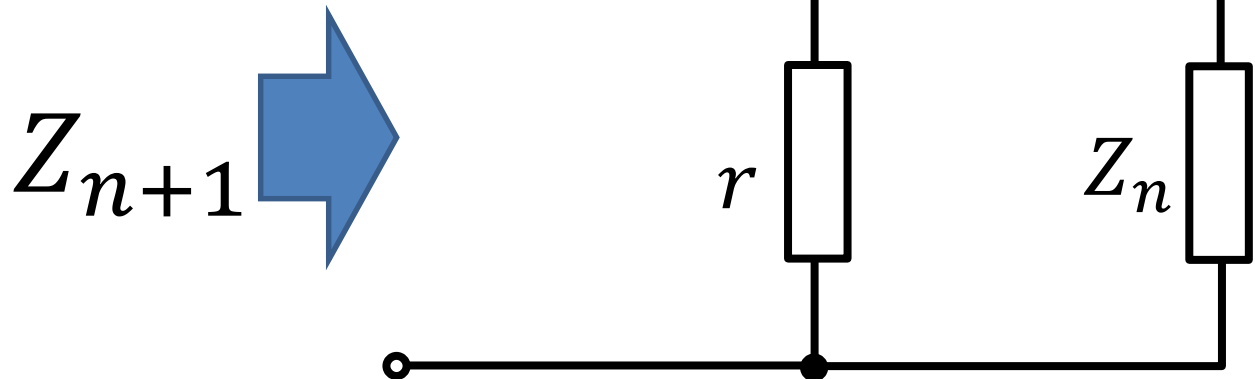
Z_3 



n段R-rラダーの合成抵抗

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= R + \frac{rZ_n}{r + Z_n} \\ &= \frac{(r + R)Z_n + rR}{Z_n + r} \end{aligned}$$

→ Z_n に関する漸化式



n段ラダーの合成抵抗

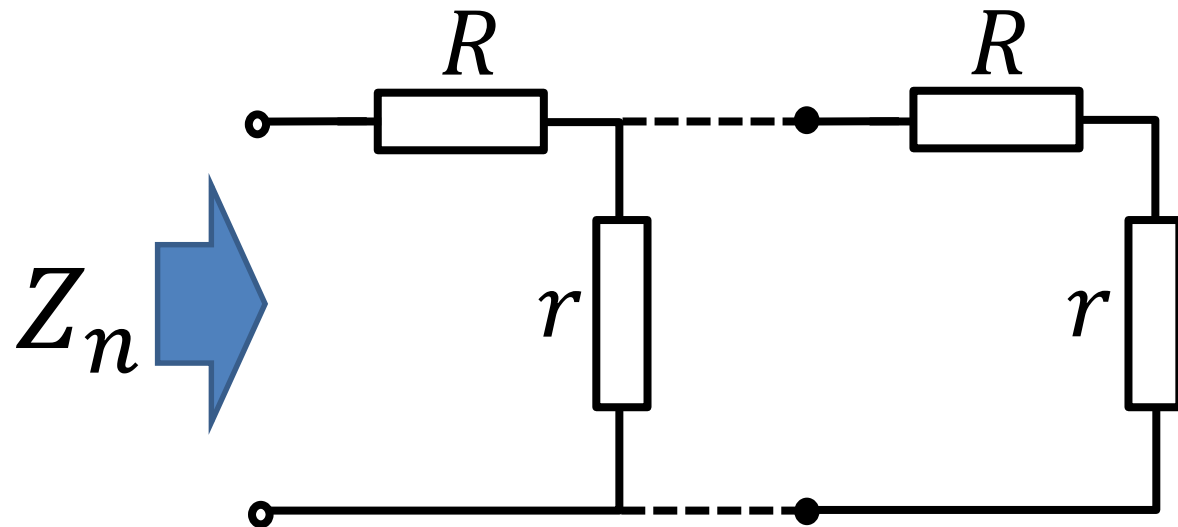
$$Z_n = \frac{\alpha k^n - \beta}{k^n - 1}$$

ただし、

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(R - \sqrt{R^2 + 4rR} \right),$$

$$k = \frac{R + r - \beta}{R + r - \alpha}, 1 < k$$

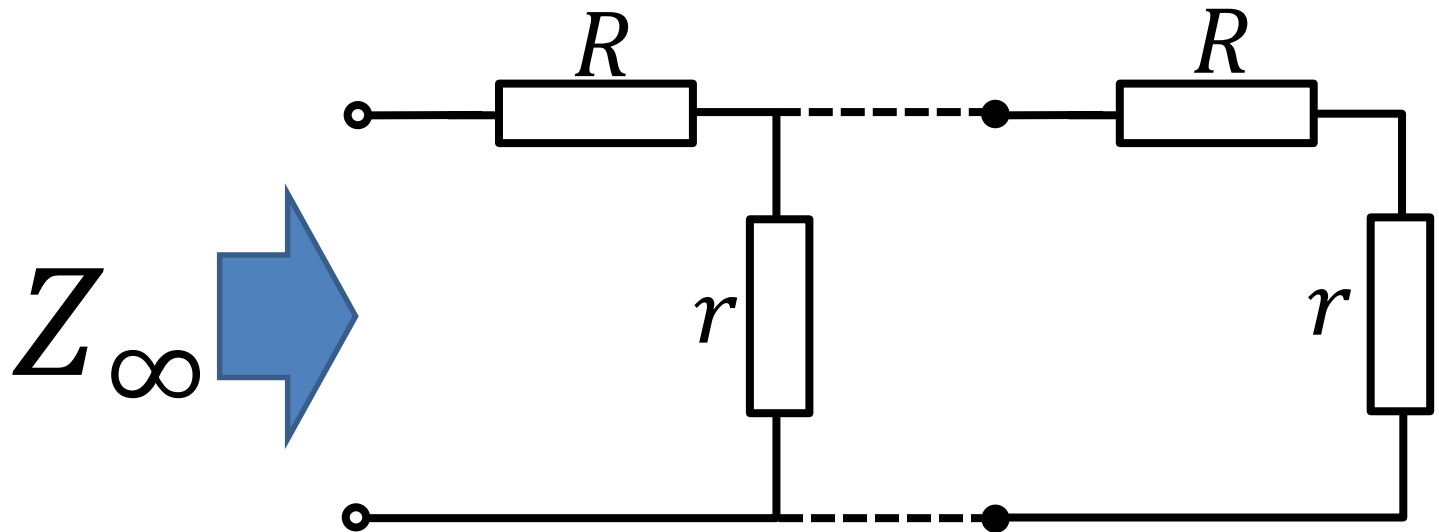


合成抵抗の収束値

$$Z_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta k^{-n}}{1 - k^{-n}}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \left(R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right)$$

$$Z_{\infty} = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R(R + 4r)}}{2}$$



Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
 - 合成抵抗の収束値
 - 貴金属数比のラダー，シミュレーション検証
 - $\sqrt{2}$ の比のラダー，シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
 - 合成抵抗と連分数展開との対応
 - ネイピア数 e , 円周率 π
- まとめ

貴金属数 λ

• $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解

$$\lambda_n = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

• n について「第 n 貴金属数」

• $n = 1$: 黄金数 ϕ

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

• $n = 2$: 白銀数 τ

$$\tau = 1 + \sqrt{2}$$

• $n = 3$: 青銅数 ξ

$$\xi = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

• 連分数形式

$$\lambda_n = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\ddots}}}}$$

• $1 : (\lambda_n - 1)$ を「第 n 貴金属比」

参考：岩本誠一、江口将生、吉良知文、「黄金・白銀・青銅：数と比と形と率と」(2008)

https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac_download_md/15758/KJ00005471244.pdf

R-rラダーと貴金属数

R-r ラダーの抵抗

貴金属数

$$Z_{\infty} = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R(R+4r)}}{2}$$

$$\lambda_n = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= R + \frac{rZ_n}{r + Z_n} \\ &= \frac{R}{k} \left(k + \frac{1}{\frac{R}{kr} + \frac{R}{kZ_n}} \right) \\ &= \frac{R}{k} \left(k + \frac{1}{\frac{R}{kr} + \frac{1}{k + \frac{1}{\frac{R}{kr} + \frac{1}{\ddots}}}} \right) \end{aligned}$$

$$\lambda_n = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\ddots}}}}$$

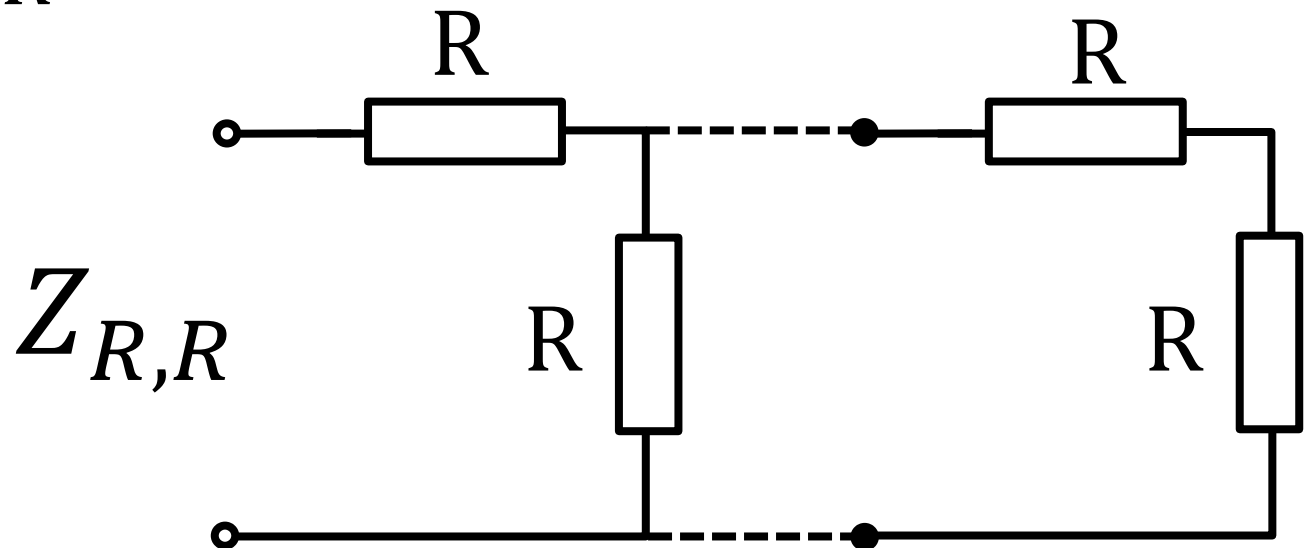
R-r ラダーの合成抵抗

貴金属数(無理数)比になりうる

R-Rラダー

$$\begin{aligned}
 Z_{R,R} &= \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R(R+4r)}}{2} \\
 &= \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R(R+4R)}}{2} \\
 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}R
 \end{aligned}$$

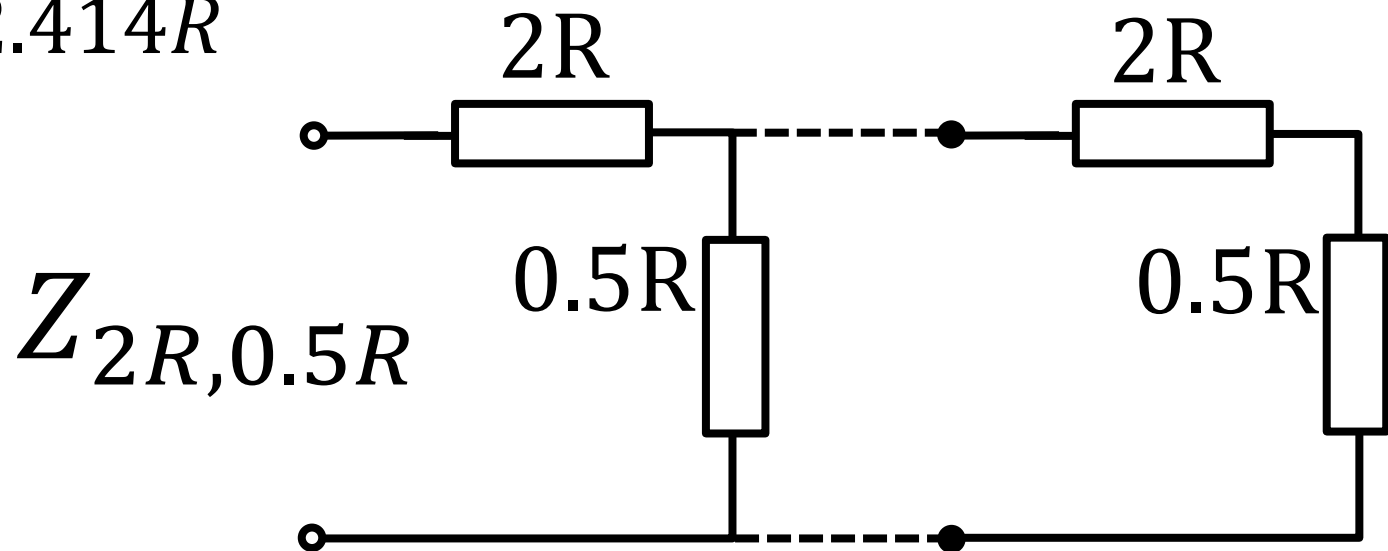
黄金数 ϕ ラダー



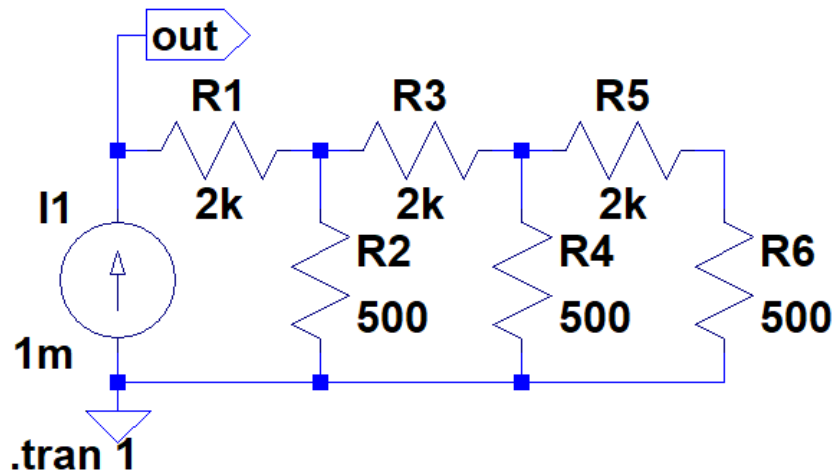
2R-0.5Rラダー

$$\begin{aligned}
 Z_{2R,0.5R} &= \frac{2R}{2} + \frac{\sqrt{2R(2R + 4 \cdot 0.5R)}}{2} \\
 &= R + \frac{2\sqrt{2R^2}}{2} \\
 &= (1 + \sqrt{2})R \\
 &\approx 2.414R
 \end{aligned}$$

白銀数 τ ラダー



白銀数 $1 + \sqrt{2}$ ラダー (3段)



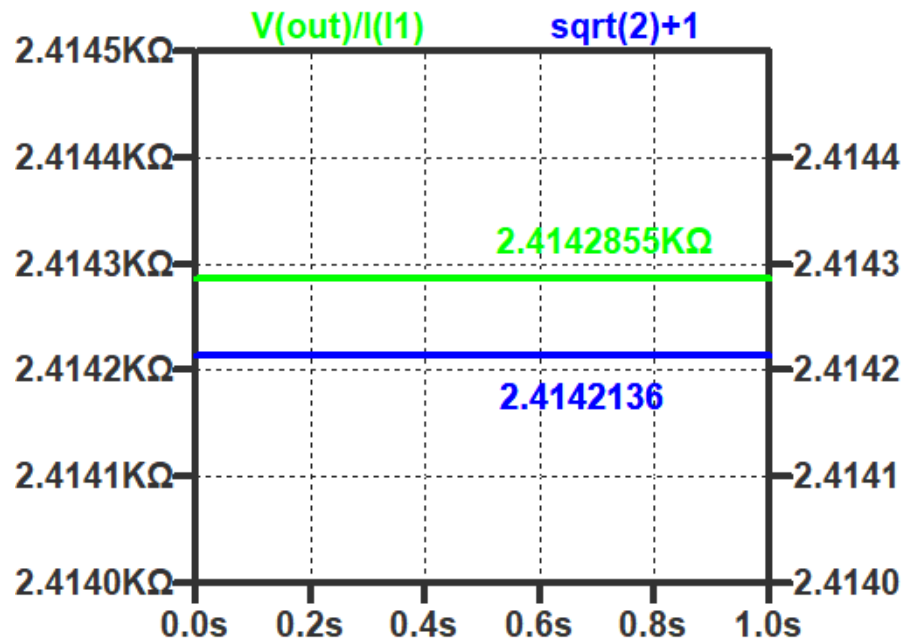
条件

- R は $1 \text{ k}\Omega$
- 電流 1 mA を流して、
電圧 $V(\text{out})$ から抵抗を計算

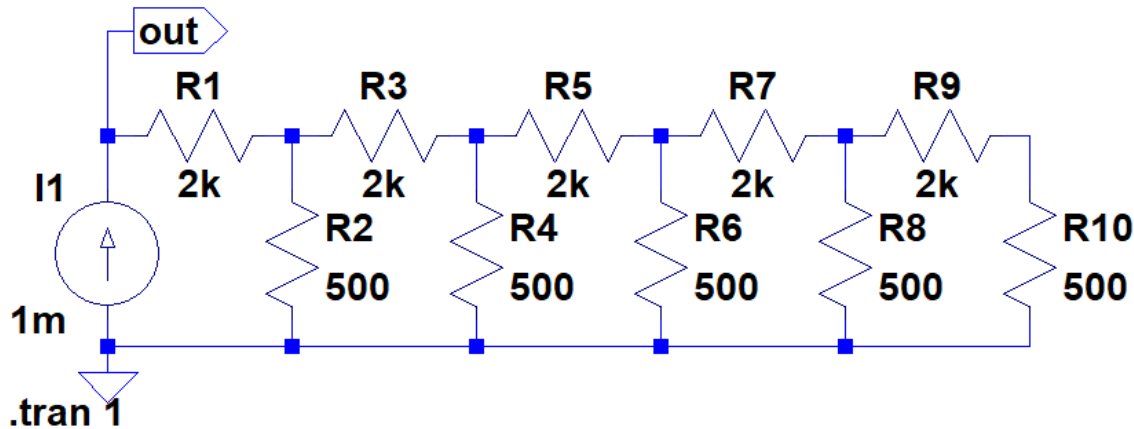
結果

抵抗値 **2.4142855 k Ω**

$$1 + \sqrt{2} = 2.414213562373095 \dots$$



白銀数 $1 + \sqrt{2}$ ラダー (5段)



条件

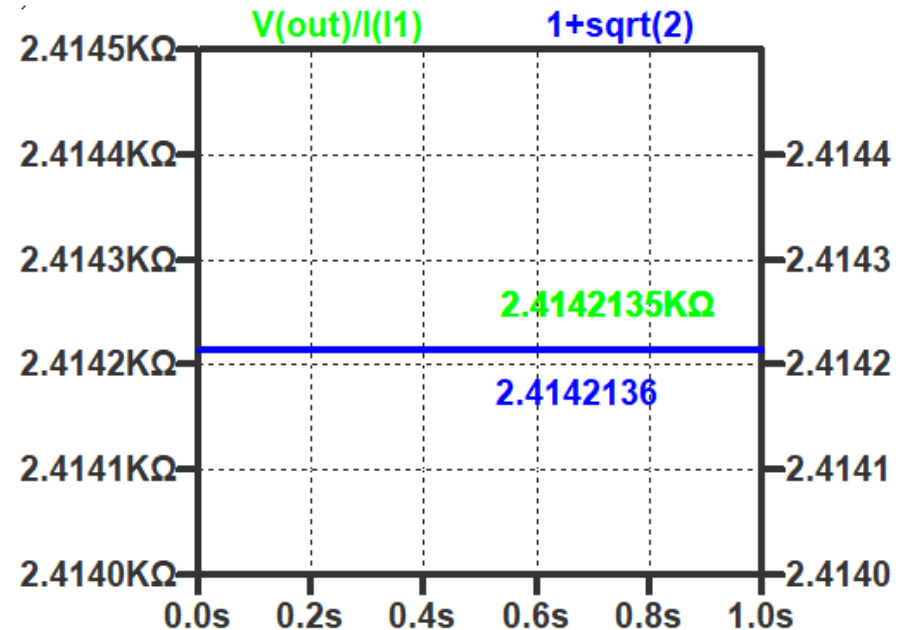
- R は $1 \text{ k}\Omega$
- 電流 1 mA を流して、電圧 $V(\text{out})$ から抵抗を計算

結果

抵抗値 **2.4142135 k Ω**

$$1 + \sqrt{2} = 2.414213562373095 \dots$$

段数を増加 $\rightarrow 1 + \sqrt{2}$ に近づく



Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
 - 合成抵抗の収束値
 - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
 - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
 - 合成抵抗と連分数展開との対応
 - ネイピア数 e , 円周率 π
- まとめ

$\sqrt{2}$ ラダー

- 合成抵抗の比を $\sqrt{2}$ にしたい

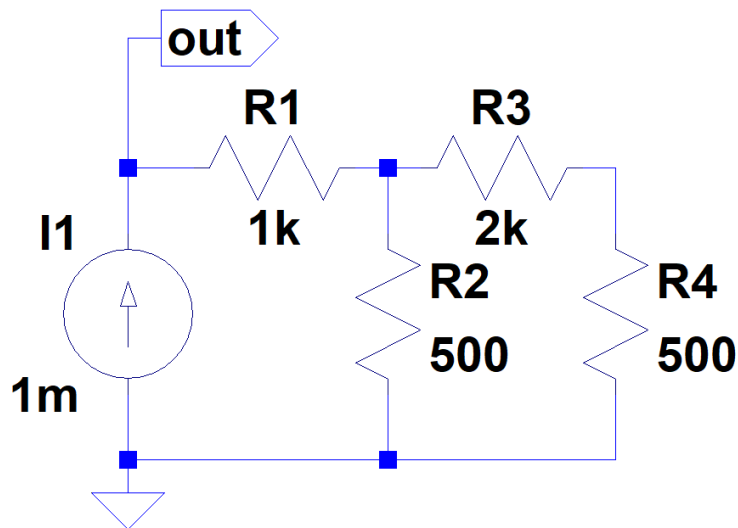
$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= (1 + \sqrt{2}) - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}\end{aligned}$$

$$Z_{2R,0.5R} = (1 + \sqrt{2})R$$

$$Z_{2R,0.5R} - R = \sqrt{2}R$$

2R-0.5Rラダーの先頭の2RをRにする！

$\sqrt{2}$ ラダー (2段) シミュレーション



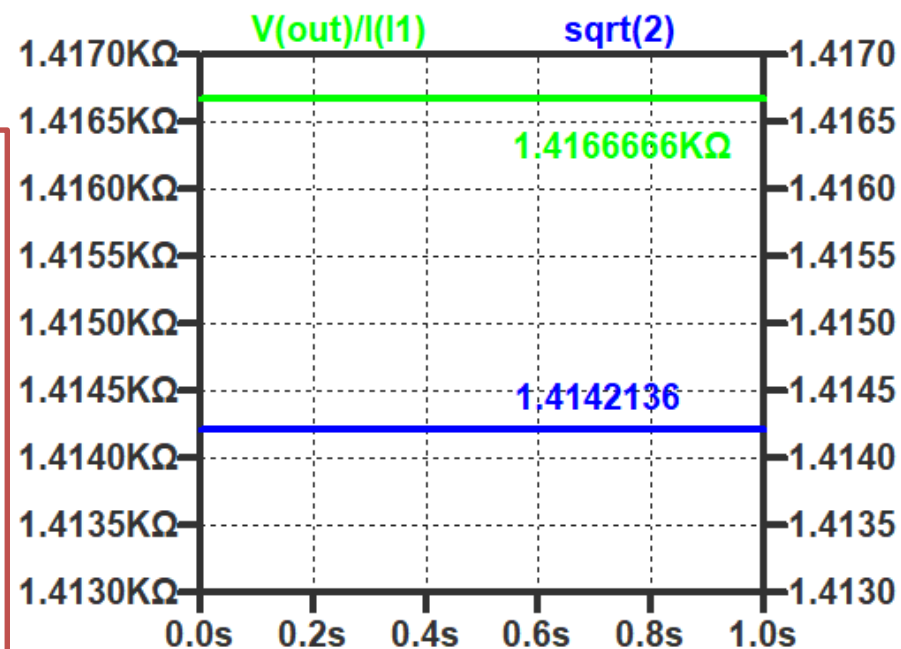
条件

- R は $1\text{ k}\Omega$
- 電流 1 mA を流して、電圧 $V(\text{out})$ から抵抗を計算

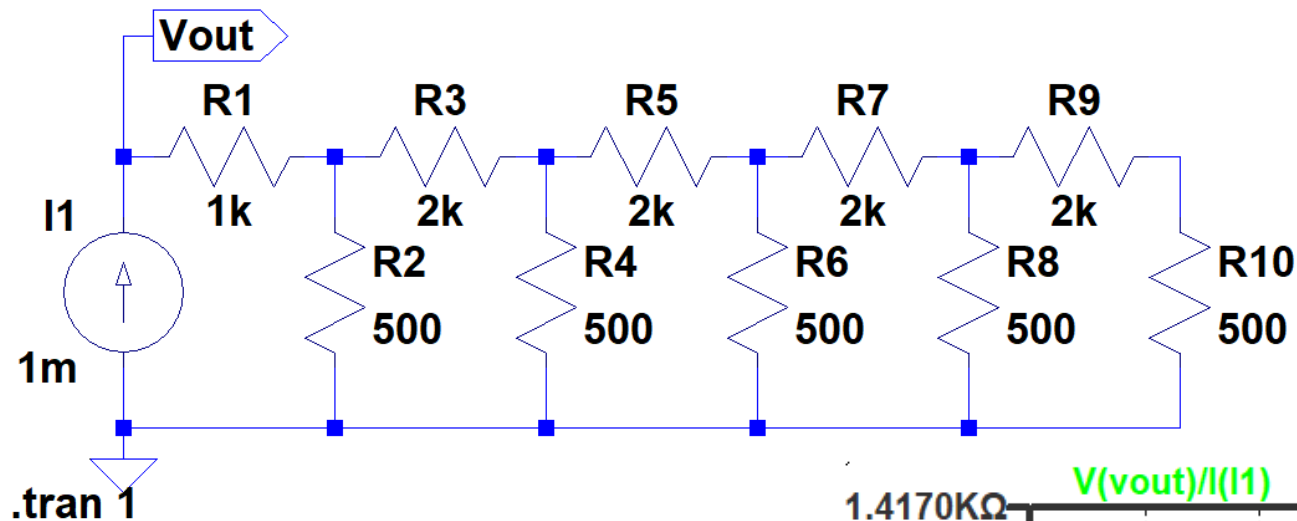
結果

抵抗値 $1.41666666\text{ k}\Omega$

$\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots$



$\sqrt{2}$ ラダー (5段) シミュレーション



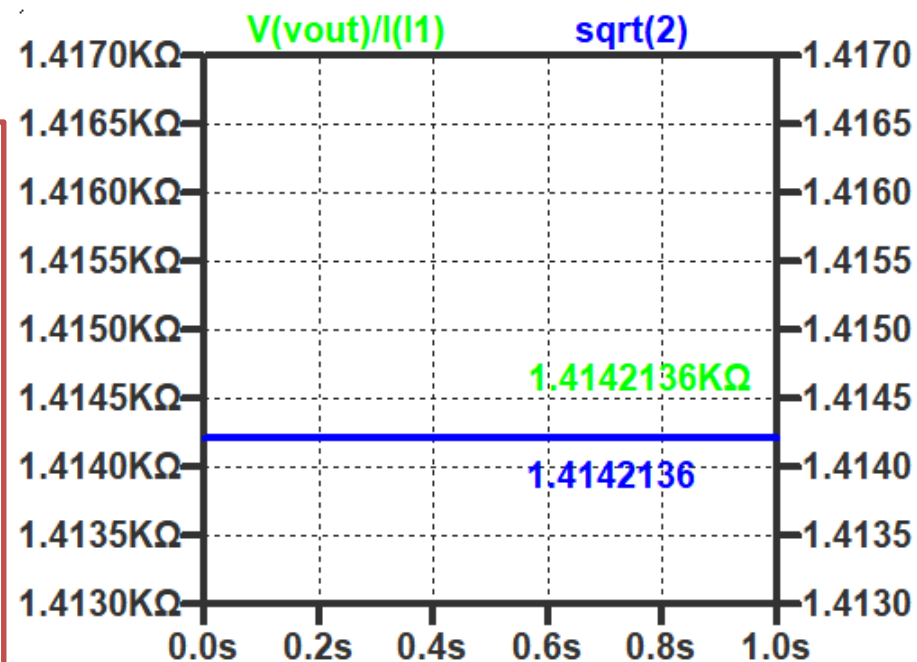
条件

- R は 1 k Ω
- 電流 1 mAを流して、電圧 $V(\text{out})$ から抵抗を計算

結果

抵抗値 1.4142136 k Ω

$\sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$

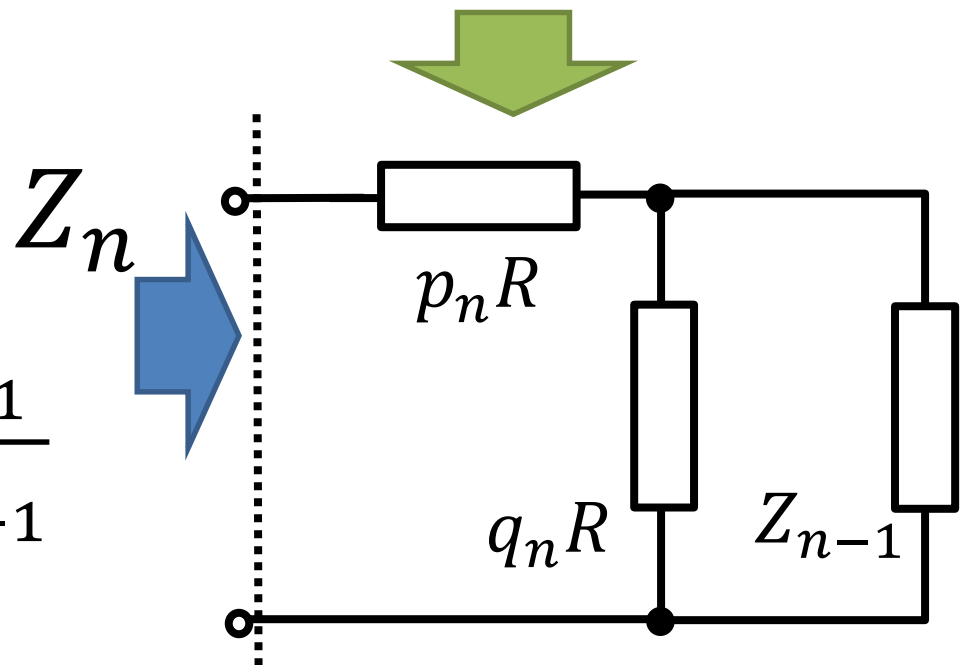
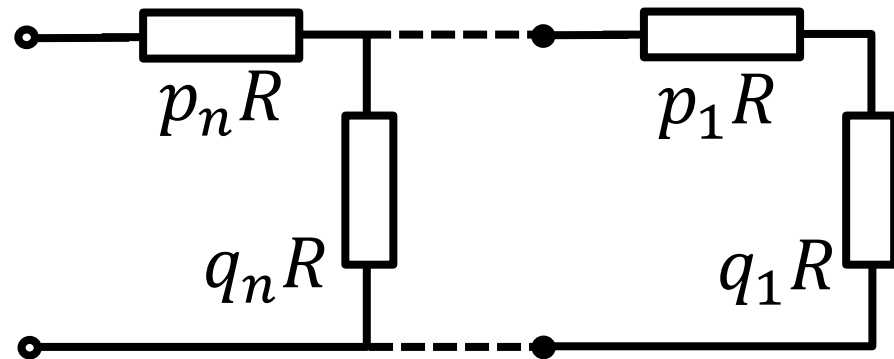


Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
 - 合成抵抗の収束値
 - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
 - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- **各段の抵抗値が異なるラダー**
 - 合成抵抗と連分数展開との対応
 - ネイピア数 e , 円周率 π
- まとめ

各段の抵抗値が異なるラダー

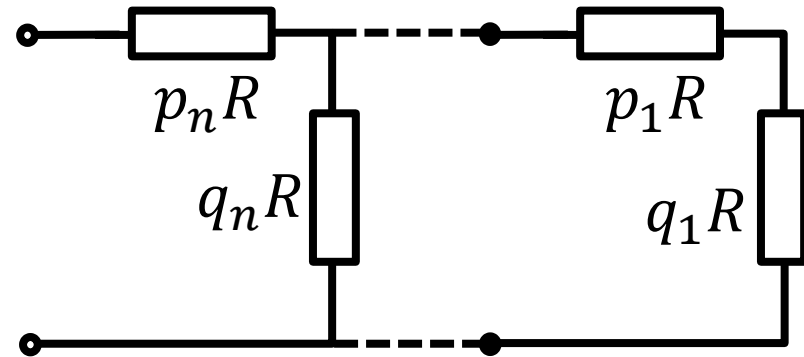
n 段目の抵抗を
 p_n, q_n で重みづけ



$$Z_n = p_n R + \frac{q_n R \cdot Z_{n-1}}{q_n R + Z_{n-1}}$$

各段の抵抗値が異なるラダー

$$\begin{aligned}
 Z_n &= p_n R + \frac{q_n R \cdot Z_{n-1}}{q_n R + Z_{n-1}} \\
 &= R \left(p_n + \frac{1}{\frac{1}{q_n} + \frac{R}{Z_{n-1}}} \right) \\
 &= R \left(p_n + \frac{1}{\frac{1}{q_n} + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{\frac{1}{q_{n-1}} + \frac{1}{\ddots}}}} \right)
 \end{aligned}$$



任意の数の連分数展開から p_n と q_n を決定
 → 抵抗の比は任意の数に

Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
 - 合成抵抗の収束値
 - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
 - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
 - 合成抵抗と連分数展開との対応
 - ネイピア数 e , 円周率 π
- まとめ

ネイピア数 e の比を持つ抵抗ラダー

- ・無理数
- ・自然対数の底
- ・連分数展開が規則性を持つ

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}}}}$$

$$= [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots]$$

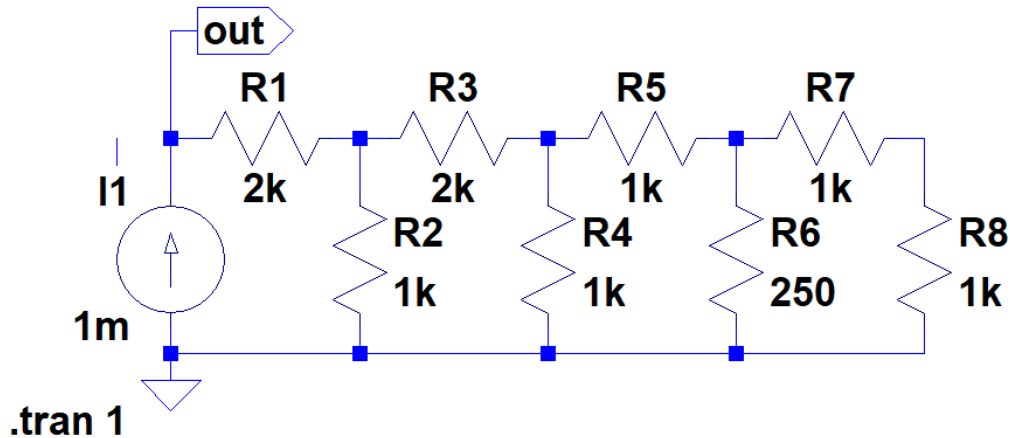
p_n → 連分数展開 整数部分の奇数番目

2, 2, 1, 1, 6, ...

q_n → 連分数展開 整数部分の偶数番目の逆数

1, 1, 1/4, 1, 1, ...

ネイピア数 e ラダー(4段)



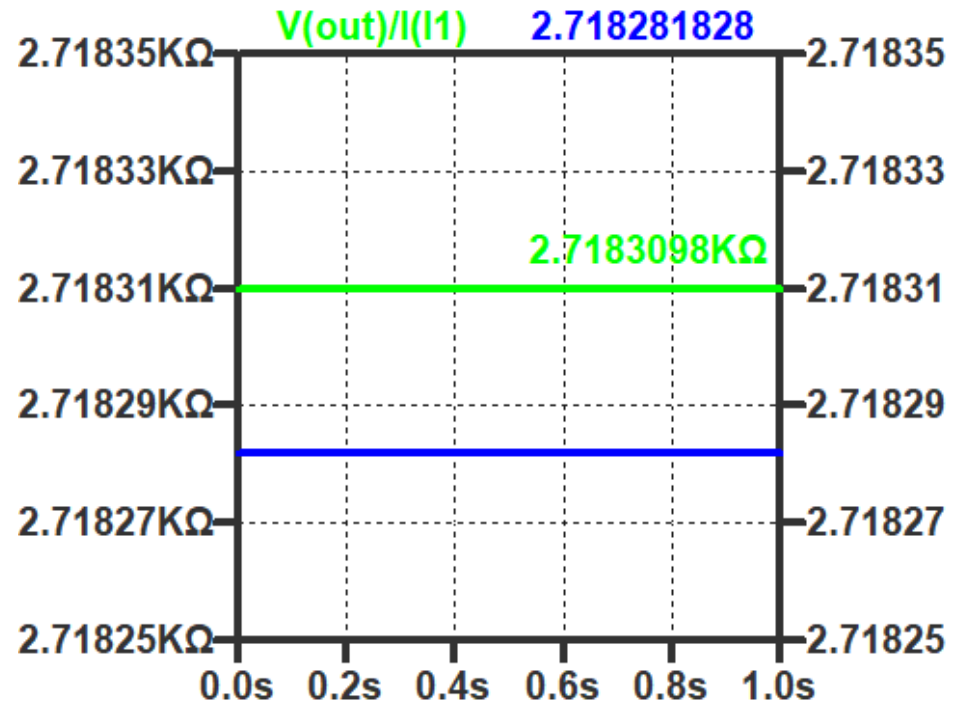
$$e \approx [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1]$$

条件

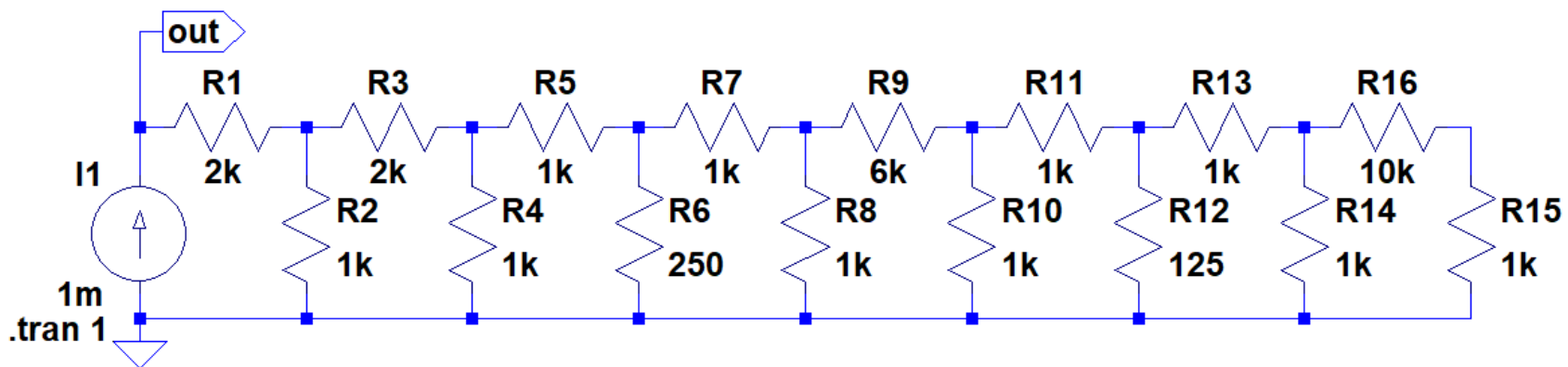
- R は $1 \text{ k}\Omega$
- 電流 1 mA を流して、
電圧 $V(\text{out})$ から抵抗を計算

結果

抵抗値 **2.7183098 k Ω**
($e = 2.718281828459536 \dots$)



ネイピア数eラダー(8段)



$$e \approx [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1]$$

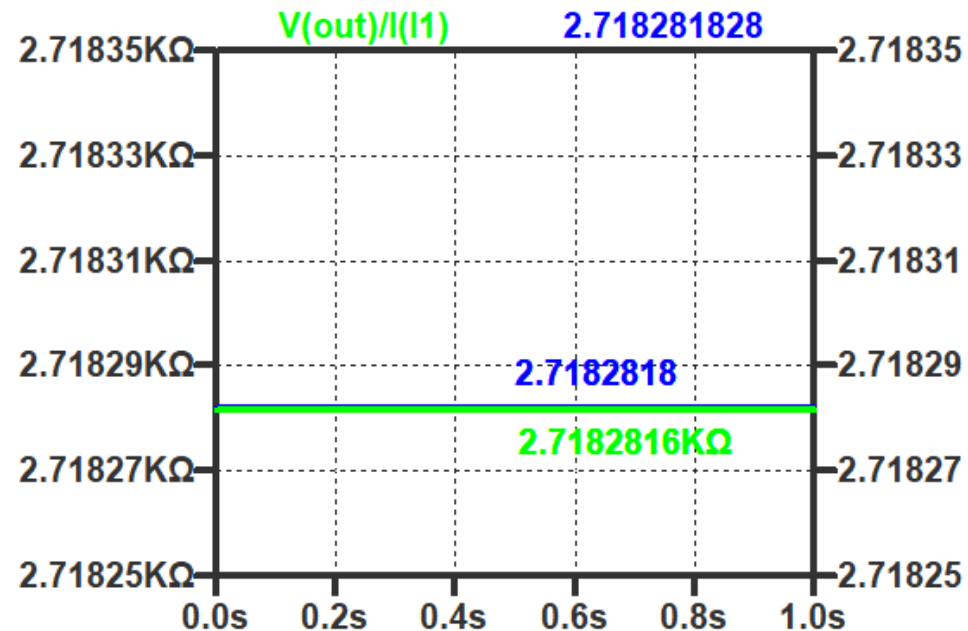
条件

- R は $1 \text{ k}\Omega$
- 電流 1 mA を流して、
電圧 $V(\text{out})$ から抵抗を計算

結果

抵抗値 $2.7182816 \text{ k}\Omega$

($e = 2.718281828459536 \dots$)



円周率 π の比を持つ抵抗ラダー

- ・無理数
- ・規則性をもたない連分数表示
- ・円の周と直径との比（少数第5位までで近似した連分数）

$$\pi \approx 3.14159$$

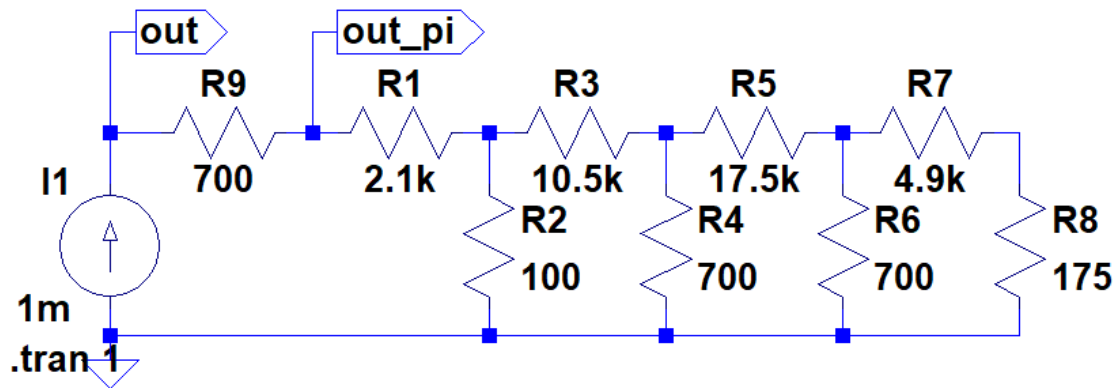
$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

$$= [3; 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4]$$

p_n → 連分数展開 整数部分の奇数番目
3, 15, 25, 7

q_n → 連分数展開 整数部分の偶数番目の逆数
1/7, 1, 1, 1/4

円周率 π のラダー（シミュレーション）



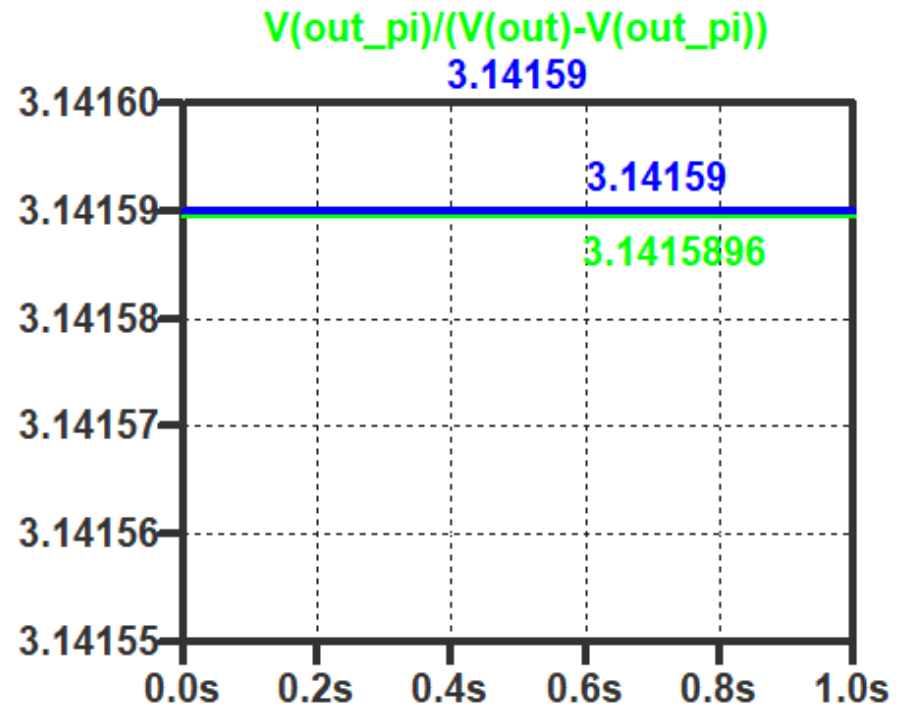
$$\pi \approx [3; 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4]$$

条件

- R は 700Ω
- R と抵抗ラダーに電流 1 mA を流す
- 抵抗にかかる電圧の比から抵抗比を計算

結果

R に対して **3.1415896** 倍の値
(設計値 : **3.14159** 倍)



アナログ信号処理への応用

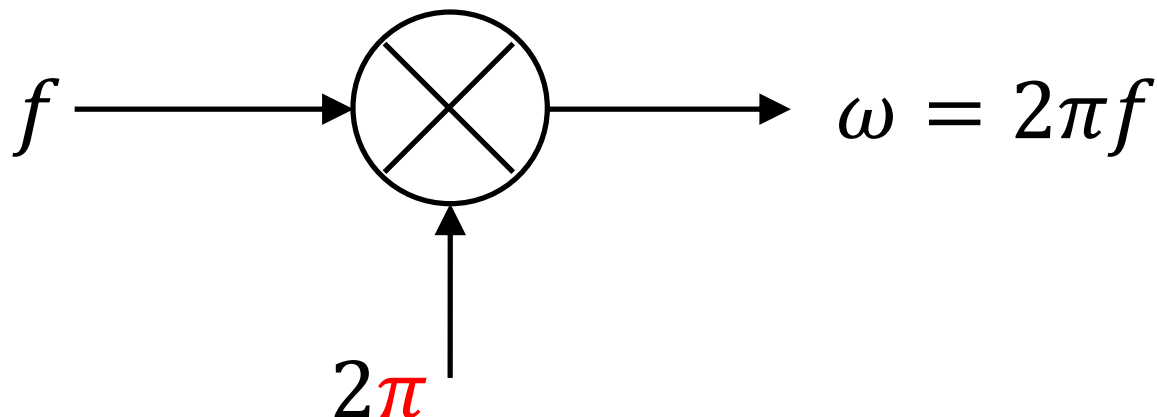
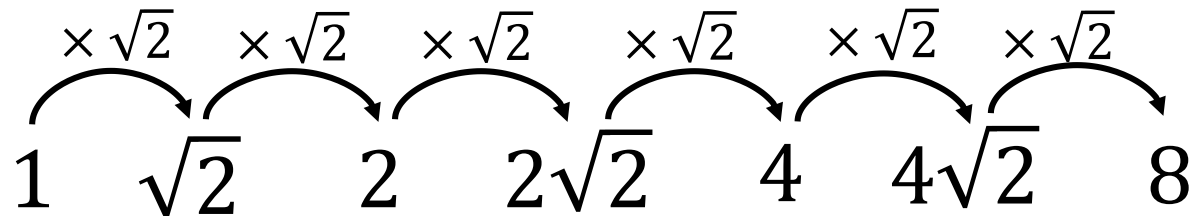
- ADCの冗長設計

- 黄金比 $1 : \phi - 1$

- フィボナッチ重み付け SAR (逐次比較近似) ADC

- 白銀比 $1 : \tau - 1$

- $\sqrt{2}$ (白銀比) 重み付け SAR ADC



Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
 - 合成抵抗の収束値
 - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
 - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
 - 合成抵抗と連分数展開との対応
 - ネイピア数 e , 円周率 π
- まとめ

まとめ

<まとめ>

次を明らかにした。

- R-r ラダーの合成抵抗は「貴金属数」比を持つ
- 任意の数の連分数展開を用いて、その数の比を持つ抵抗を作ることができる
- 近似精度は用いる抵抗の数を増やすことでよくなる

数学によるアナログ信号処理の新機軸



Ludolph van Ceulen

円周率 π

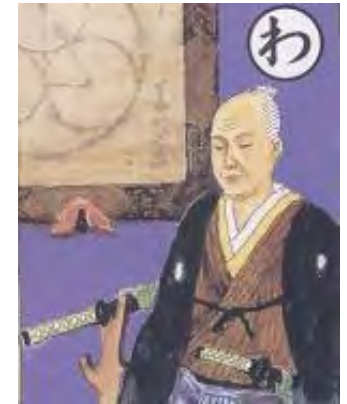


Leonhard Euler

ネイピア数 e



John Napier



関孝和

連分数展開



Georg Simon Ohm

オームの法則



Gustav Robert Kirchhoff

キリヒホッフの法則



Carver Mead

抵抗ネットワーク

Z_n に関する漸化式

特性方程式

$$x = \frac{(R+r)x + rR}{x+r}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Rx - rR = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{R \pm \sqrt{(-R)^2 + 4rR}}{2}$$

重解があるとき

$$(-R)^2 + 4rR = 0$$

$$\Leftrightarrow R(R + 4r) = 0$$

$R > 0, r > 0$ より重解なし

二項間一般分数系漸化式で、重解のない場合

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ta_n + s}, \quad (\text{特性方程式 } x = \frac{px + q}{tx + s})$$

→特性方程式の二つの解を α, β として、

$$a_n = \frac{\alpha b_1 k^{n-1} - \beta}{b_1 k^{n-1} - 1}, \quad b_n = \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}, \quad k = \frac{p - t\beta}{p - t\alpha}.$$

Z_n の一般式は

$$p = R + r, q = rR, t = 1, s = r,$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(R - \sqrt{R^2 + 4rR} \right),$$

$$k = \frac{R + r - \beta}{R + r - \alpha}.$$

質疑・コメント

Q. Rとrの比だけでいいのか？

Rには絶対値が必要ではないか？

A. Rには具体的な値が必要。その値Rに対し、合成抵抗がスライド14・15のようにある比

$(\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ や $1 + \sqrt{2})$ を持つ。

Q. 今回はシミュレーションで検証をしているが実験もできそう。実際の誤差に対して、結果が強いのか弱いのかは検証が必要だと思う。

A. 素子の誤差に関しては、検証が必要だと考えている。ただ、図中左の抵抗ほど合成抵抗に与える影響が大きいことは確認している。

連分数展開を用いる近似無理数の抵抗回路

— 零約術の電気回路への応用 —

Resistance Circuit of Irrational Number Approximation
Based on Continued Fractions

平井愛統, 桑名杏奈, 小林春夫 (群馬大学)

Manato Hirai, Anna Kuwana, Haruo Kobayashi (Gunma University)

Abstract

This paper describes the method to generate irrational number ratio signals by using a resistor ladder and the relation between resistor ladders and irrational numbers. Irrational numbers are expressed as simple continued fractions configured by integers. The combined resistance of resistor ladders is expressed as continued fractions, too. We have designed resistor ladder networks whose overall equivalent resistance values are irrational number approximation ratios to a certain resistance value. Our Circuit simulation has verified this method.

1. はじめに

連分数は分数の分母にさらに分数が連なったものであり、桁数の多い少数や無理数の近似値を連分数としてあらわすことができる。零約術は関孝和が考案し、建部賢弘とその兄の建部賢明が発展させたといわれている。賢明が考案した零約術は、長い小数を分数に近似する方法で、互除法を駆使するが、その結果は、今日では連分数展開とも呼ばれている[1]。

本稿は、この連分数展開を用いて、電子回路中で、整数比の抵抗値を持つ抵抗から無理数近似値の比を持つ等価的な抵抗を作り出す方法を調査し回路シミュレーション検証した結果を報告するものである。

2. 連分数展開を用いた抵抗ラダーの構成

電子回路中の素子の一つである抵抗は、ある電圧を印加したときにその電圧の大きさに比例した電流が流れる、という性質を持つ。この時の電流 I (単位は A、アンペア) と電圧 V (単位は V、ボルト) の比を、電気抵抗 R (単位は Ω 、オーム) といい、 $R = V/I$ である。

いま、二種類の抵抗 R と r があるとする。この二種類の抵抗を図 1(a) と図 1(b) のようにそれぞれ直列接続、並列接続すると、これらは等価的に

$$R_S = R + r \tag{1}$$

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \leftrightarrow R_P = \frac{R \cdot r}{R + r} \tag{2}$$

という抵抗になる。つまり、二つの抵抗を直列に接続した場合の合成抵抗は「それぞれの抵抗の和」になり、並列に接続した場合の合成抵抗の逆数は「それぞれ抵抗の逆数の和」になる。

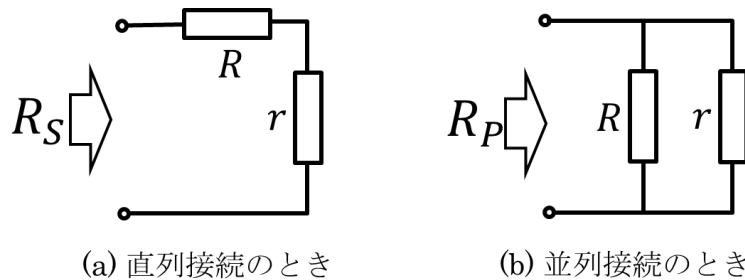
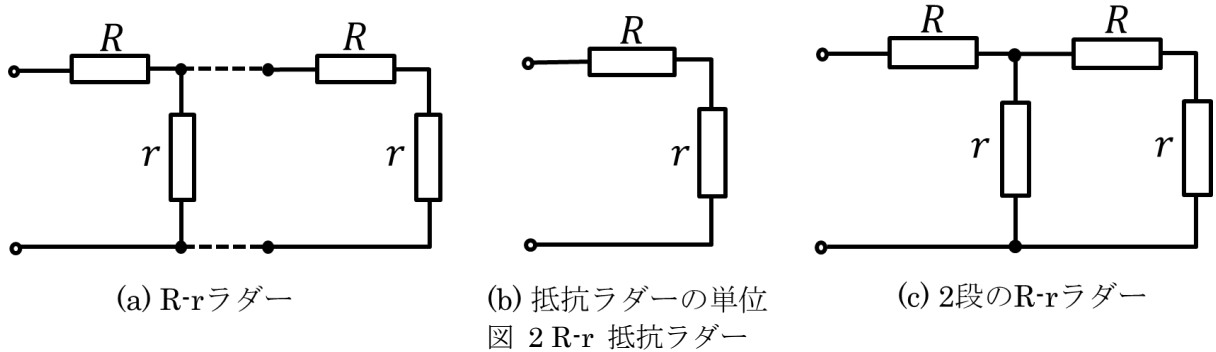


図 1 抵抗の接続

この二種類の抵抗 R と r で、図 2(a) に示すような“抵抗ラダー”、つまり抵抗のはしごを構成した場合の

合成抵抗を考え、これを R-r ラダーと呼ぶことにする。ラダーが一段の場合の合成抵抗 Z_1 は、上記の直列接続の場合の合成抵抗から、 $Z_1 = R + r$ である。ラダーが二段の場合の合成抵抗 Z_2 は、 $Z_2 = R + \frac{r(R+r)}{r+(R+r)}$ で



ある。

この作業を繰り返すと、 k 段接続した場合の合成抵抗 Z_k と $k + 1$ 段接続した場合の合成抵抗 Z_{k+1} の関係から、次のような漸化式がたつ。

$$Z_{k+1} = R + \frac{rZ_k}{r + Z_k} = \frac{(r + R)Z_k + rR}{Z_k + r} \quad (3)$$

この漸化式から、図のような R と r からなる k 段の抵抗ラダーの合成抵抗は、以下の式で表される。

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{\alpha\gamma^k - \beta}{\gamma^k - 1} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \left(R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right) \\ \beta &= \frac{1}{2} \left(R - \sqrt{R^2 + 4rR} \right) \\ \gamma &= \frac{R + r - \beta}{R + r - \alpha} \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式において、 $1 < \gamma$ であるため、接続する段数を増やし k が大きくなると、この抵抗値は次式の値 Z_∞ に収束する。

$$Z_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k \& = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta\gamma^{-k}}{1 - \gamma^{-k}} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \left(R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right) \quad (5)$$

また、式(3)から $k + 1$ 段の R-r ラダーの合成抵抗は、次式のように連分数で表示することができる。 m は整数である。

$$Z_{k+1} = \frac{R}{m} \left(k + \frac{1}{\frac{R}{mr} + \frac{R}{mZ_n}} \right) = \frac{R}{m} \left(m + \frac{1}{\frac{R}{mr} + \frac{1}{m + \frac{1}{\frac{R}{mr} + \frac{1}{\ddots}}}} \right) \quad (6)$$

次に図3のように、各段の抵抗の値が異なる抵抗ラダーを考える。抵抗ラダーの k 段目の抵抗値は、ある抵抗値 R に対して、 $p_k R$ と $q_k R$ として、 p_k と q_k によって重みづけられているとする。

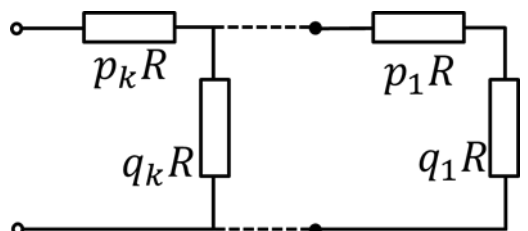


図 3 各段の抵抗の値が異なる抵抗ラダー

この時の k 段抵抗ラダーの合成抵抗は、次式であらわされ、 p_k と q_k を用いた連分数としてもあらわすことができる。

$$Z_k = p_k R + \frac{1}{\frac{1}{q_k R} + \frac{1}{Z_{k-1}}} = R \left(p_k + \frac{1}{\frac{1}{q_k} + \frac{1}{Z_{k-1}}} \right) = R \left(p_k + \frac{1}{\frac{1}{q_k} + \frac{1}{p_{k-1} + \frac{1}{\frac{1}{q_{k-1}} + \frac{1}{\ddots}}}} \right) \quad (7)$$

この(7)式から、任意の数について、その連分数表示に従って k 段目の抵抗の重み p_k と q_k を決定し、抵抗ラダーを構成することで、 R に対してその数の比を持つ抵抗を作ることができる。

3. 抵抗ラダーを用いた無理数（近似）信号の出力

連分数としてあらわされる無理数の例として、貴金属数と呼ばれる数字がある。貴金属数は二次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解であり、正の整数 n の値に対して順に、第 n 貴金属数と呼ばれる[2]。二次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解 λ_n とその連分数表示は次式のようにあらわすことができる。

$$\lambda_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (8)$$

しばしば、 $n = 1$ の場合を黄金数 ϕ 、 $n = 2$ の場合を白銀数 τ 、 $n = 3$ の場合を青銅数 ξ と呼ぶ[5]。 ϕ 、 τ 、 ξ それぞれの数値は、

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \\ \tau &= 1 + \sqrt{2} \approx 2.414 \\ \xi &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3.303 \end{aligned} \quad (9)$$

である。

貴金属数が(8)式のように連分数展開できることから、(6)式において m と $R/(mr)$ を正の整数 n とすることで、ラダーの合成抵抗が R に対して貴金属数の比になることが予想された。

例として、 $R \cdot R$ ラダーの合成抵抗の収束する値 $Z_{R,R}$ は、次式のように R に対して黄金数 ϕ の比になる。

$$Z_{R,R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} R \quad (10)$$

また、 $2R \cdot 0.5R$ ラダーの合成抵抗の収束する値 $Z_{2R,0.5R}$ は、次式のように R に対して白銀数 $\tau = 1 + \sqrt{2}$ の比になる。

$$Z_{2R,0.5R} = (1 + \sqrt{2})R = R \cdot \left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \right) \quad (11)$$

$\sqrt{2}$ は連分数として次式のようにもあらわすことができる。

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (12)$$

これは、白銀数 τ から1を減じたものが $\sqrt{2}$ であることによるものである。

このことを用いて、 $2R \cdot 0.5R$ ラダーの先頭の抵抗を $2R$ から R に変えた場合を考える。この抵抗ラダーの合成抵抗の収束する値は次式であらわされる。

$$Z_{\sqrt{2}} = R + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \cdot R = \sqrt{2}R \quad (13)$$

ネイピア数 e は、自然対数の対数の底であり、無理数である。ネイピア数 e は連分数として次式のようにあらわすことができる[3]。

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (14)$$

(14)式では省略したが、この連分数展開で分数部分の分子をすべて1とした場合の整数部分を並べて表示すると、以下のように規則性を持つ[3]。

$$e = 2.71828 \dots = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots] \quad (15)$$

この連分数展開を用いて、図3に示した各段の抵抗値が異なる抵抗ラダーにおいて、(7)式の p_k を連分数展開整数部分の奇数番目、 q_k を偶数番目の逆数とすることで、抵抗ラダーの合成抵抗の R に対する比は近似的にネイピア数 e になる。

円周率 π は、円の円周と直径の比であり、無理数である。円周率 π を連分数展開すると、その整数部分は規則性を持たない[3]。円周率 π を次式のように小数第五位までで近似すると、連分数として次式のようにあらわされる[3]。

$$\pi \approx 3.14159 = [3, 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4] \quad (16)$$

これを用いて、ネイピア数の場合と同様に抵抗を接続して抵抗ラダーの合成抵抗の R に対する比は、近似的に円周率 π になる。

4段のネイピア数近似ラダーと円周率近似ラダーの構成を、図4(a)と図4(b)にそれぞれ示す。

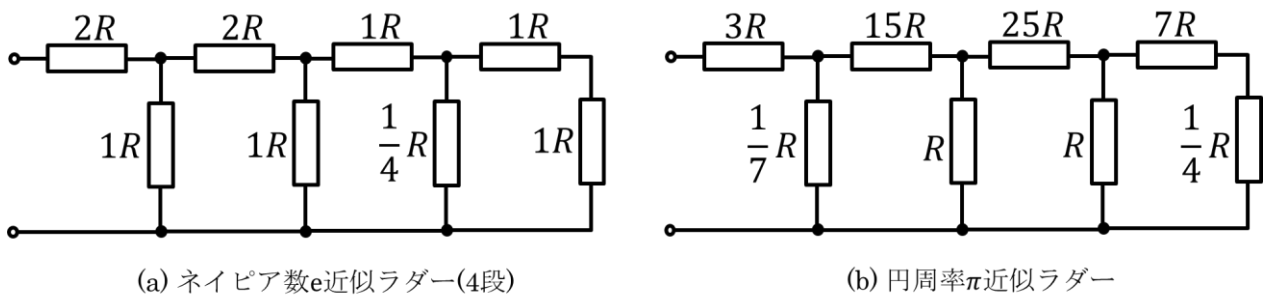


図4 ネイピア数ラダーと円周率ラダー

以上のようにして抵抗ラダーを構成し、その合成抵抗が設計した通りの値を持つことが回路シミュレータ LTspice を用いたシミュレーションからも確認できた。

謝辞： 有意義なコメントをいただきました田部井勝稲先生に感謝します。

参考資料

[1] 小川東, 佐藤健一, 竹之内, 森本光生, 「建部賢弘の数学」 共立出版 (2008)
 [2] 岩本誠一, 江口将生, 吉良知文, 「黄金・白銀・青銅：数と比と形と率と」 (2008)
https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac_download_md/15758/KJ00005471244.pdf
 [3] 芹沢正三, 数論入門、講談社ブルーバックス (2008)



関連ウェブサイト

<https://eetimes.jp/ee/articles/1412/10/news069.html>

https://news.mynavi.jp/article/20150114-analog_guru_2nd/