第14回　全国和算研究大会　2018年8月26日

# 孫子算経(剰余系)の電子回路設計への応用

阿部優大　片山翔吾　李 从兵　小林春夫

群馬大学　理工学部　電子情報理工学科

Kobayashi Lab.
Gunma University



## アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ



## アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ



## 研究目的・目標

研究目標：高周波信号の簡易な周波数推定回路の実現

取扱い難　　複数低周波サンプリング回路

高い周波数でサンプリング
スペクトルの折り返し: 発生しない
高周波サンプリング回路実現 : 難

剰余系を利用

複数の低周波数サンプリング回路

スペクトルの折り返しから周波数推定

# アウトライン

- 研究目的・目標
- <u>中国の剰余定理</u>
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ



# 中国の剰余定理

- 中国の算術書『孫子算経』

「3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると2余る数は何か」

一般化

<u>中国の剰余定理</u>

答え 23

孫子算経

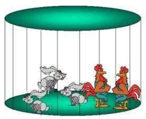


# 孫子算経

- 「3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると2余る数は何か」　答え 23

  ➡ 一般化したのが「中国人の剰余定理」。

- 鶏兎同籠（けいとどうりゅう）



「キジとウサギが同じ篭（かご）。 頭が35個 足は94本。キジ、ウサギはそれぞれいくらか。

➡ 日本に入ってきて「鶴亀算」となる



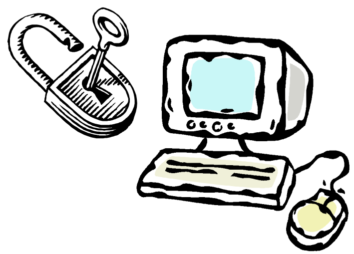
# 中国の剰余定理の集積回路への応用

✓ 江戸時代、「百五減算」として伝来

✓ 現在、情報セキュリティの暗号化に応用

古典数学によるイノベーション

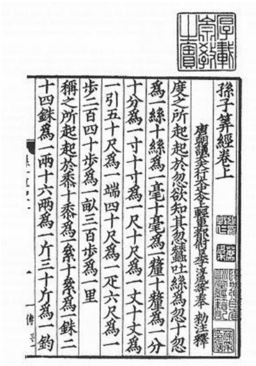
<u>集積回路に応用</u>



関孝和

# 剰余系の例

基数　2, 3, 5　互いに素
N=2x3x5 = 30
0からN-1(=29) までの整数の一つを k
a:　kを2 で割った余り　　a= mod2 (k)
b:　k を3で割った余り　　b= mod3(k)
c:　k を5 で割った余り　　c= mod5(k)



k と　(a, b, c) の組は1対1に対応する。
k を　(a, b, c) で表現　➡　剰余表現

中国人の剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)
(a, b, c) から　k を求めるアルゴリズム



# 剰余定理の例

基数 2, 3, 5 互いに素
N=2x3x5 = 30
0からN-1(=29) までの整数の一つを k
a: kを2 で割った余り　　a= mod2 (k)
b: k を3で割った余り　　b= mod3(k)
c: k を5 で割った余り　　c= mod5(k)

k と (a, b, c) の組は1対1に対応する。
k を (a, b, c) で表現 ➡ 剰余表現

| a | b | c | k |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 3 | 3 |
| 0 | 1 | 4 | 4 |
| 1 | 2 | 0 | 5 |
| 0 | 0 | 1 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 7 |
| 0 | 2 | 3 | 8 |
| 1 | 0 | 4 | 9 |
| 0 | 1 | 0 | 10 |
| 1 | 2 | 1 | 11 |
| 0 | 0 | 2 | 12 |
| 1 | 1 | 3 | 13 |
| 0 | 2 | 4 | 14 |

| a | b | c | k |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 15 |
| 0 | 1 | 1 | 16 |
| 1 | 2 | 2 | 17 |
| 0 | 0 | 3 | 18 |
| 1 | 1 | 4 | 19 |
| 0 | 2 | 0 | 20 |
| 1 | 0 | 1 | 21 |
| 0 | 1 | 2 | 22 |
| 1 | 2 | 3 | 23 |
| 0 | 0 | 4 | 24 |
| 1 | 1 | 0 | 25 |
| 0 | 2 | 1 | 26 |
| 1 | 0 | 2 | 27 |
| 0 | 1 | 3 | 28 |
| 1 | 2 | 4 | 29 |

剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)
(a, b, c) から k を求めるアルゴリズム

剰余定理は、
この問題を他の整数についても適用できるように一般化したもの。

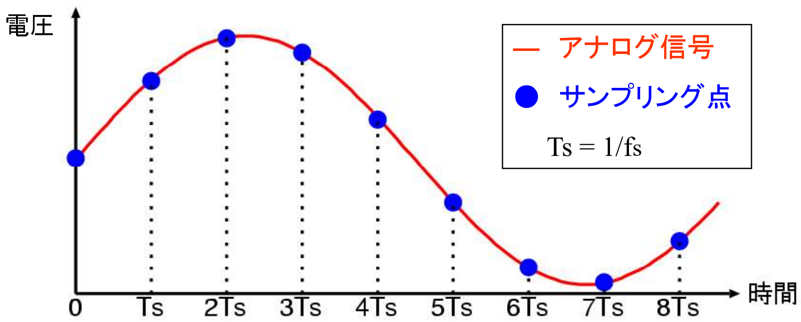


# アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- <u>波形のサンプリング</u>
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

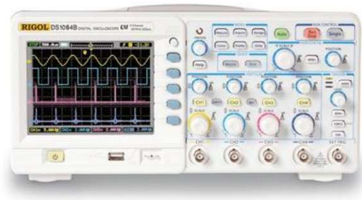


# 波形のサンプリング



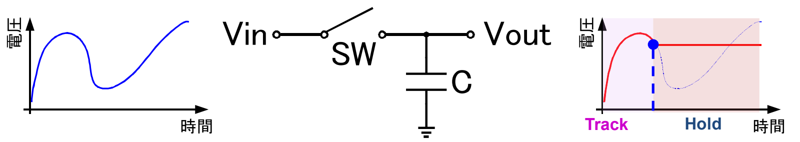

一定時間間隔のデータを取り、間のデータは捨ててしまう。

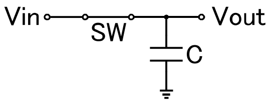
デジタルオシロスコープ等での
波形の電子計測に
波形サンプリング技術は用いられる



# サンプリング回路の構成と動作

- 基本構成：スイッチと容量

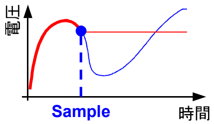


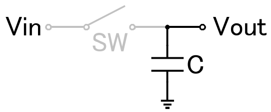




•スイッチSWがONの時

•Vout(t) = Vin(t)

**Track動作**

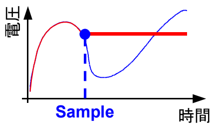



•スイッチSWがOFFの時

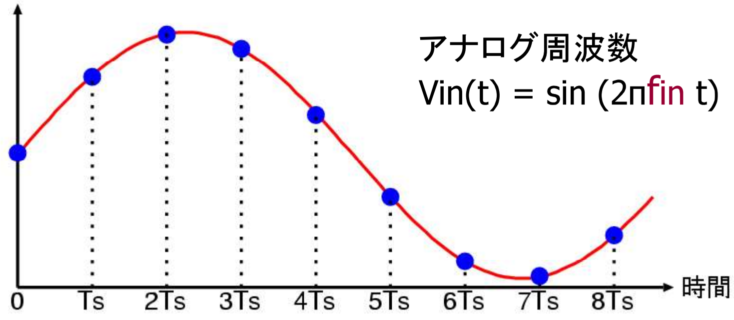
•Vout(t) = Vin($t_{OFF}$)

**Hold動作**






# サンプリング定理




サンプリング周波数 fs = 1/Ts

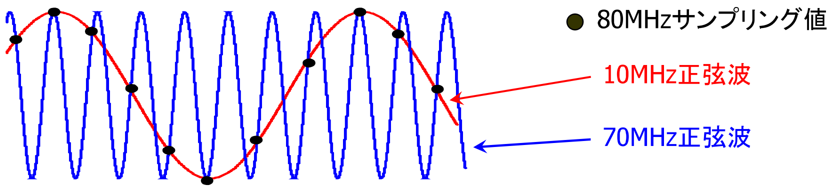
fs > 2 fin ならば サンプリングされたデータ(●)から
アナログデータ(——)が復元できる。

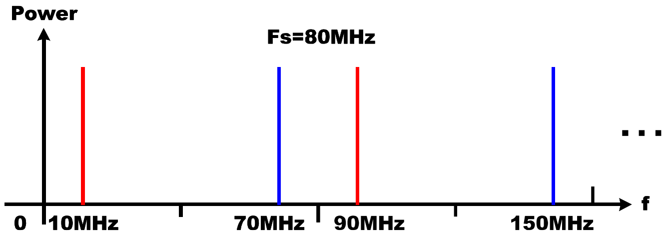
信号に含まれる最大周波数fin の2倍より大きな周波数fs
でサンプリングする.



# サンプリングと折り返し(aliasing)

80MHzでサンプリングを行うと10MHzと70MHzは区別できない

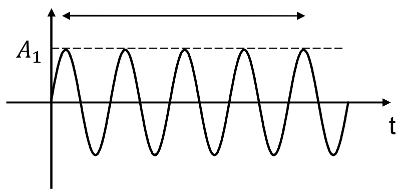


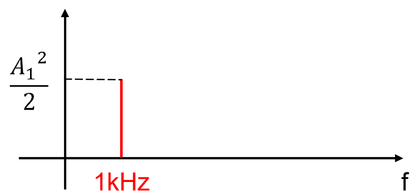





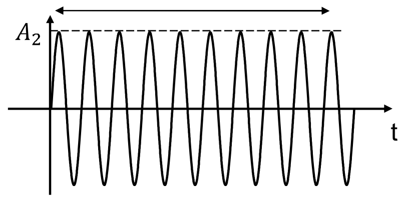

# 周波数領域でのスペクトル

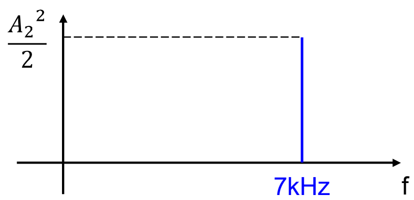
1kHz正弦波は
1秒間に山が1000個



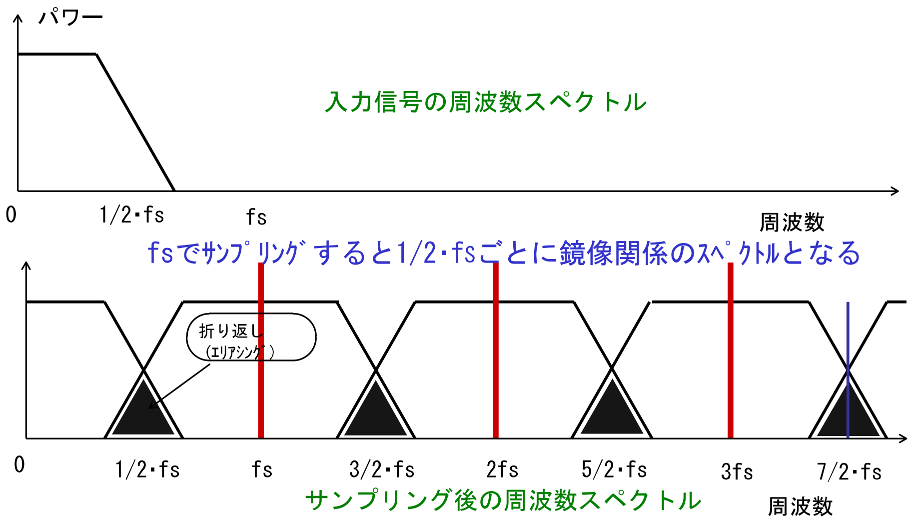




7kHz正弦波は
1秒間に山が7000個



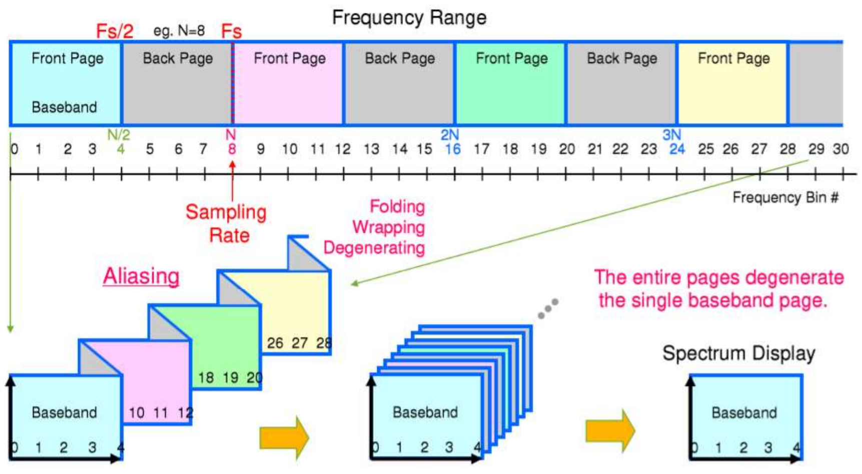



# サンプリングと周波数スペクトル





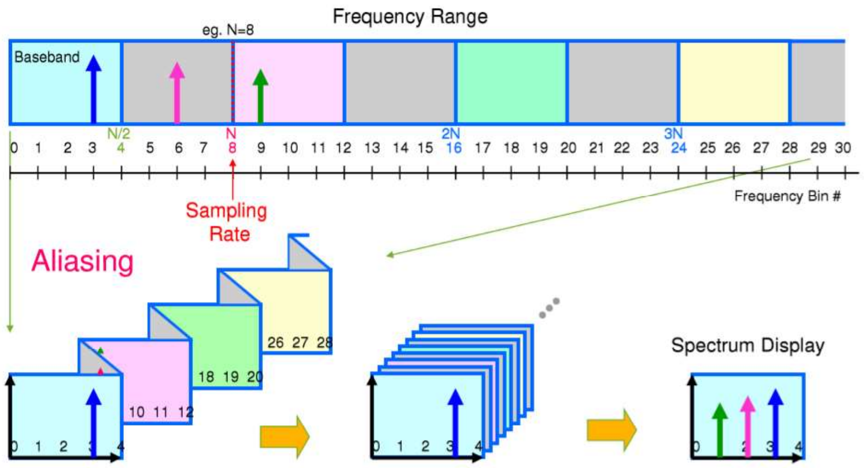

# サンプリング周波数と周波数領域




大河原秀雄氏　作成図



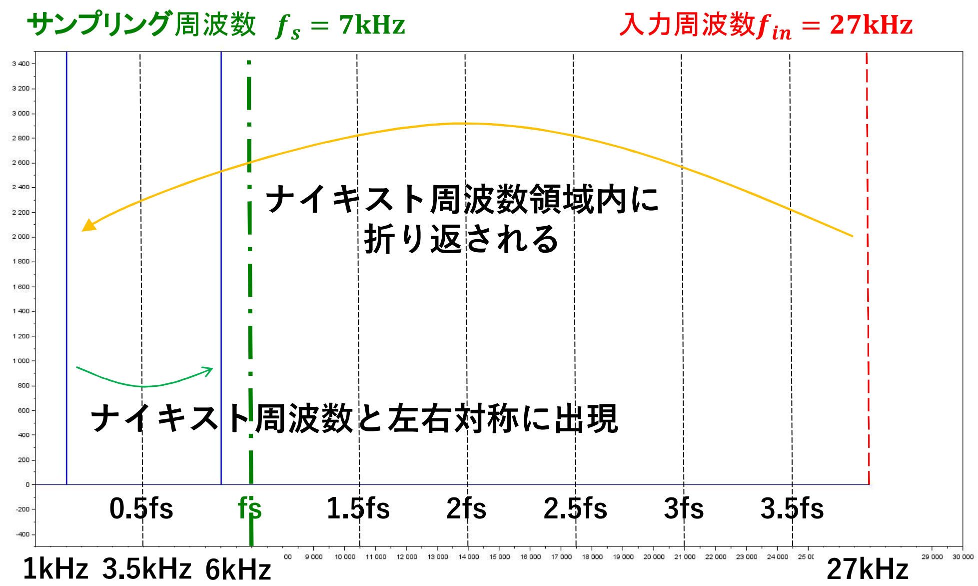
# 波形サンプリングによるスペクトル折り返し




大河原秀雄氏　作成図



# サンプリング定理を満たさないときのスペクトル




ナイキスト周波数：サンプリング周波数の1/2の周波数

# アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- <u>ヒルベルト・フィルタ</u>
- 提案する周波数推定回路
- まとめ



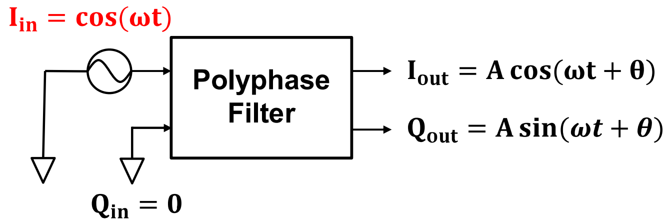
# ヒルベルト・フィルタ

RC ポリフェーズフィルタ

↓

アナログ・ヒルベルト・フィルタ

David Hilbert
独 数学者
1862-1943




単一cos波入力信号から
位相が90°異なったcos波, sin波を生成

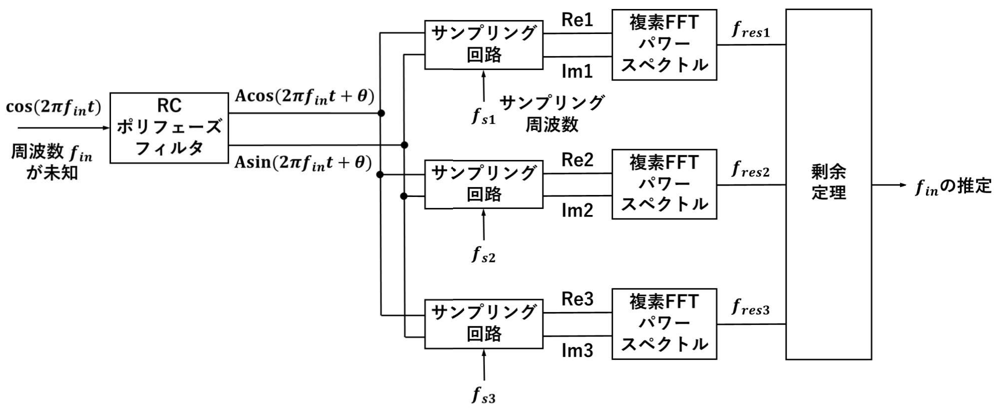


# アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- <u>提案する周波数推定回路</u>
- まとめ

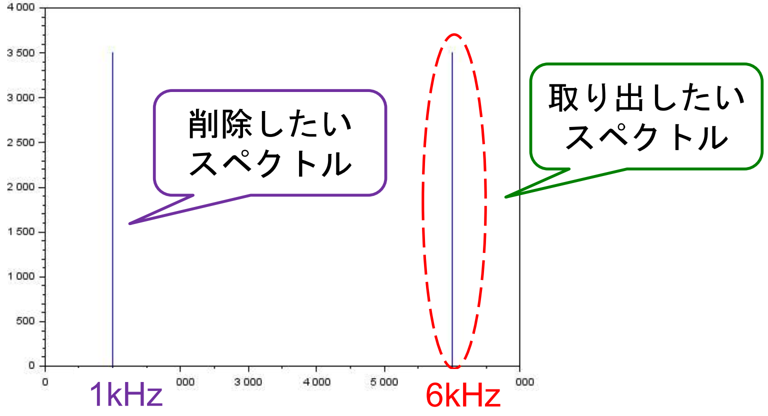


# 提案する周波数推定回路のブロック図



# 折り返しによるスペクトル

$f_s = 7\text{kHz},\ f_{in} = 27\text{kHz}$

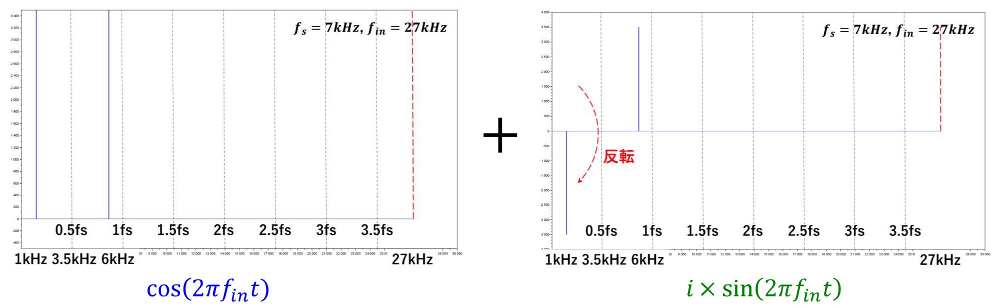



27を7で割った余り：6

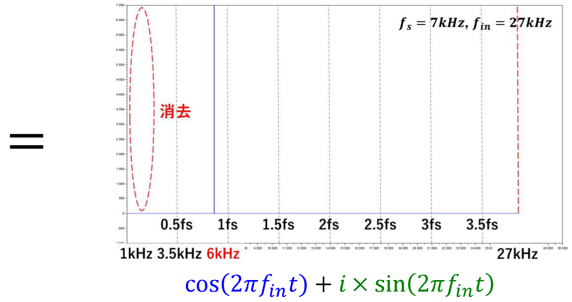
ヒルベルト・フィルタによって生成した
cos波,sin波を用いて削除する



# スペクトルの消去



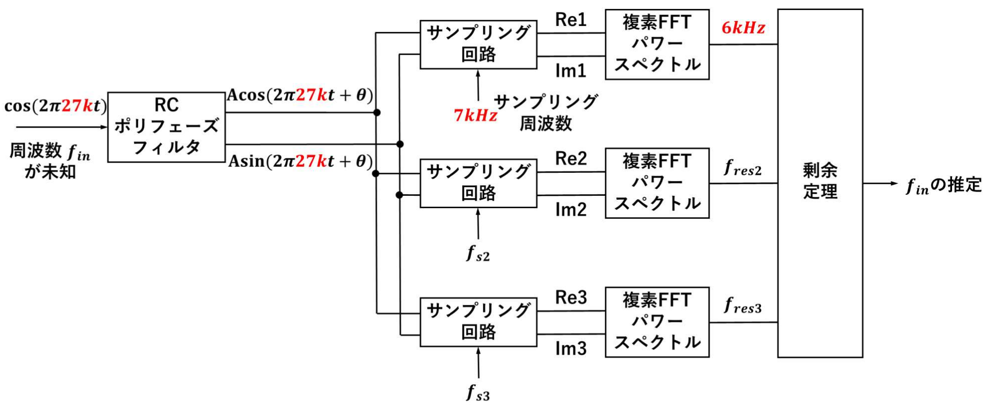

$i$：虚数単位




入力周波数 27kHz
に対する
サンプリング周波数 7kHz
の
剰余周波数 6kHz
を得る



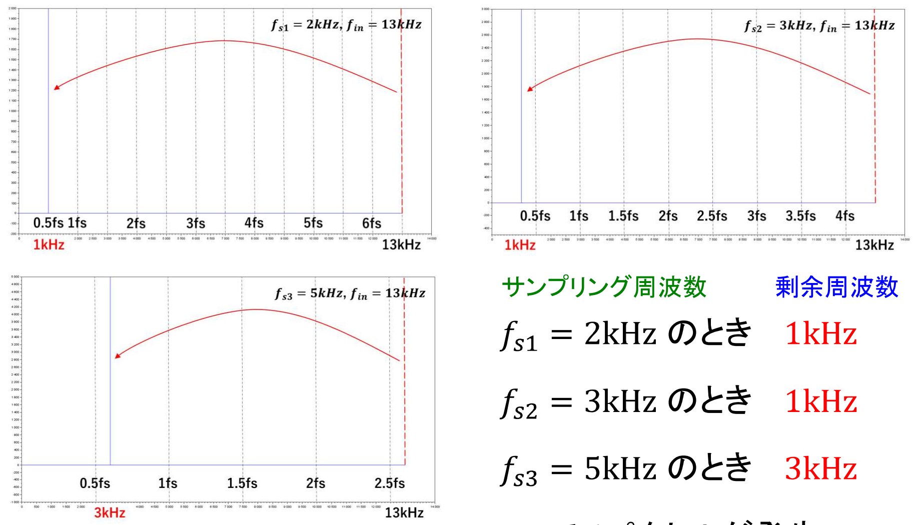
# 剰余周波数の一つを決定






# 様々なサンプリング周波数による剰余周波数

入力周波数 $f_{in} = 13\text{kHz}$, 互いに素のサンプリング周波数

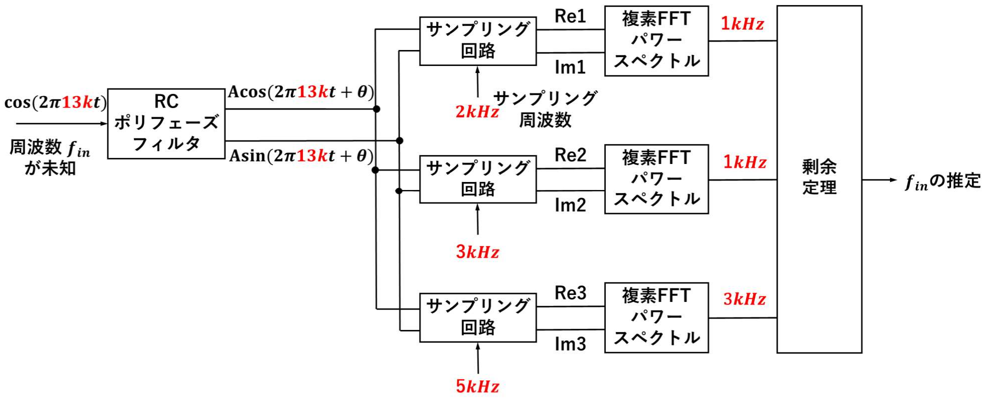


| サンプリング周波数 | 剰余周波数 |
|---|---|
| $f_{s1} = 2\text{kHz}$ のとき | 1kHz |
| $f_{s2} = 3\text{kHz}$ のとき | 1kHz |
| $f_{s3} = 5\text{kHz}$ のとき | 3kHz |

でスペクトルが発生

# 剰余周波数の決定






# 高周波入力周波数の推定



$f_{in}$ = 13kHz のとき

$m_1$ = 1kHz
$m_2$ = 1kHz
$m_3$ = 3kHz

$f_{in}$ = 13kHz
と推定できる

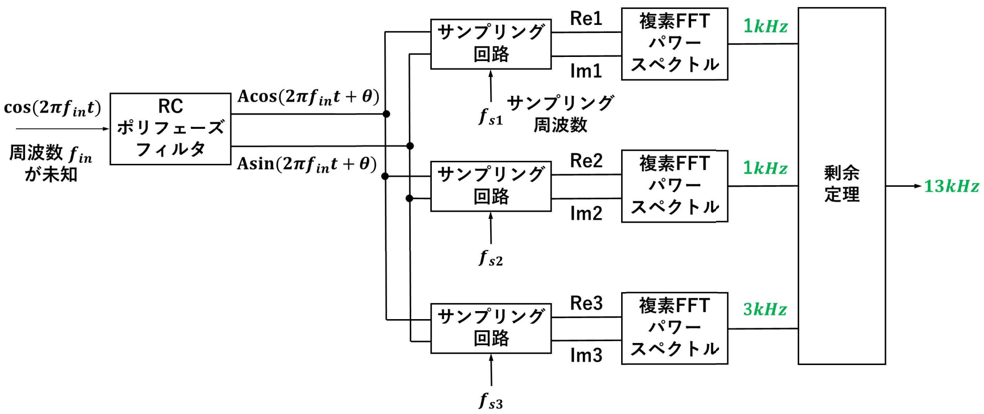
| $f_{s1}$ a | $f_{s2}$ b | $f_{s3}$ c | $f_{in}$ k |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 3 | 3 |
| 0 | 1 | 4 | 4 |
| 1 | 2 | 0 | 5 |
| 0 | 0 | 1 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 7 |
| 0 | 2 | 3 | 8 |
| 1 | 0 | 4 | 9 |
| 0 | 1 | 0 | 10 |
| 1 | 2 | 1 | 11 |
| 0 | 0 | 2 | 12 |
| 1 | 1 | 3 | 13 |
| 0 | 2 | 4 | 14 |

| $f_{s1}$ a | $f_{s2}$ b | $f_{s3}$ c | $f_{in}$ k |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 15 |
| 0 | 1 | 1 | 16 |
| 1 | 2 | 2 | 17 |
| 0 | 0 | 3 | 18 |
| 1 | 1 | 4 | 19 |
| 0 | 2 | 0 | 20 |
| 1 | 0 | 1 | 21 |
| 0 | 1 | 2 | 22 |
| 1 | 2 | 3 | 23 |
| 0 | 0 | 4 | 24 |
| 1 | 1 | 0 | 25 |
| 0 | 2 | 1 | 26 |
| 1 | 0 | 2 | 27 |
| 0 | 1 | 3 | 28 |
| 1 | 2 | 4 | 29 |

入力周波数 $f_{in}$ = 0, 1 kHz, …~29 kHz を全て
提案原理で周波数推定できることを確認した

# 剰余周波数から入力周波数の推定






# 提案手法の周波数測定範囲



サンプリング周波数により決定

$f_{s1} = 1009,\ f_{s2} = 1013,\ f_{s3} = 1019$ (互いに素) の場合

$1009 \times 1013 \times 1019 = 1,041,537,223$

∴ 0 − 1,041,537,222Hz まで測定可能 (1Hz刻み)

約**1kHz**の複数サンプリング周波数から
**1GHz**の周波数が推定可

# 提案手法の欠点

| a | b | c | k |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 3 | 3 |
| 0 | 1 | 4 | 4 |
| 1 | 2 | 0 | 5 |
| 0 | 0 | 1 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 7 |
| 0 | 2 | 3 | 8 |
| 1 | 0 | 4 | 9 |
| 0 | 1 | 0 | 10 |
| 1 | 2 | 1 | 11 |
| 0 | 0 | 2 | 12 |
| 1 | 1 | 3 | 13 |
| 0 | 2 | 4 | 14 |

| a | b | c | k |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 15 |
| 0 | 1 | 1 | 16 |
| 1 | 2 | 2 | 17 |
| 0 | 0 | 3 | 18 |
| 1 | 1 | 4 | 19 |
| 0 | 2 | 0 | 20 |
| 1 | 0 | 1 | 21 |
| 0 | 1 | 2 | 22 |
| 1 | 2 | 3 | 23 |
| 0 | 0 | 4 | 24 |
| 1 | 1 | 0 | 25 |
| 0 | 2 | 1 | 26 |
| 1 | 0 | 2 | 27 |
| 0 | 1 | 3 | 28 |
| 1 | 2 | 4 | 29 |

m1, m2, m3 に測定誤差が生じた場合
推定周波数 k は全く異なる値となる



# アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ



# まとめ

- 剰余定理を用いることで
  複数の低い周波数のサンプリングから
  高周波信号の周波数を推定する方式を考案し
  理論・シミュレーションにて確認

  回路実現が容易

- 入力周波数の推定範囲は,
  複数のサンプリング周波数の積

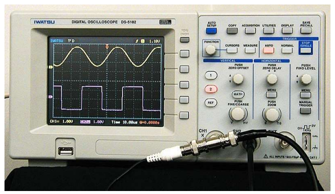
- 制限
  ① 推定可能な入力周波数は離散値のみ
  ② 剰余周波数に誤差があると測定誤差大



# 最後に

温故知新

古典数学は先端電子計測技術に
貢献できる



# 発表内容の新規性

- 高周波信号の周波数を複数の低周波数サンプリング結果から推定・測定する
  先行研究あり. 例えば 下記.

Xiaowei Li, Hong Liang, and Xiang-Gen Xia,
“A Robust Chinese Remainder Theorem With Its Applications in Frequency Estimation
From Undersampled Waveforms”,
IEEE Trans. Signal Processing, vol. 57, no.11 (Nov. 2009).

- ここでの発表の新規性は、内部にアナログ・ヒルベルトフィルタ (RC ポリフェーズフィルタ)
を併用したこと. RCポリフェーズフィルタのヒルベルトフィルタとの関係性は下記.

Yoshiro Tamura, Ryo Sekiyama, Koji Asami, Haruo Kobayashi,
"RC Polyphase Filter As Complex Analog Hilbert Filter",
IEEE 13th International Conference on Solid-State and Integrated Circuit Technology, Hangzhou (Oct. 2016).

http://kobaweb.ei.st.gunma-u.ac.jp/news/pdf/2016/ICSICTpresentation1021.pdf
http://ieeexplore.ieee.org/document/7999091/
http://kobaweb.ei.st.gunma-u.ac.jp/lecture/WE2B-1.pdf



# Q&A

Q1. 除数の1つを10倍することで少数でも表せるのでは？

Q2. 他の周波数推定回路と比べてどのような点が利点となるか？

Q3. どのくらいの頻度で誤差が生じるか？

Q4. どのようなアプリケーションに応用できるか？