

# 高周波動作 (小信号モデル)

群馬大学  
松田順一

# 概要

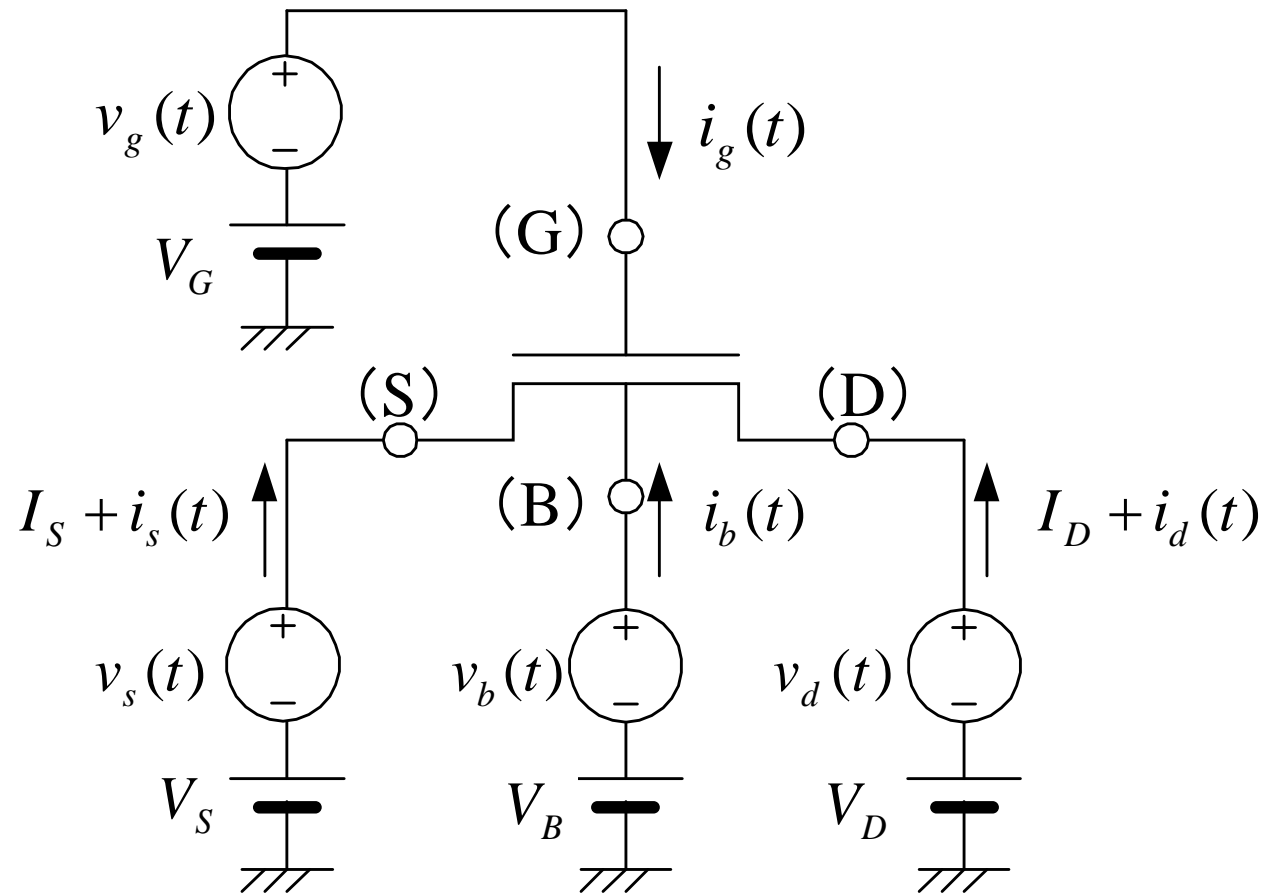
- **完全QSモデル**
  - 等価回路の導出
  - 容量評価
- **$y$ -パラメータモデル**
- **NQS (Non-Quasi-Static) モデル**
  - NQSモデルの導出
  - NQS(高周波用)等価回路
- **RFアプリケーションへの考察**

(注)以下の本を参考に、本資料を作成。

(1) Yannis Tsididis, Operation and Modeling of the MOS Transistor Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1999.

(2) Yannis Tsididis and Colin McAndrew, Operation and Modeling of the MOS Transistor Third Edition, Oxford University Press, New York, 2011.

# 印加電圧の定義 (バイアス[dc]と小信号の電圧/電流成分)



# 小信号チャージング電流

## 小信号チャージング電流の表現

$$i_{da}(t) = +C_{dd} \frac{dv_d}{dt} - C_{dg} \frac{dv_g}{dt} - C_{db} \frac{dv_b}{dt} - C_{ds} \frac{dv_s}{dt}$$

$$i_g(t) = -C_{gd} \frac{dv_d}{dt} + C_{gg} \frac{dv_g}{dt} - C_{gb} \frac{dv_b}{dt} - C_{gs} \frac{dv_s}{dt}$$

$$i_b(t) = -C_{bd} \frac{dv_d}{dt} - C_{bg} \frac{dv_g}{dt} + C_{bb} \frac{dv_b}{dt} - C_{bs} \frac{dv_s}{dt}$$

$$i_{sa}(t) = -C_{sd} \frac{dv_d}{dt} - C_{sg} \frac{dv_g}{dt} - C_{sb} \frac{dv_b}{dt} + C_{ss} \frac{dv_s}{dt}$$

## 動作点での容量

$$C_{kk} = + \left. \frac{\partial q_K}{\partial v_K} \right|_o, \quad C_{kl} = - \left. \frac{\partial q_K}{\partial v_l} \right|_o$$

$l \neq k$ , 一般に、 $C_{kl} \neq C_{lk}$

# 容量の関係式(1)

$v_d(t) = v_g(t) = v_b(t) = v_s(t) = v(t)$ とすると、

$$i_{da}(t) = (C_{dd} - C_{dg} - C_{db} - C_{ds}) \frac{dv}{dt}$$

となり、 $i_{da}(t) = 0$ であるから、

$$C_{dd} - C_{dg} - C_{db} - C_{ds} = 0$$

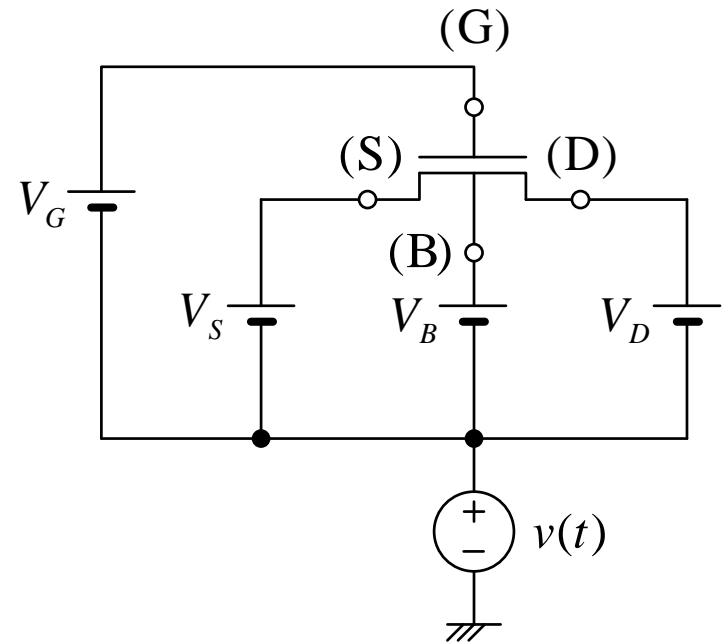
となる。また、 $dv_g/dt = dv_b/dt = dv_s/dt = 0$

とし、 $i_{da}(t) + i_g(t) + i_b(t) + i_{sa}(t) = 0$ を使うと、

$$(C_{dd} - C_{gd} - C_{bd} - C_{sd}) \frac{dv_d}{dt} = 0$$

となる。これから、以下を得る。

$$C_{dd} - C_{gd} - C_{bd} - C_{sd} = 0$$



# 容量の関係式(2)

容量の関係をまとめると、以下を得る。

$$C_{dd} = C_{dg} + C_{db} + C_{ds} = C_{gd} + C_{bd} + C_{sd}$$

$$C_{gg} = C_{gd} + C_{gb} + C_{gs} = C_{dg} + C_{bg} + C_{sg}$$

$$C_{bb} = C_{bd} + C_{bg} + C_{bs} = C_{db} + C_{gb} + C_{sb}$$

$$C_{ss} = C_{sd} + C_{sg} + C_{sb} = C_{ds} + C_{gs} + C_{bs}$$

また、 $i_{da}(t)$ に関し以下を得る。

$$\begin{aligned} i_{da}(t) &= +C_{dd} \frac{dv_{ds}}{dt} - C_{dg} \frac{dv_{gs}}{dt} - C_{db} \frac{dv_{bs}}{dt} + (C_{dd} - C_{dg} - C_{db} - C_{ds}) \frac{dv_s}{dt} \\ &= +C_{dd} \frac{dv_{ds}}{dt} - C_{dg} \frac{dv_{gs}}{dt} - C_{db} \frac{dv_{bs}}{dt} \end{aligned}$$

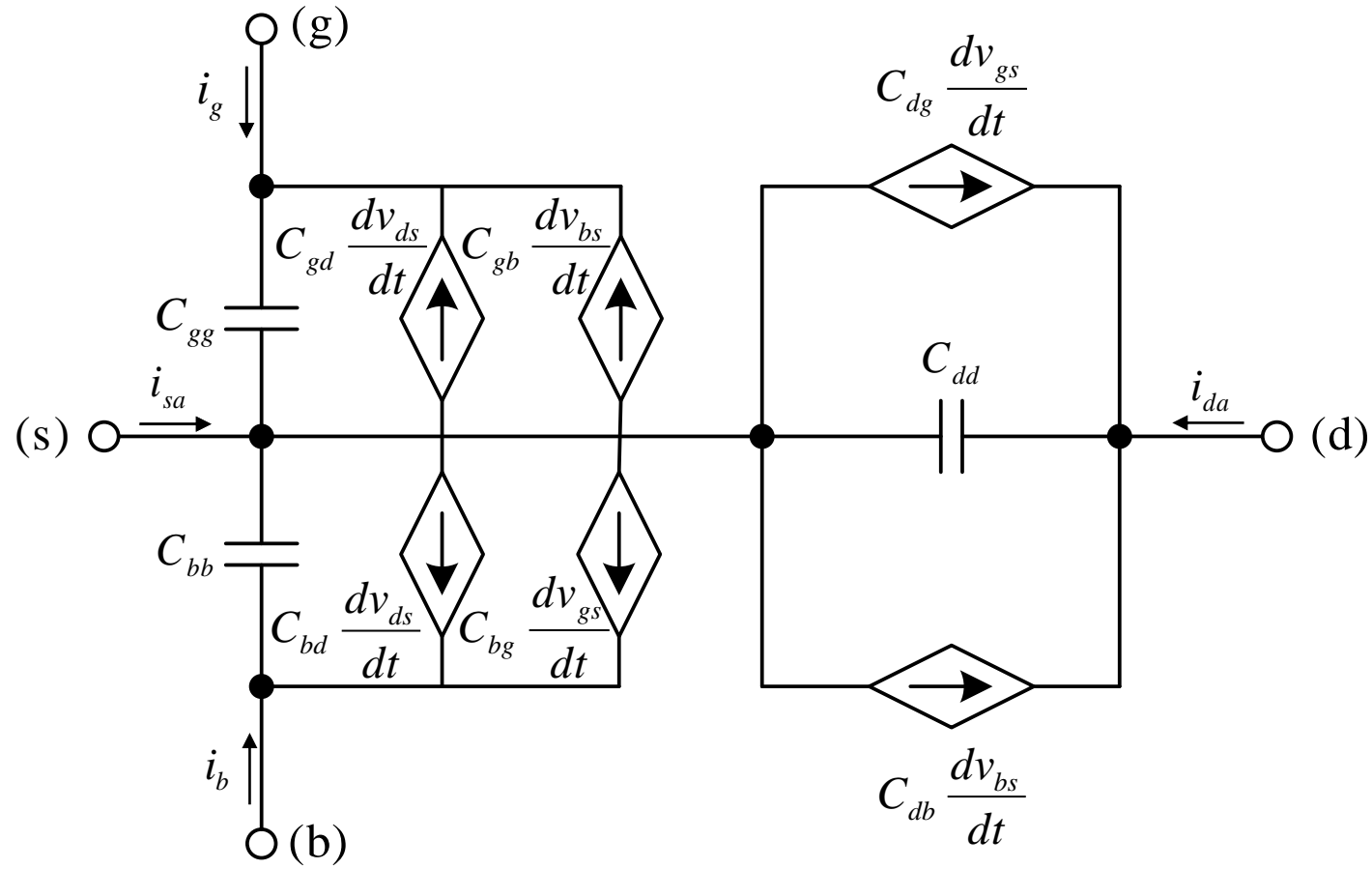
同様に以下を得る。

$$i_g(t) = -C_{gd} \frac{dv_{ds}}{dt} + C_{gg} \frac{dv_{gs}}{dt} - C_{gb} \frac{dv_{bs}}{dt}$$

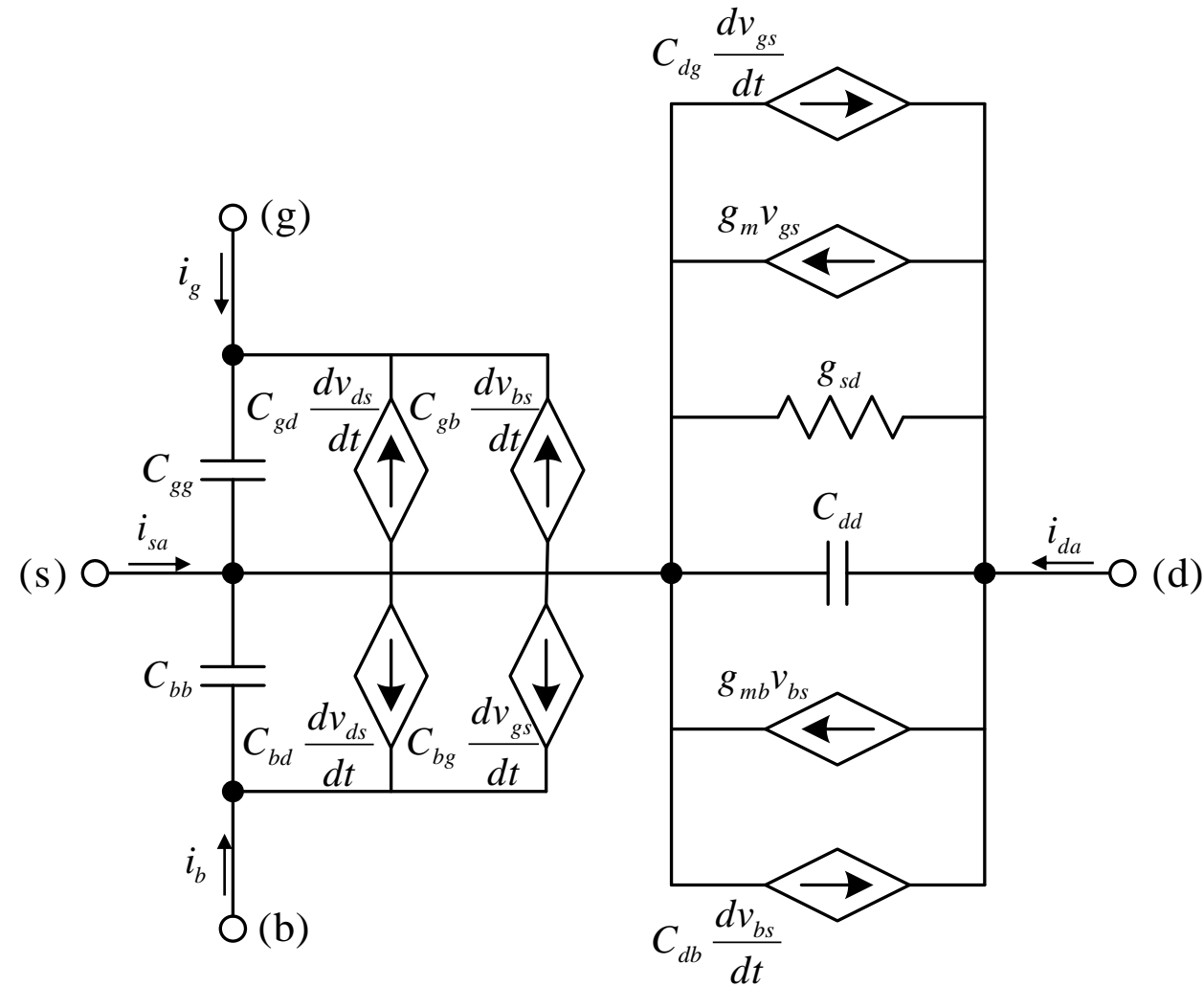
$$i_b(t) = -C_{bd} \frac{dv_{ds}}{dt} - C_{bg} \frac{dv_{gs}}{dt} + C_{bb} \frac{dv_{bs}}{dt}$$

$$\begin{aligned} v_d &= v_{ds} + v_s \\ v_g &= v_{gs} + v_s \\ v_b &= v_{bs} + v_s \end{aligned}$$

# 小信号等価回路(チャージング電流)



# 小信号等価回路(チャージング+輸送電流)





# 小信号等価回路(変形)

$$v_{ds} = v_{dg} + v_{gs} = -v_{gd} + v_{gs}$$

$$v_{bs} = v_{bg} + v_{gs} = -v_{gb} + v_{gs}$$

$$\begin{aligned} i_g(t) &= -C_{gd} \left( -\frac{dv_{gd}}{dt} + \frac{dv_{gs}}{dt} \right) + C_{gg} \frac{dv_{gs}}{dt} - C_{gb} \left( -\frac{dv_{gb}}{dt} + \frac{dv_{gs}}{dt} \right) \\ &= C_{gd} \frac{dv_{gd}}{dt} + C_{gb} \frac{dv_{gb}}{dt} + (C_{gg} - C_{gd} - C_{gb}) \frac{dv_{gs}}{dt} \\ &= C_{gd} \frac{dv_{gd}}{dt} + C_{gb} \frac{dv_{gb}}{dt} + C_{gs} \frac{dv_{gs}}{dt} \end{aligned}$$

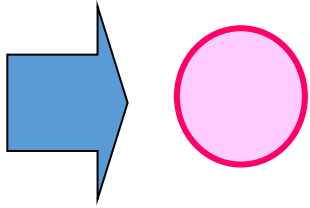
同様に、以下を得る。

$$\begin{aligned} i_{da}(t) &= C_{gd} \frac{dv_{dg}}{dt} + C_{sd} \frac{dv_{ds}}{dt} + C_{bd} \frac{dv_{db}}{dt} - C_m \frac{dv_{gs}}{dt} - C_{mb} \frac{dv_{bs}}{dt} \\ i_b(t) &= C_{bd} \frac{dv_{bd}}{dt} + C_{gb} \frac{dv_{bg}}{dt} - C_{mx} \frac{dv_{gb}}{dt} + C_{bs} \frac{dv_{bs}}{dt} \end{aligned}$$

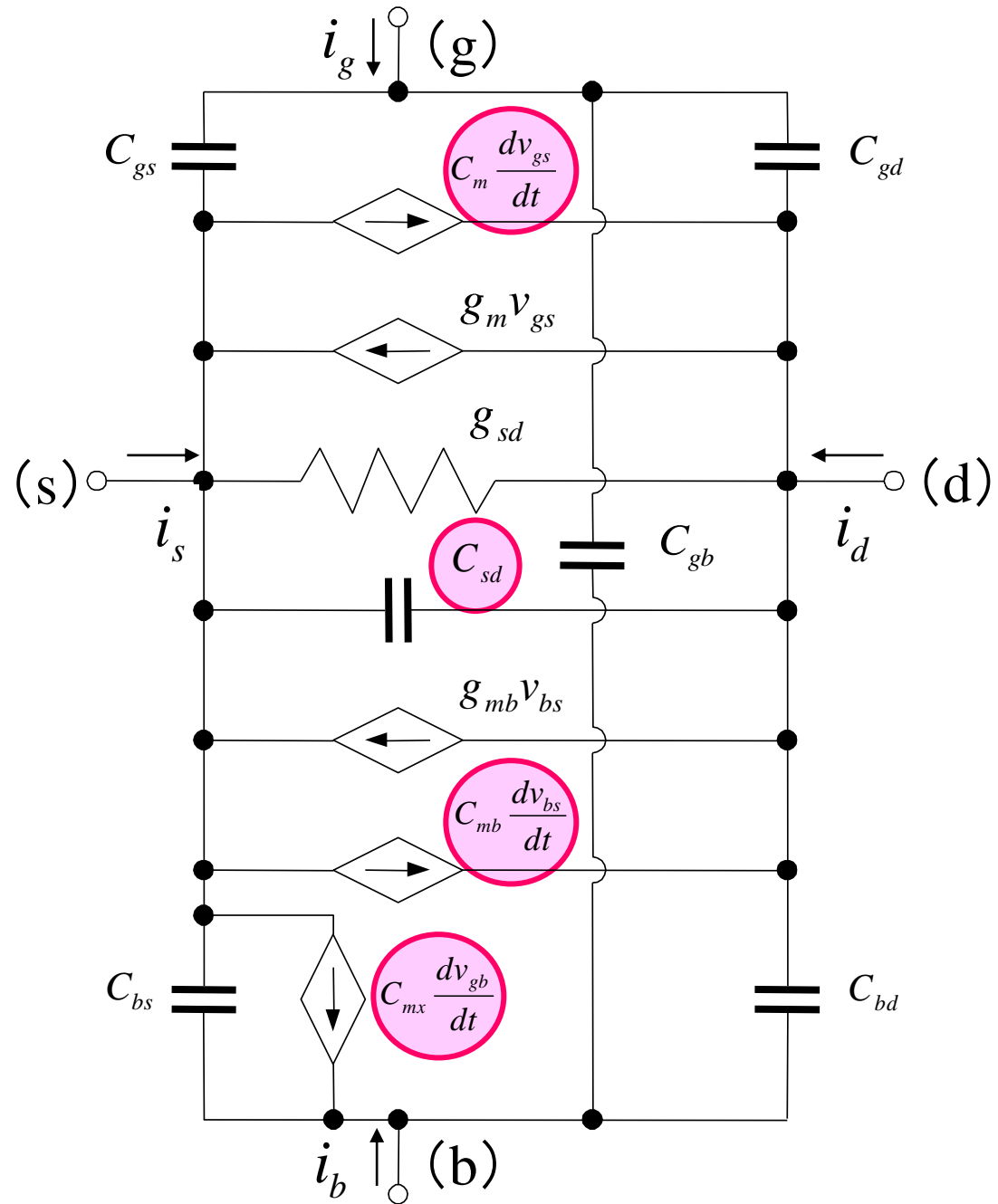
$$\begin{aligned} C_m &= C_{dg} - C_{gd} \\ C_{mb} &= C_{db} - C_{bd} \\ C_{mx} &= C_{bg} - C_{gb} \end{aligned}$$

# 完全QS小信号 等価回路

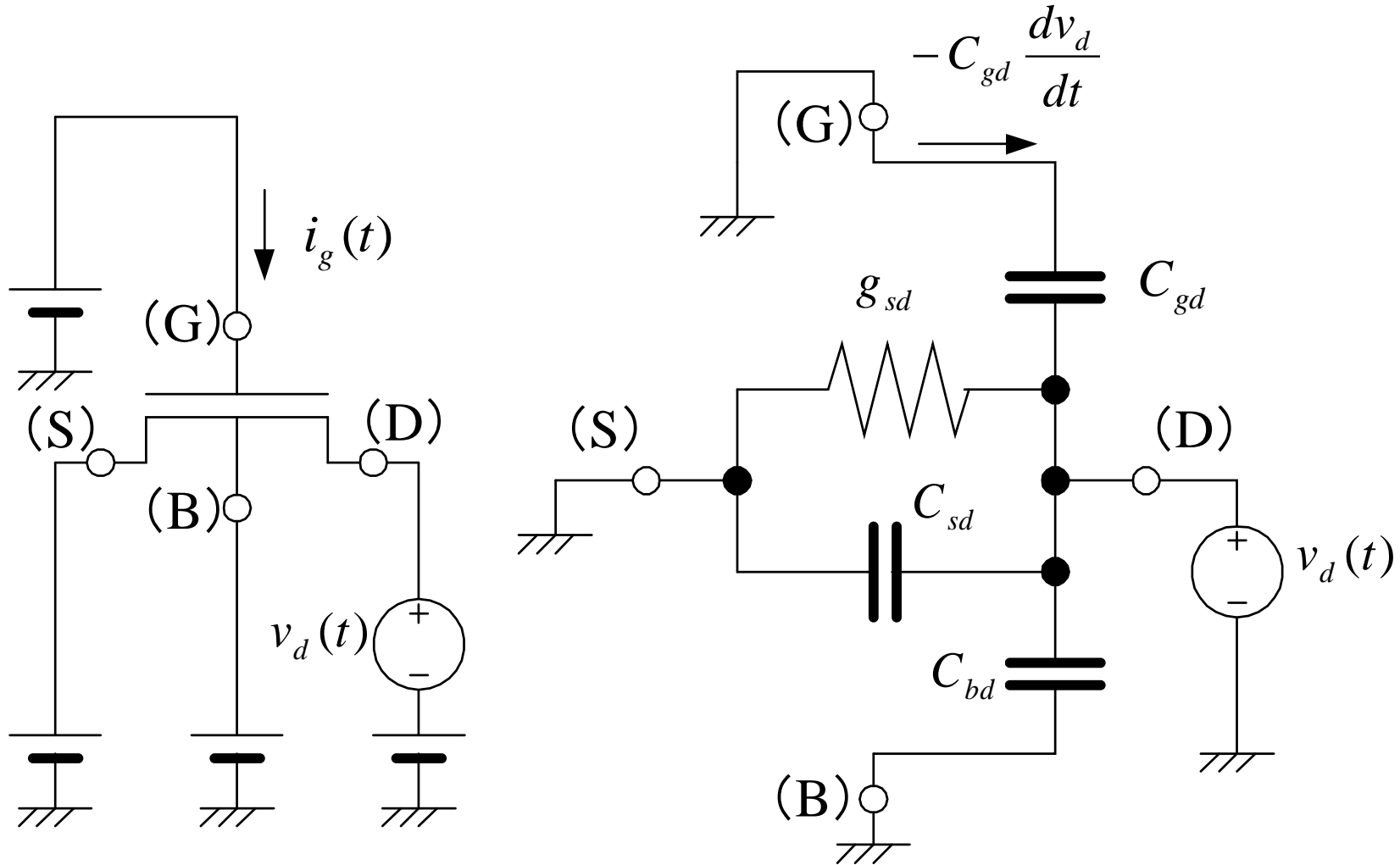
簡易版から追加



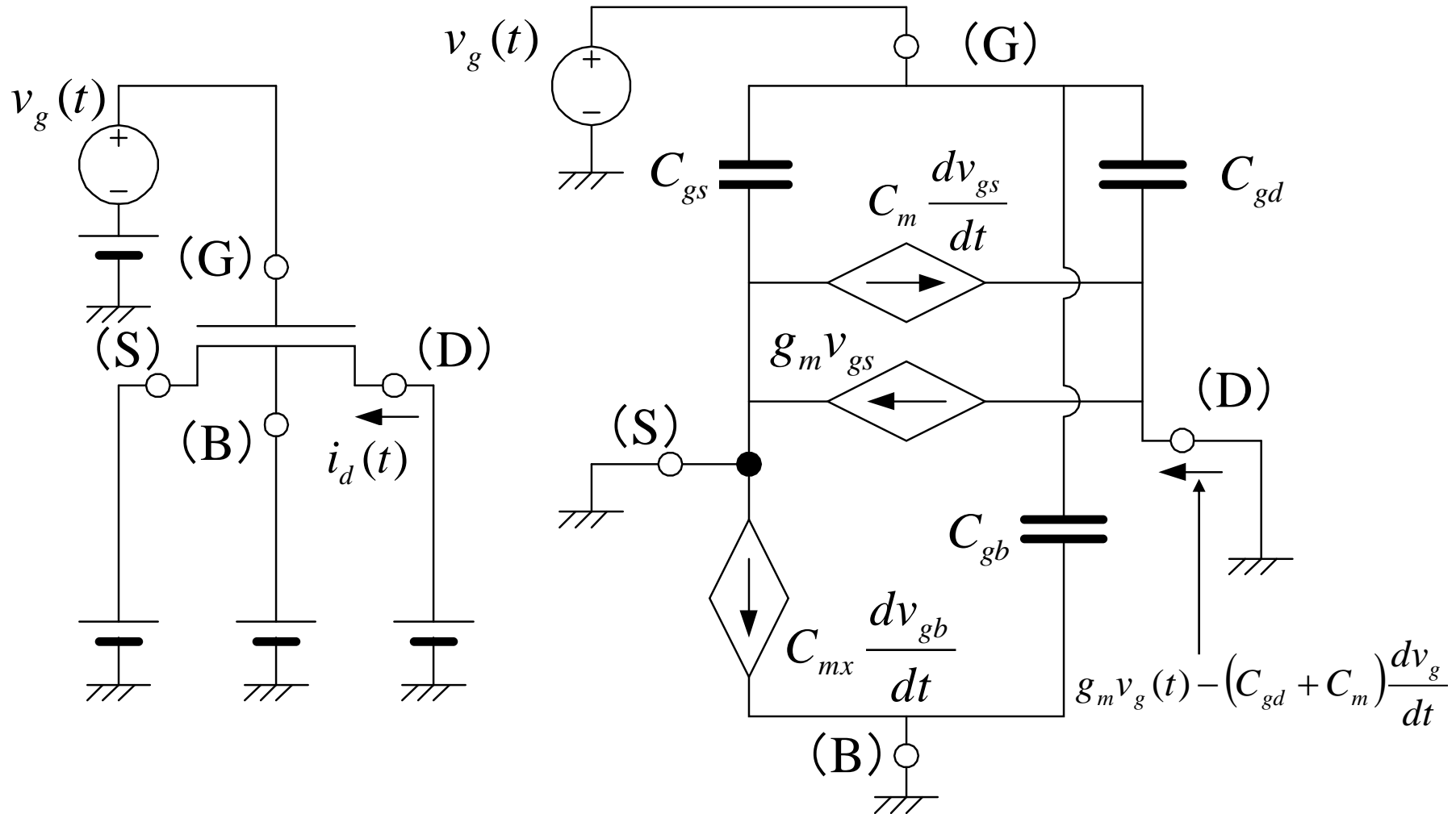
$$\left\{ \begin{array}{l} C_m = C_{dg} - C_{gd} \\ C_{mb} = C_{db} - C_{bd} \\ C_{mx} = C_{bg} - C_{gb} \end{array} \right.$$



# ドレインへの小信号印加等価回路



# ゲートへの小信号印加等価回路



# 容量の評価(1)

$C_{dg}$ と $C_{db}$ の導出

仮定

$$\alpha \Rightarrow \alpha_1 = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}} = 1 + \frac{dV_T}{dV_{SB}}$$

$\alpha_1$ の $V_S$ と $V_B$ の微分は無視 ( $\alpha_1$ : 定数):

( $V_{SB}$ が大きく $V_{DS}$ が小さい場合、近似が良い。)

$$q_D = Q_D = -WLC'_{ox}(V_{GS} - V_T) \frac{4 + 8\eta + 12\eta^2 + 6\eta^3}{15(1 + \eta)^2}$$

$C_{dg}$ と $C_{db}$ は以下になる。

$$C_{dg} = -\frac{\partial q_D}{\partial v_G} = C_{ox} \frac{4 + 28\eta + 22\eta^2 + 6\eta^3}{15(1 + \eta)^3}$$

$$C_{db} = -\frac{\partial q_D}{\partial v_B} = (\alpha_1 - 1)C_{dg}$$

$$\eta = \begin{cases} 1 - \frac{V_{DS}}{V'_{DS}} & V_{DS} \leq V'_{DS} \\ 0 & V_{DS} > V'_{DS} \end{cases}$$
$$V'_{DS} = \frac{V_{GS} - V_T}{\alpha_1}$$

# 容量の評価(2)

$C_{bg}$ の導出

$$q_B = Q_B = -WLC'_{ox} \left[ \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{SB}} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} (V_{GS} - V_T) \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{1 + \eta + \eta^2}{1 + \eta} \right) \right]$$

$$\Rightarrow C_{bg} = -\frac{\partial q_B}{\partial v_G} = \frac{\alpha_1 - 1}{3\alpha_1} C_{ox} \left( \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \right)^2$$

これは、 $C_{bg} = C_{gb}$ である。また、 $C_{sd}$ の導出は、

$$q_S = Q_S = -WLC'_{ox} (V_{GS} - V_T) \frac{6 + 12\eta + 8\eta^2 + 4\eta^3}{15(1 + \eta)^2}$$

$$\Rightarrow C_{sd} = -\frac{\partial q_S}{\partial v_D} = -\left[ \frac{4}{15} C_{ox} \alpha_1 \frac{\eta + 3\eta^2 + \eta^3}{(1 + \eta)^3} \right]$$

# 容量の評価(3)

$C_m$ ,  $C_{mb}$ ,  $C_{mx}$ の各値は以下になる。

$$C_m = \frac{4}{15} C_{ox} \frac{1+2\eta-2\eta^2-\eta^3}{(1+\eta)^3}, C_{mb} = (\alpha_1 - 1)C_m, C_{mx} = 0$$

$C_{db}$ ,  $C_{bg}$ ,  $C_{mb}$ は、 $V_{SB}$ が小さく、 $V_{GS}$ と $V_{DS}$ が大きい場合に精度が悪くなる。

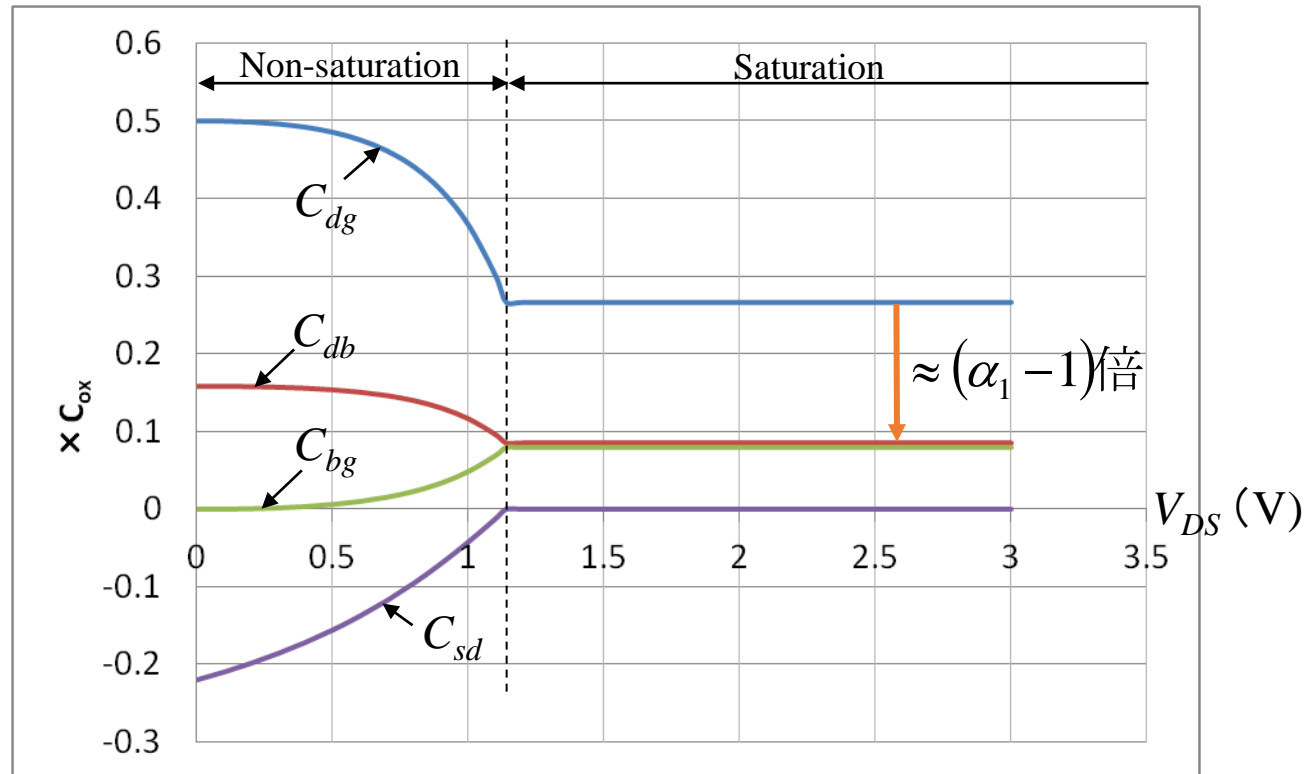
精度を上げるには、 $\alpha_1$ を以下の $\alpha_5$ に変える。

$$\alpha_5 = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB} + k_c V_{DS}'(1-\alpha)}}$$

ここで、 $C_{bg} = C_{gb}$ ,  $C_{mx} = 0$ となったが、チャージ・シート・モデルを用いた正確な計算では、 $C_{bg} > C_{gb}$ ,  $C_{mx} > 0$ になる。また、 $V_{SB}$ が大きく、 $V_{GS}$ と $V_{DS}$ が小さい場合以下を得る。

$$\frac{C_{db}}{C_{dg}} \approx \frac{C_{sb}}{C_{sg}} \approx \frac{C_{bd}}{C_{gd}} \approx \frac{C_{bs}}{C_{gs}} \approx \frac{C_{bb}}{C_{gg}} \approx \frac{C_{mb}}{C_m} \approx \frac{C'_{bc}(V_{SB})}{C'_{ox}} \approx \frac{g_{mb}}{g_m} \approx \frac{dV_T}{dV_{SB}} = \alpha_1 - 1$$

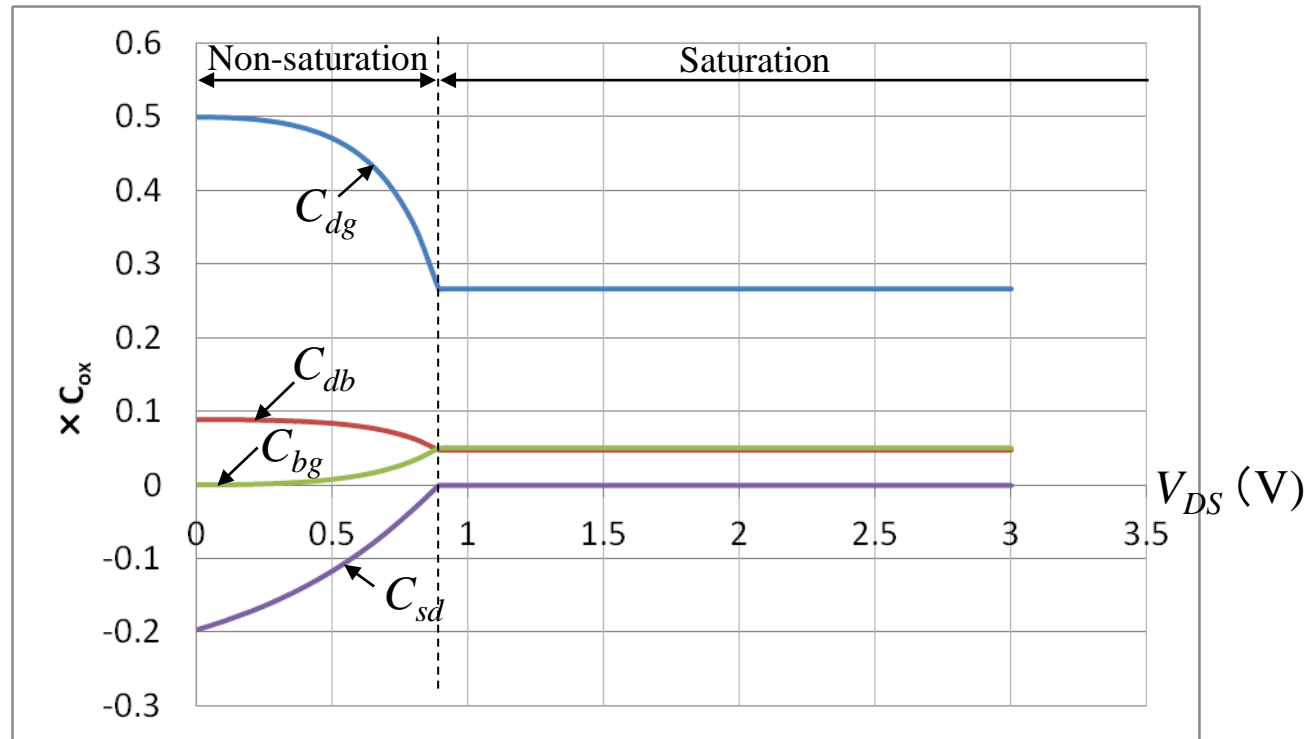
$C_{dg}, C_{db}, C_{bg}, C_{sd}$  vs.  $V_{DS}$  ( $V_{SB} = 0$ )



$V_{T0} = 0.5$  V,  $\gamma = 0.6$  V<sup>0.5</sup>,  $\phi_0 = 0.9$  V, with  $V_{GS} = 2$  V

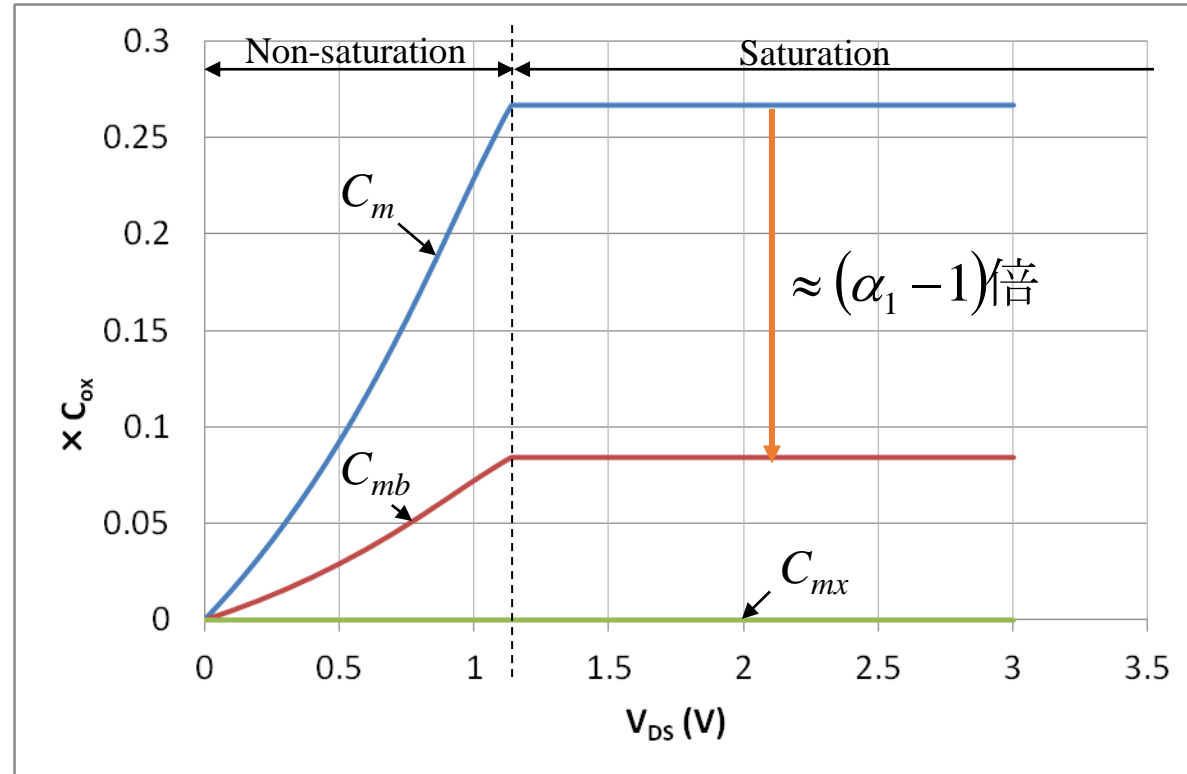


$C_{dg}, C_{db}, C_{bg}, C_{sd}$  vs.  $V_{DS}$  ( $V_{SB} = 2V$ )



$V_{T0} = 0.5$  V,  $\gamma = 0.6$  V<sup>0.5</sup>,  $\phi_0 = 0.9$  V, with  $V_{GS} = 2$  V

$C_m, C_{mb}, C_{mx}$  vs.  $V_{DS}$  ( $V_{SB} = 0$ )



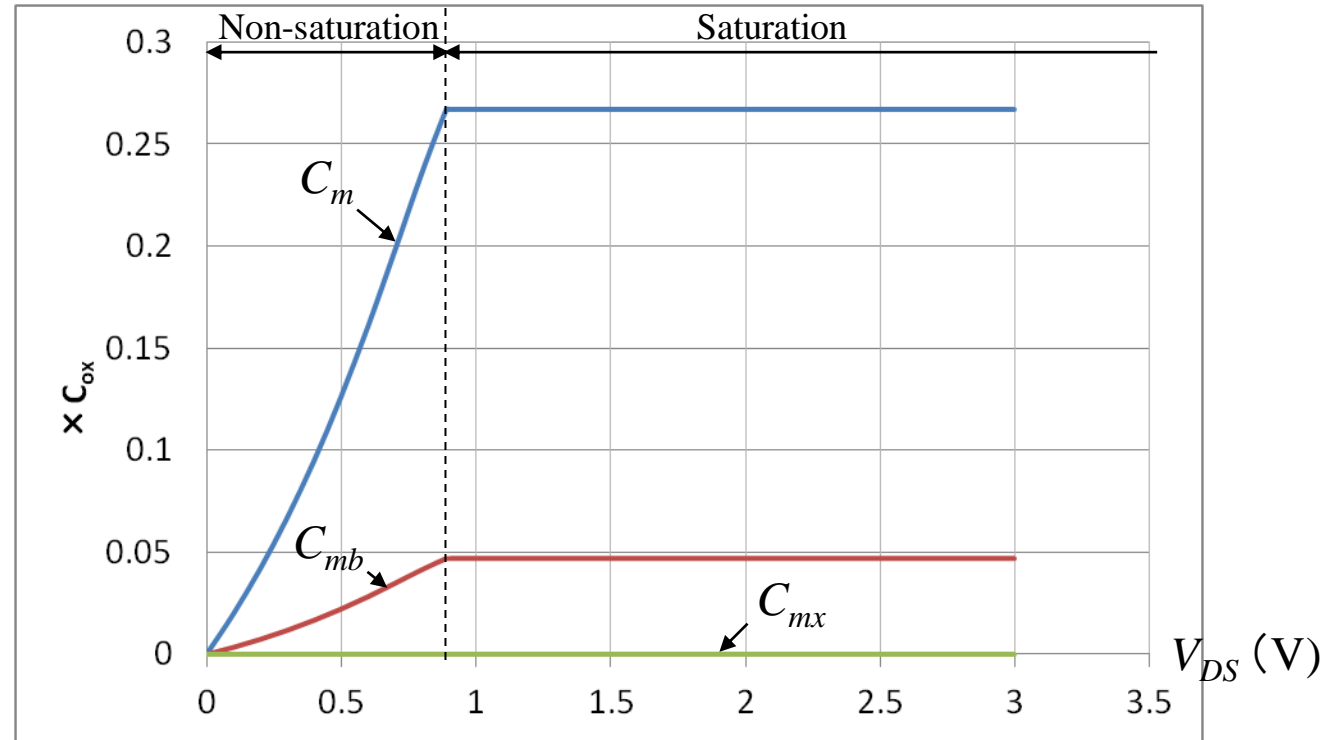
$$C_m = C_{dg} - C_{gd}$$

$$C_{mb} = C_{db} - C_{bd}$$

$$C_{mx} = C_{bg} - C_{gb}$$

$V_{T0} = 0.5$  V,  $\gamma = 0.6$  V<sup>0.5</sup>,  $\phi_0 = 0.9$  V, with  $V_{GS} = 2$  V

$C_m, C_{mb}, C_{mx}$  vs.  $V_{DS}$  ( $V_{SB} = 2V$ )



$V_{T0} = 0.5$  V,  $\gamma = 0.6$  V<sup>0.5</sup>,  $\phi_0 = 0.9$  V, with  $V_{GS} = 2$  V

# 非飽和領域での各容量

$V_{DS} = 0 (\eta = 1)$ での容量

$$C_{gg} = C_{ox} = C'_{ox} WL$$

$$C_{dg} = C_{gd} = C_{gs} = C_{sg} = \frac{C_{gg}}{2}$$

$$C_{bb} = (\alpha_1 - 1)C_{gg} = C'_{bc} (V_{SB}) WL$$

$$C_{db} = C_{bd} = C_{bs} = C_{sb} = \frac{C_{bb}}{2}$$

$$C_{gb} = C_{bg} = 0$$

$$C_{dd} = C_{ss} = \alpha_1 \frac{C_{ox}}{3}$$

$$C_{ds} = C_{sd} = -\alpha_1 \frac{C_{ox}}{6}$$

$$C_m = C_{mb} = C_{mx} = 0$$

ゲート側容量

基板側容量

ゲート～基板間容量

ドレイン/ソース容量

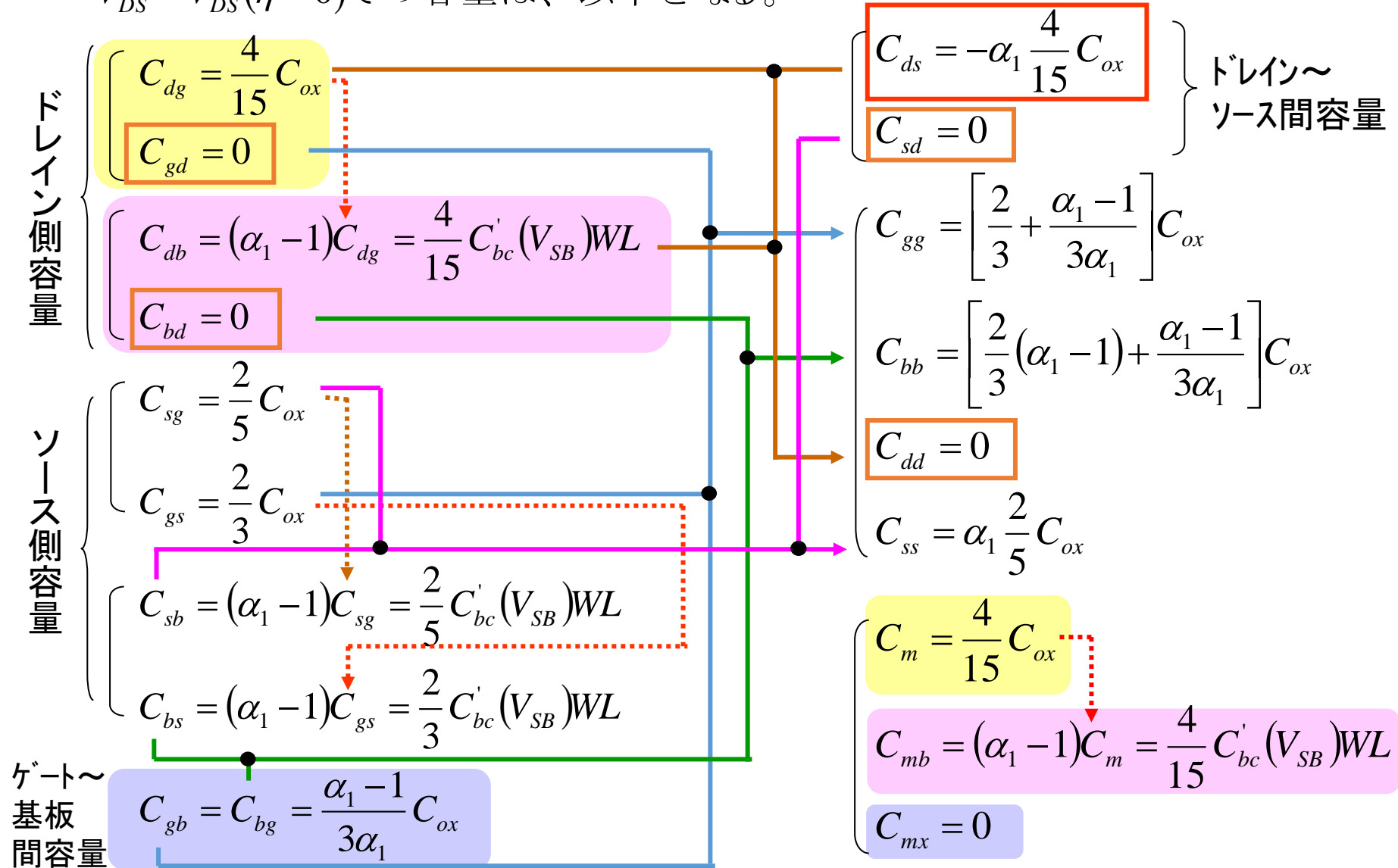
ドレイン～ソース間容量

$V_{DS} = 0$ の場合、 $C_{kl} = C_{lk}$

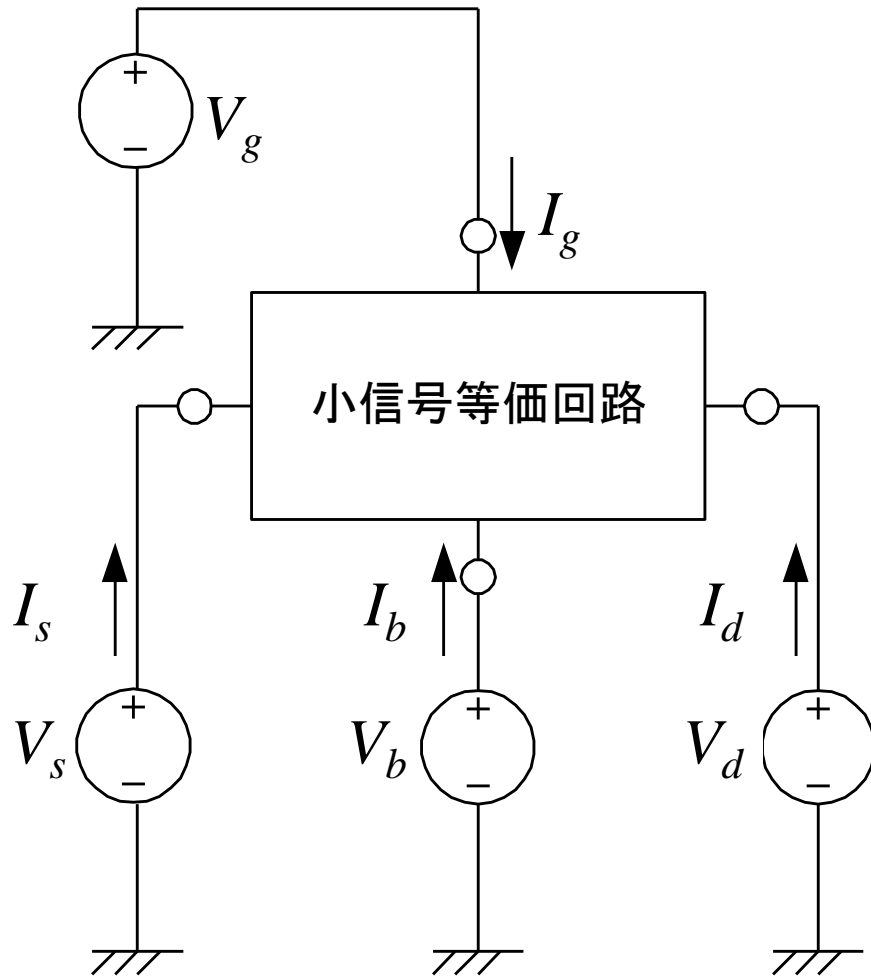
一般に、 $V_{DS} \neq 0$ の場合、 $C_{kl} \neq C_{lk}$

# 飽和領域での各容量

$V_{DS} = V_{DS}' (\eta = 0)$ での容量は、以下となる。



# yパラメータモデル(電流・電圧表現:小信号)



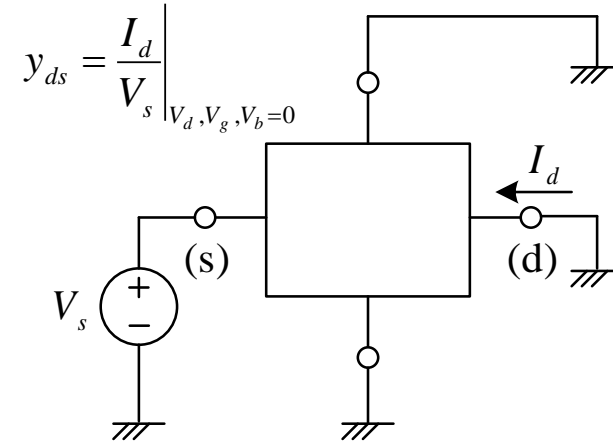
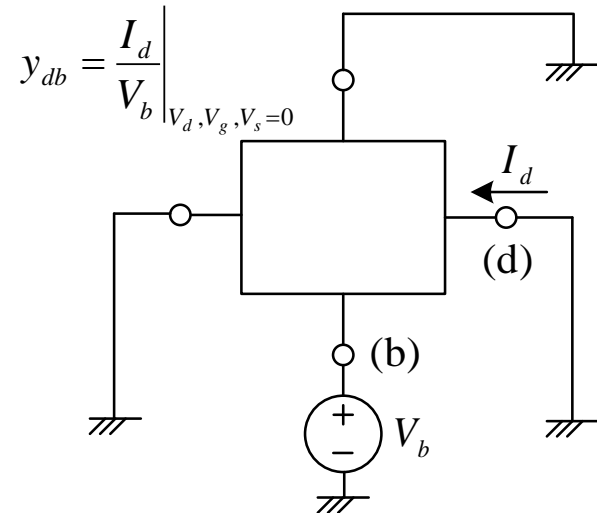
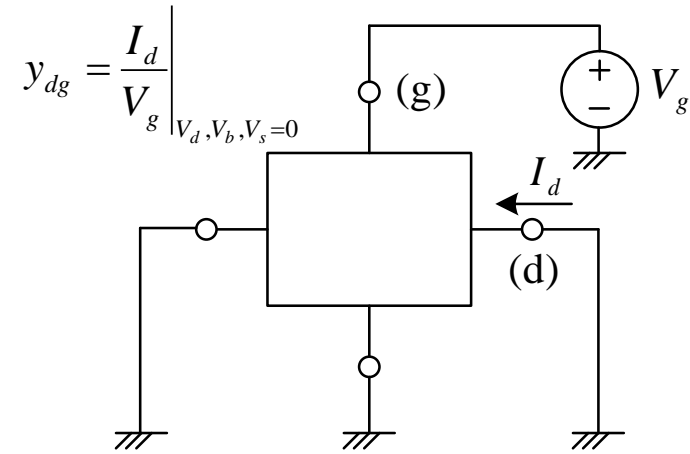
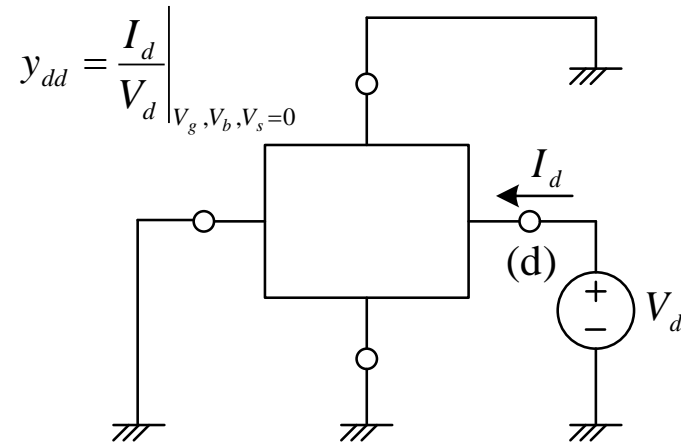
$$v_g(t) = M_{vg} \cos(\omega t + \phi_{vg})$$

↓

$$V_g = M_{vg} e^{j\phi_{vg}}$$

$i_d(t) \Rightarrow I_d$	$v_d(t) \Rightarrow V_d$
$i_g(t) \Rightarrow I_g$	$v_g(t) \Rightarrow V_g$
$i_b(t) \Rightarrow I_b$	$v_b(t) \Rightarrow V_b$
$i_s(t) \Rightarrow I_s$	$v_s(t) \Rightarrow V_s$

# yパラメータの定義



# yパラメータを用いた電流表現(1)

小信号等価回路が線形であるため、 $I_d$ は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} I_d &= I_d|_{V_g, V_b, V_s=0} + I_d|_{V_d, V_b, V_s=0} + I_d|_{V_d, V_g, V_s=0} + I_d|_{V_d, V_g, V_b=0} \\ &= y_{dd}V_d + y_{dg}V_g + y_{db}V_b + y_{ds}V_s \end{aligned}$$

ここで、

$$y_{kl} = \left. \frac{I_k}{V_l} \right|_{V_n=0, n \neq l}$$

である。これから同様に、 $I_g, I_b, I_s$ は以下の式で表される。

$$I_g = y_{gd}V_d + y_{gg}V_g + y_{gb}V_b + y_{gs}V_s$$

$$I_b = y_{bd}V_d + y_{bg}V_g + y_{bb}V_b + y_{bs}V_s$$

$$I_s = y_{sd}V_d + y_{sg}V_g + y_{sb}V_b + y_{ss}V_s$$



# yパラメータを用いた電流表現(2)

yパラメータの間には、以下の関係がある。

$$y_{dd} + y_{dg} + y_{db} + y_{ds} = y_{dd} + y_{gd} + y_{bd} + y_{sd} = 0$$

$$y_{gg} + y_{gd} + y_{gb} + y_{gs} = y_{gg} + y_{dg} + y_{bg} + y_{sg} = 0$$

$$y_{bb} + y_{bd} + y_{bg} + y_{bs} = y_{bb} + y_{db} + y_{gb} + y_{sb} = 0$$

$$y_{ss} + y_{sd} + y_{sg} + y_{sb} = y_{ss} + y_{ds} + y_{gs} + y_{bs} = 0$$

また、電流に関して以下の関係がある。

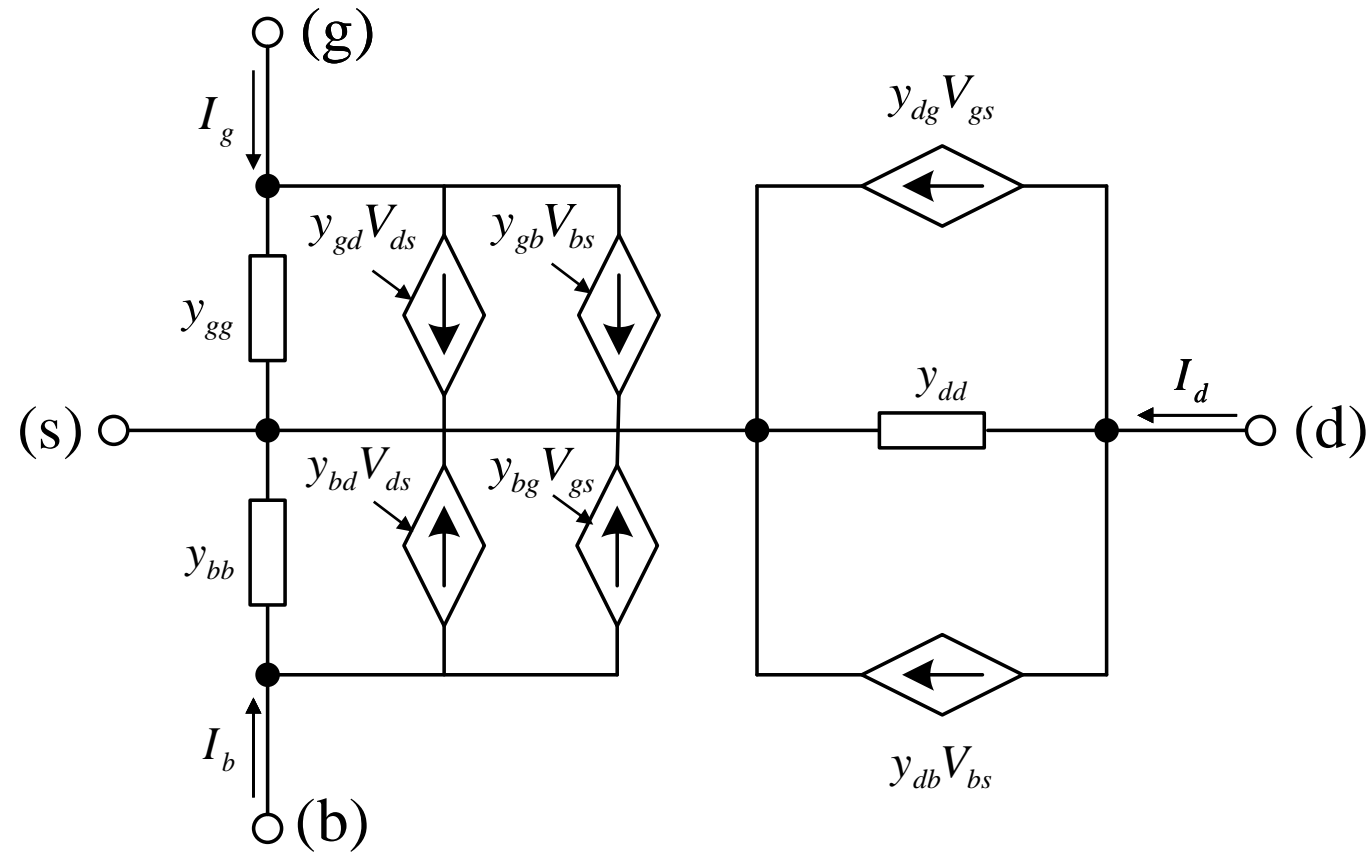
$$\begin{aligned} I_d &= y_{dd}V_d + y_{dg}V_g + y_{db}V_b + y_{ds}V_s = y_{dd}V_{ds} + y_{dg}V_{gs} + y_{db}V_{bs} + (y_{dd} + y_{dg} + y_{db} + y_{ds})V_s \\ &= y_{dd}V_{ds} + y_{dg}V_{gs} + y_{db}V_{bs} \end{aligned}$$

同様に、 $I_g$ と $I_b$ は以下の式で表される。

$$I_g = y_{gd}V_{ds} + y_{gg}V_{gs} + y_{gb}V_{bs}, \quad I_b = y_{bd}V_{ds} + y_{bg}V_{gs} + y_{bb}V_{bs}$$

$$V_{kl} = V_k - V_l$$

# ソース参照yパラメータモデル



# yパラメータを用いた電流表現(3)

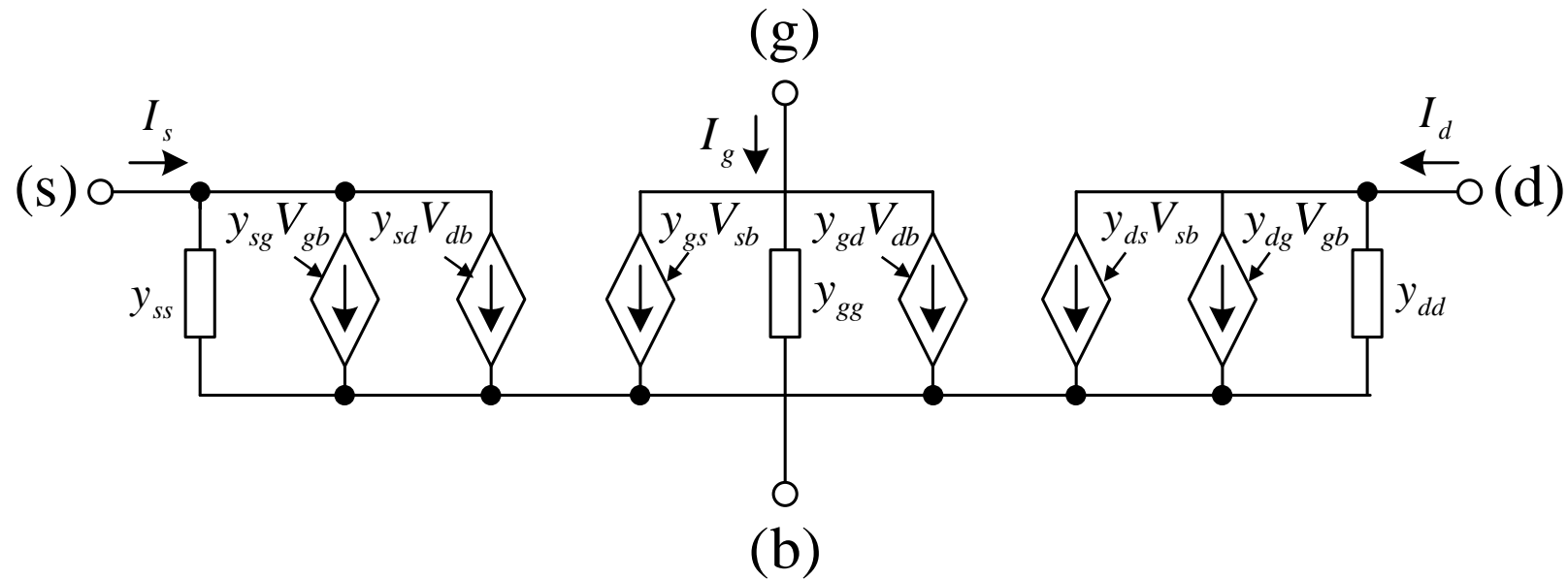
また、 $I_d$ は以下の如く変形される。

$$\begin{aligned} I_d &= y_{dd}V_d + y_{dg}V_g + y_{db}V_b + y_{ds}V_s \\ &= y_{dd}V_{db} + y_{dg}V_{gb} + (y_{dd} + y_{dg} + y_{db} + y_{ds})V_b + y_{ds}V_{sb} \\ &= y_{dd}V_{db} + y_{dg}V_{gb} + y_{ds}V_{sb} \end{aligned}$$

これから同様に、 $I_g$ と $I_s$ は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} I_g &= y_{gd}V_{db} + y_{gg}V_{gb} + y_{gs}V_{sb} \\ I_s &= y_{sd}V_{db} + y_{sg}V_{gb} + y_{ss}V_{sb} \end{aligned}$$

# 基板参照 $y$ パラメータモデル



# yパラメータを用いた電流表現(4)

電流に関して以下の関係がある。

$$\begin{aligned} I_d &= y_{dd}V_{ds} + y_{dg}V_{gs} + y_{db}V_{bs} \\ &= -(y_{gd} + y_{bd} + y_{sd})V_{ds} + y_{dg}V_{gs} + y_{db}V_{bs} \\ &= -y_{gd}(V_{dg} + V_{gs}) - y_{bd}(V_{db} + V_{bs}) - y_{sd}V_{ds} + y_{dg}V_{gs} + y_{db}V_{bs} \\ &= -y_{gd}V_{dg} - y_{sd}V_{ds} - y_{bd}V_{db} + (y_{dg} - y_{gd})V_{gs} + (y_{db} - y_{bd})V_{bs} \\ &= -y_{gd}V_{dg} - y_{sd}V_{ds} - y_{bd}V_{db} + y_mV_{gs} + y_{mb}V_{bs} \end{aligned}$$

同様に以下が導かれる。

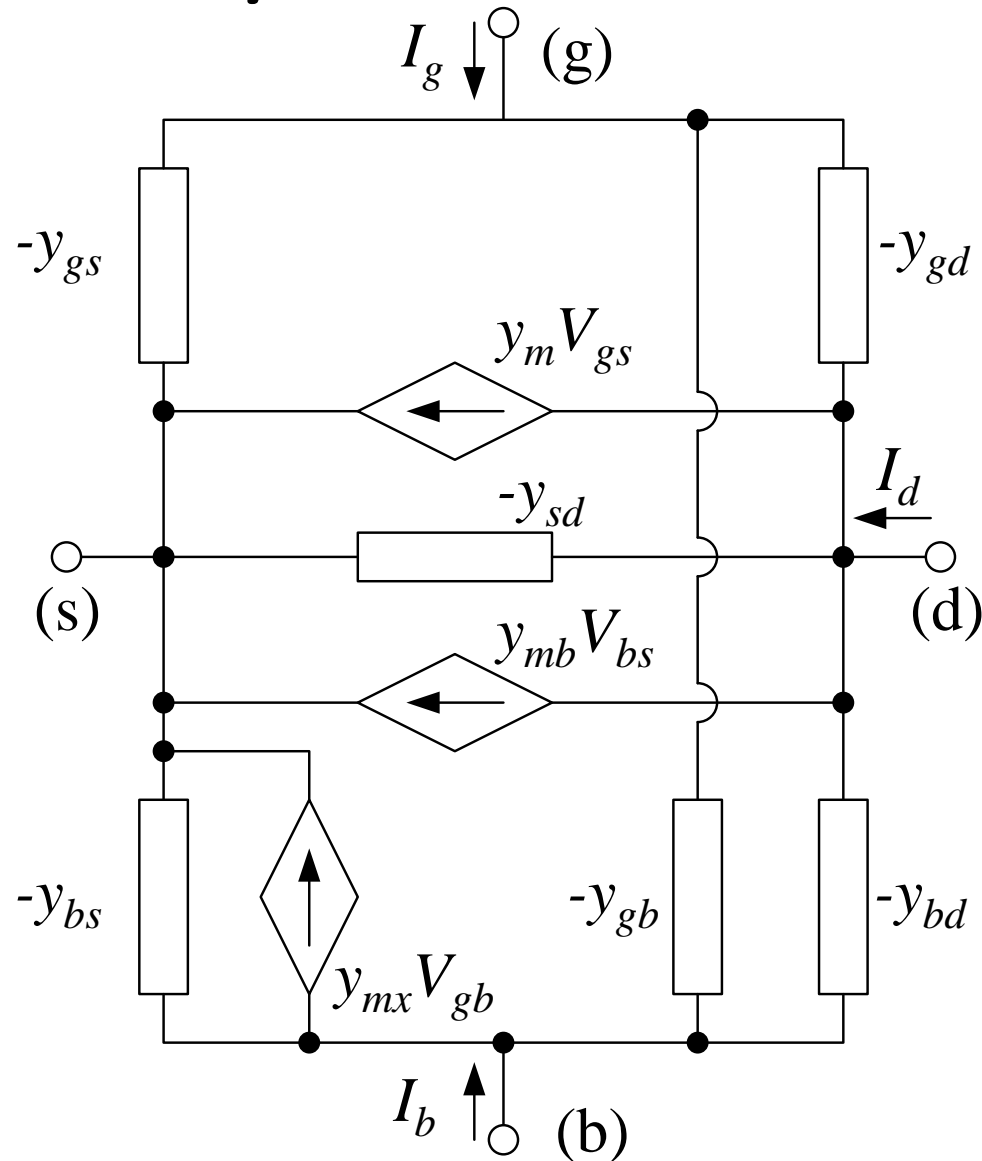
$$\begin{aligned} I_g &= -y_{gd}V_{gd} - y_{gb}V_{gb} - y_{gs}V_{gs} \\ I_b &= -y_{bd}V_{bd} - y_{gb}V_{bg} + y_{mx}V_{gb} - y_{bs}V_{bs} \end{aligned}$$

$$y_m = y_{dg} - y_{gd}$$

$$y_{mb} = y_{db} - y_{bd}$$

$$y_{mx} = y_{bg} - y_{gb}$$

# 一般的なyパラメータモデル



完全QS小信号の場合

$$-y_{gd} = j\omega C_{gd}$$

$$-y_{gs} = j\omega C_{gs}$$

$$-y_{bd} = j\omega C_{bd}$$

$$-y_{bs} = j\omega C_{bs}$$

$$-y_{gb} = j\omega C_{gb}$$

$$-y_{sd} = g_{sd} + j\omega C_{sd}$$

$$y_m = g_m - j\omega C_m$$

$$y_{mb} = g_{mb} - j\omega C_{mb}$$

$$y_{mx} = -j\omega C_{mx}$$

# NQS強反転モデル(1): dc

$\alpha$ に関し以下を仮定する。

$$\alpha = \alpha_1 = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}} \quad (\alpha_1 \text{の } V_S \text{ または } V_B \text{ の微分は無視する。})$$

dcバイアス印加すると、簡単化されたソース参照モデル（直接導出）の結果から

$$Q'_B(x) = -C'_{ox} [\gamma \sqrt{\phi_0 - V_{BS}} + (\alpha_1 - 1) V_{CS}(x)]$$

$$Q_B = W \int_0^L Q'_B(x) dx$$

$$Q'_G(x) = C'_{ox} [V_{GS} - V_{FB} - \phi_0 - V_{CS}(x)] - Q'_o$$

$$Q_G = W \int_0^L Q'_G(x) dx$$

$$Q'_I(x) = -C'_{ox} U_I(x)$$

$$U_I(x) = V_{GS} - V_{FB} - \phi_0 - \gamma \sqrt{\phi_0 - V_{BS}} - \alpha_1 V_{CS}(x)$$

$$\begin{aligned} V_{GS} &= V_{GB} - V_{SB} \\ V_{CS}(x) &= V_{CB}(x) - V_{SB} \\ Q'_G + Q'_o + Q'_I + Q'_B &= 0 \end{aligned}$$

# NQS強反転モデル(2) : dc

チャネル内の点 $x$ における電流 $I_I(x)$ は、以下になる。

$$I_I(x) = -\mu W Q_I'(x) \frac{dV_{CS}(x)}{dx} = \frac{1}{\alpha_1} \mu W Q_I'(x) \frac{dU_I(x)}{dx} = -\frac{1}{\alpha_1} \mu W C_{ox}' U_I(x) \frac{dU_I(x)}{dx}$$

dcの場合、 $I_I(x) = I_D$ である。上式を $x$ から $L$ まで積分すると、

$$I_D = \frac{W}{L-x} \frac{\mu C_{ox}'}{2\alpha_1} [U_I^2(x) - U_I^2(L)]$$

となる。 $x=0$ の場合、以下になる。

$$I_D = \frac{W}{L} \frac{\mu C_{ox}'}{2\alpha_1} [U_I^2(0) - U_I^2(L)]$$

$I_D$ に関する上2式から $U_I(x)$ を解くと、以下を得る。

$$U_I(x) = \left\{ U_I^2(0) + \frac{x}{L} [U_I^2(L) - U_I^2(0)] \right\}^{1/2}$$



# NQS強反転モデル(3) : dc

ソース端では、 $V_{CS}(0) = 0$ であるから、

$$U_I(0) = V_{GS} - V_{FB} - \phi_0 - \gamma \sqrt{\phi_0 - V_{BS}}$$

となる。また、ドレイン端では、

$$\begin{aligned} V_{CS}(L) &= V_{DS}, & V_{DS} &\leq V'_{DS} \\ &= V'_{DS}, & V_{DS} &> V'_{DS} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} U_I(L) &= V_{GS} - V_{FB} - \phi_0 - \gamma \sqrt{\phi_0 - V_{BS}} - \alpha_1 V_{DS}, & V_{DS} &\leq V'_{DS} \\ &= V_{GS} - V_{FB} - \phi_0 - \gamma \sqrt{\phi_0 - V_{BS}} - \alpha_1 V'_{DS}, & V_{DS} &> V'_{DS} \end{aligned}$$

となる。また、ここでdc成分に関し、以下とする。

$$I_G = I_B = 0$$

# NQS強反転モデル(4):時間変化(大信号)

全量(大信号)の時間変化はそれぞれ以下で表される。

$$q'_G(x,t) = C'_{ox} [v_{GS}(t) - V_{FB} - \phi_0 - v_{CS}(x,t)] - Q_o, \quad q_G(t) = W \int_0^L q'_G(x,t) dx$$

$$q'_B(x,t) = -C'_{ox} [\gamma \sqrt{\phi_0 - v_{BS}(t)} + (\alpha_1 - 1)v_{CS}(x,t)], \quad q_B(t) = W \int_0^L q'_B(x,t) dx$$

$$q'_I(x,t) = -C'_{ox} u_I(x,t), \quad u_I(x,t) = v_{GS}(t) - V_{FB} - \phi_0 - \gamma \sqrt{\phi_0 - v_{BS}(t)} - \alpha_1 v_{CS}(x,t)$$

また、電流 $i_I(x,t)$ は、

$$i_I(x,t) = \frac{\mu W}{\alpha_1} q'_I(x,t) \frac{\partial u_I(x,t)}{\partial x}$$

となる。電流連続の式から以下を得る。

$$\frac{\partial i_I(x,t)}{\partial x} = -C'_{ox} W \frac{\partial u_I(x,t)}{\partial t}$$

以下が端子電流である。

$$i_D(t) = i_I(L,t)$$

$$i_G(t) = \frac{dq_G(t)}{dt}$$

$$i_B(t) = \frac{dq_B(t)}{dt}$$

# NQS強反転モデル(5):時間変化(小信号)

全端子電圧を以下で定義する。

$$v_{GS}(t) = V_{GS} + v_{gs}(t) \quad (\text{全変化量} = \text{バイアス量} + \text{小信号})$$

$$v_{BS}(t) = V_{BS} + v_{bs}(t)$$

$$v_{DS}(t) = V_{DS} + v_{ds}(t)$$

上記電圧による他の時間変化量を以下の如く得る。

$$q'_G(x, t) = Q'_G(x) + q'_g(x, t)$$

$$q_G(t) = Q_G + q_g(t)$$

$$q'_B(x, t) = Q'_B(x) + q'_b(x, t)$$

$$q_B(t) = Q_B + q_b(t)$$

$$u_I(x, t) = U_I(x) + u_i(x, t)$$

# NQS強反転モデル(6): 時間変化(小信号)

ゲート電荷をバイアスと小信号部分に分けて表すと、

$$\begin{aligned} Q_G'(x) + q_g'(x, t) &= C_{ox}' [V_{GS} + v_{gs}(t) - V_{FB} - \phi_0 - V_{CS} - v_{cs}(x, t)] - Q_o' \\ &= \{C_{ox}' [V_{GS} - V_{FB} - \phi_0 - V_{CS}] - Q_o'\} + C_{ox}' [v_{gs}(t) - v_{cs}(x, t)] \end{aligned}$$

となるため、

$$q_g'(x, t) = C_{ox}' [v_{gs}(t) - v_{cs}(x, t)]$$

となる。また、

$$Q_G(x) + q_g(t) = W \int_0^L [Q_G'(x) + q_g'(x, t)] dx = W \int_0^L Q_G'(x) dx + W \int_0^L q_g'(x, t) dx$$

から、以下を得る。

$$q_g(t) = W \int_0^L q_g'(x, t) dx$$

# NQS強反転モデル(7): 時間変化(小信号)

空乏層電荷に関して、同様の表現を得るために

$$q'_B(x,t) = -C'_{ox} \left[ \gamma \sqrt{\phi_0 - v_{BS}(t)} + (\alpha_1 - 1)v_{CS}(x,t) \right]$$

の中の、ルートの表現をテイラー展開して

$$\gamma \sqrt{\phi_0 - v_{BS}(t)} = \gamma \sqrt{(\phi_0 - V_{BS}) - v_{bs}(t)} = \gamma \sqrt{\phi_0 - V_{BS}} - (\alpha_1 - 1)v_{bs}(t)$$

とすると、

$$\begin{aligned} Q'_B(x) + q'_b(x,t) &= -C'_{ox} \left[ \gamma \sqrt{\phi_0 - V_{BS}} - (\alpha_1 - 1)v_{bs}(t) + (\alpha_1 - 1)(V_{CS}(x) + v_{cs}(x,t)) \right] \\ &= -C'_{ox} \left[ \gamma \sqrt{\phi_0 - V_{BS}} + (\alpha_1 - 1)V_{CS}(x) \right] + C'_{ox} (\alpha_1 - 1)(v_{bs}(t) - v_{cs}(x,t)) \end{aligned}$$

になるため、以下を得る。

$$q'_b(x,t) = C'_{ox} (\alpha_1 - 1)(v_{bs}(t) - v_{cs}(x,t))$$

また、同様に以下も得る。

$$q_b(t) = W \int_0^L q'_b(x,t) dx$$

# NQS強反転モデル(8):時間変化(小信号)

$u_i(x,t)$ に関しても、ルートの表現に $q'_B(x,t)$ と同様の処理をして整理すると、以下を得る。

$$\begin{aligned}u_i(x,t) &= v_{gs}(t) + (\alpha_1 - 1)v_{bs}(t) - \alpha_1 v_{cs}(x,t) \\ &= [v_{gs}(t) - v_{cs}(x,t)] + (\alpha_1 - 1)[v_{bs}(t) - v_{cs}(x,t)]\end{aligned}$$

$v_{cs}(x,t)$ は、ソースで0、ドレインで $v_{ds}(t)$ であるから、

$$u_i(0,t) = v_{gs}(t) + (\alpha_1 - 1)v_{bs}(t)$$

$$u_i(L,t) = [v_{gs}(t) - v_{ds}(t)] + (\alpha_1 - 1)[v_{bs}(t) - v_{ds}(t)]$$

を得る。これらは、境界条件になる。

# NQS強反転モデル(9): 時間変化(小信号)

$i_i(x,t)$ を求める。

$$\begin{aligned}i_i(x,t) &= I_I(x) + i_i(x,t) = \frac{\mu W}{\alpha_1} q_I'(x,t) \frac{\partial u_I(x,t)}{\partial x} \\ &= \frac{\mu W}{\alpha_1} (-C'_{ox})(U_I(x) + u_i(x,t)) \frac{\partial}{\partial x} (U_I(x) + u_i(x,t)) \\ &= -\frac{\mu W C'_{ox}}{\alpha_1} \left\{ U_I(x) \frac{\partial U_I(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [U_I(x) u_i(x,t)] + u_i(x,t) \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} \right\}\end{aligned}$$

であるから、 $\{ \}$ 内の最後の項を無視すると、

$$i_i(x,t) = -\frac{\mu W C'_{ox}}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial x} [U_I(x) u_i(x,t)]$$

を得る。また、 $\partial I_I(x)/\partial x = 0$ ,  $\partial U_I(x)/\partial t = 0$ から以下を得る。

$$\frac{\partial i_i(x,t)}{\partial x} = -C'_{ox} W \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}$$

# NQS強反転モデル(10):時間変化(小信号)

ドレインの小信号電流は、

$$i_d(t) = i_i(L, t)$$

となる。また、ゲートの小信号電流は、

$$\begin{aligned} i_g(t) &= \frac{dq_g(t)}{dt} = WC'_{ox} \frac{d}{dt} \int_0^L [v_{gs}(t) - v_{cs}(x, t)] dx \\ &= WC'_{ox} \frac{d}{dt} \int_0^L \left\{ \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} [v_{gs}(t) - v_{bs}(t)] + \frac{1}{\alpha_1} u_i(x, t) \right\} dx \end{aligned}$$

となる。同様に、 $i_b(t)$ は以下になる。

$$i_b(t) = \frac{dq_b(t)}{dt} = (\alpha_1 - 1)WC'_{ox} \frac{d}{dt} \int_0^L \left\{ \frac{1}{\alpha_1} [v_{bs}(t) - v_{gs}(t)] + \frac{1}{\alpha_1} u_i(x, t) \right\} dx$$

$$\begin{aligned} u_i(x, t) &= v_{gs}(t) + (\alpha_1 - 1)v_{bs}(t) - \alpha_1 v_{cs}(x, t) \\ \Rightarrow v_{cs}(x, t) &= \frac{1}{\alpha_1} [v_{gs}(t) + (\alpha_1 - 1)v_{bs}(t) - u_i(x, t)] \end{aligned}$$



# NQS強反転モデル: 指数関数励起

印加電圧を以下の如くとする。

$$v_{gs}(t) = V_{gs} e^{j\omega t}$$

$$v_{bs}(t) = V_{bs} e^{j\omega t}$$

$$v_{ds}(t) = V_{ds} e^{j\omega t}$$

これらの小信号に関連した式は線形であるから、以下を得る。

$$u_i(x, t) = U_i(x, \omega) e^{j\omega t}$$

$$i_i(x, t) = I_i(x, \omega) e^{j\omega t}$$

$$i_d(t) = I_d(\omega) e^{j\omega t}$$

$$i_g(t) = I_g(\omega) e^{j\omega t}$$

$$i_b(t) = I_b(\omega) e^{j\omega t}$$

# 指数関数励起のある場合の関係式

$$I_i(x, \omega) = -\frac{\mu WC'_{ox}}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial x} [U_i(x) U_i(x, \omega)]$$

$$\frac{\partial I_i(x, \omega)}{\partial x} = -j\omega C'_{ox} W U_i(x, \omega)$$

$$U_i(0, \omega) = V_{gs} + (\alpha_1 - 1) V_{bs}$$

$$U_i(L, \omega) = [V_{gs} - V_{ds}] + (\alpha_1 - 1) [V_{bs} - V_{ds}]$$

$$I_d(\omega) = I_i(L, \omega)$$

$$I_g(\omega) = j\omega C'_{ox} W \left[ L \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} [V_{gs} - V_{bs}] + \frac{1}{\alpha_1} \int_0^L U_i(x, \omega) dx \right]$$

$$I_b(\omega) = j\omega (\alpha_1 - 1) C'_{ox} W \left[ L \frac{1}{\alpha_1} [V_{bs} - V_{gs}] + \frac{1}{\alpha_1} \int_0^L U_i(x, \omega) dx \right]$$

# 小信号電流値 ( $I_d, I_g, I_b$ ) の表現

$I_d(\omega), I_g(\omega), I_b(\omega)$  は以下の如く表される。

$$I_d(\omega) = \frac{N_{dd}(\omega)V_{ds} + N_{dg}(\omega)V_{gs} + N_{db}(\omega)V_{bs}}{D(\omega)}$$

$$I_g(\omega) = \frac{N_{gd}(\omega)V_{ds} + N_{gg}(\omega)V_{gs} + N_{gb}(\omega)V_{bs}}{D(\omega)}$$

$$I_b(\omega) = \frac{N_{bd}(\omega)V_{ds} + N_{bg}(\omega)V_{gs} + N_{bb}(\omega)V_{bs}}{D(\omega)}$$

ここで、

$$k, l = d, g, b$$

$$N_{kl}(\omega) = n_{kl0} + (j\omega)n_{kl1} + (j\omega)^2 n_{kl2} + \dots, \quad D(\omega) = d_0 + (j\omega)d_1 + (j\omega)^2 d_2 + \dots$$

である。また、 $y$  パラメータと以下により関連付けられる。

$$y_{dd} = N_{dd}(\omega)/D(\omega), \quad y_{dg} = N_{dg}(\omega)/D(\omega), \quad y_{db} = N_{db}(\omega)/D(\omega)$$

$$y_{gd} = N_{gd}(\omega)/D(\omega), \quad y_{gg} = N_{gg}(\omega)/D(\omega), \quad y_{gb} = N_{gb}(\omega)/D(\omega)$$

$$y_{bd} = N_{bd}(\omega)/D(\omega), \quad y_{bg} = N_{bg}(\omega)/D(\omega), \quad y_{bb} = N_{bb}(\omega)/D(\omega)$$

# 一般的なyパラメータモデル(等価回路)との関連付け

yパラメータの $y_{gd}$ ,  $y_{gb}$ ,  $y_{bd}$ は直接関連付けられる。

他のパラメータは、以下によって関連付けられる。

$$y_{gs} = -y_{gg} - y_{gd} - y_{gb}$$

$$y_{bs} = -y_{bb} - y_{bd} - y_{bg}$$

$$y_{sd} = -y_{dd} - y_{gd} - y_{bd}$$

# NQSの場合の $y$ パラメータ

ソース側の $y$

$$\begin{cases} -y_{gs} = j\omega C_{gs} \frac{1 + j\omega\tau_2 + \dots}{1 + j\omega\tau_1 + \dots} \\ -y_{bs} = j\omega C_{bs} \frac{1 + j\omega\tau_2 + \dots}{1 + j\omega\tau_1 + \dots} \end{cases}$$

ドレイン側の $y$

$$\begin{cases} -y_{gd} = j\omega C_{gd} \frac{1 + j\omega\tau_3 + \dots}{1 + j\omega\tau_1 + \dots} \\ -y_{bd} = j\omega C_{bd} \frac{1 + j\omega\tau_3 + \dots}{1 + j\omega\tau_1 + \dots} \end{cases}$$

$$-y_{gb} = j\omega C_{gb} + \frac{(j\omega)^2 C_{gb,sat} \tau_4 + \dots}{1 + j\omega\tau_1 + \dots}$$

$$-y_{sd} = \frac{g_{sd}}{1 + j\omega\tau_1 + \dots}$$

$$\begin{aligned} y_m &= \frac{g_m}{1 + j\omega\tau_1 + \dots} \\ y_{mb} &= \frac{g_{mb}}{1 + j\omega\tau_1 + \dots} \\ y_{mx} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{4}{15} \frac{1}{\omega_0} \frac{1+3\eta+\eta^2}{(1+\eta)^3} \\ \tau_2 = \frac{1}{15} \frac{1}{\omega_0} \frac{2+8\eta+5\eta^2}{(1+\eta)^2(1+2\eta)} \\ \tau_3 = \frac{1}{15} \frac{1}{\omega_0} \frac{5+8\eta+2\eta^2}{(1+\eta)^2(2+\eta)} \\ \tau_4 = \frac{2}{15} \frac{1}{\omega_0} \frac{2+13\eta+30\eta^2+13\eta^3+2\eta^4}{(1+\eta)^5} \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{\mu(V_{GS} - V_T)}{\alpha L^2}$$

# 低周波の場合の $y$ パラメータ

低周波の場合 ( $\omega \ll \omega_0$ ),

$$-y_{gs} \approx j\omega C_{gs}, \quad -y_{bs} \approx j\omega C_{bs}, \quad -y_{gd} \approx j\omega C_{gd}$$

$$-y_{bd} \approx j\omega C_{bd}, \quad -y_{gb} \approx j\omega C_{gb}, \quad -y_{sd} \approx g_{sd}$$

$$y_m \approx g_m, \quad y_{mb} \approx g_{mb}, \quad y_{mx} = 0$$

となり、高周波モデルが低/中間周波モデルに一致する。

また、 $V_{DS}$ または $V_{GS}$ が小さく、 $V_{SB}$ が大きい場合、

$$\frac{y_{bs}}{y_{gs}} \approx \frac{y_{bd}}{y_{gd}} \approx \frac{y_{mb}}{y_m} \approx \frac{dV_T}{dV_{SB}} = \alpha_1 - 1$$

が成立する。  $\therefore \frac{C_{bs}}{C_{gs}} \approx \frac{C_{bd}}{C_{gd}} \approx \frac{C'_{bc}(V_{SB})}{C'_{ox}} \approx \frac{g_{mb}}{g_m} \approx \frac{dV_T}{dV_{SB}} = \alpha_1 - 1$

# NQSの場合の $y$ パラメータの近似

ソース側の $y$

$$\begin{cases} -y_{gs} \approx \frac{j\omega C_{gs}}{1+j\omega(\tau_1-\tau_2)}, & \omega\tau_2 \ll 1 \\ -y_{bs} \approx \frac{j\omega C_{bs}}{1+j\omega(\tau_1-\tau_2)}, & \omega\tau_2 \ll 1 \end{cases}$$

ドレイン側の $y$

$$\begin{cases} -y_{gd} \approx \frac{j\omega C_{gd}}{1+j\omega(\tau_1-\tau_3)}, & \omega\tau_3 \ll 1 \\ -y_{bd} \approx \frac{j\omega C_{bd}}{1+j\omega(\tau_1-\tau_3)}, & \omega\tau_3 \ll 1 \end{cases}$$

$$-y_{gb} \approx j\omega C_{gb} + y_a$$

$$-y_{sd} \approx \frac{g_{sd}}{1+j\omega\tau_1}, \quad \omega\tau_1 \ll 1$$

$$y_m \approx \frac{g_m}{1+j\omega\tau_1}, \quad \omega\tau_1 \ll 1$$

$$y_{mb} \approx \frac{g_{mb}}{1+j\omega\tau_1}, \quad \omega\tau_1 \ll 1$$

$$y_{mx} \approx 0$$

近似方法

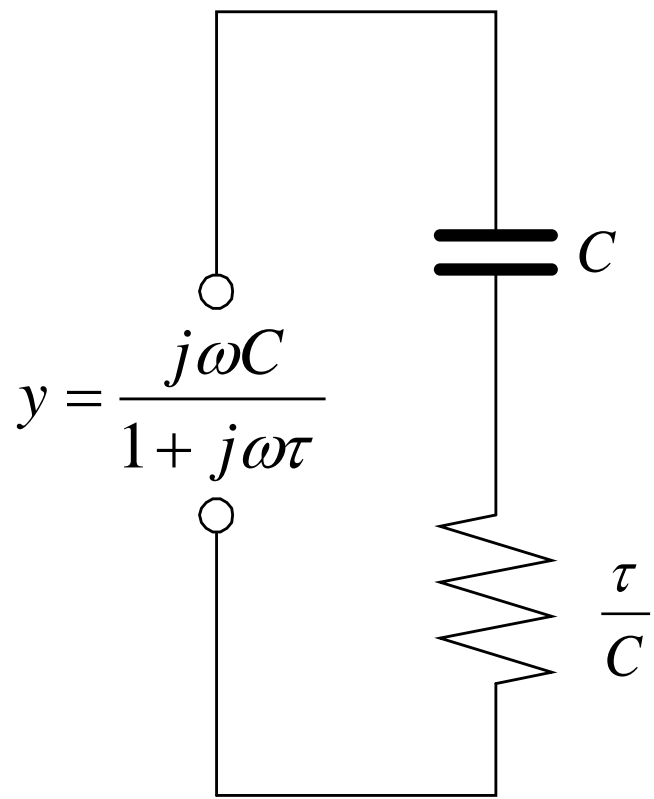


$$\omega\tau_2 \ll 1 \Rightarrow 1+j\omega\tau_2 \approx (1-j\omega\tau_2)^{-1}$$

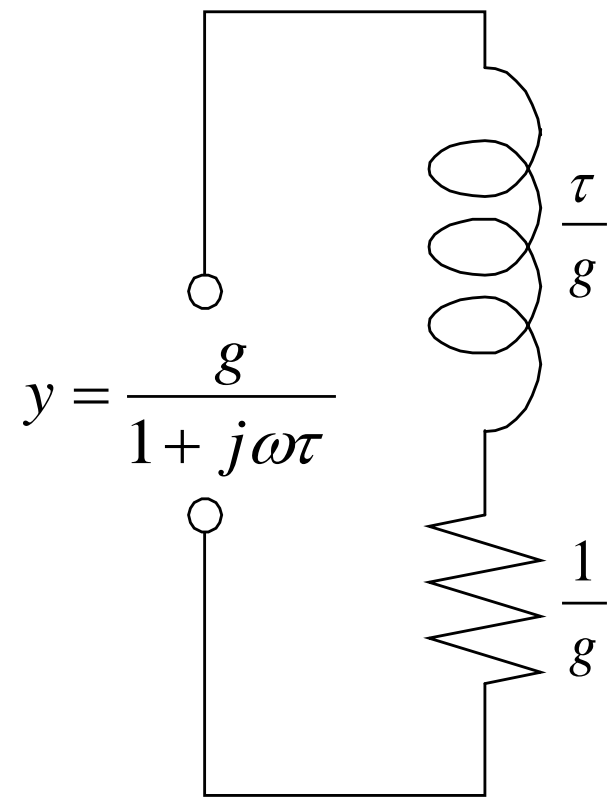
但し、 $y_a \approx \frac{(j\omega)^2 C_{gb,sat} \tau_4}{1+j\omega\tau_1}$

飽和領域では、 $y_a \approx 0$ , 非飽和領域且つ $V_{DS}$ 小では、 $y_a$ は $y_{gb}$ の中では主モードであるが、 $y_{gb}$ は他に比べて小さい。

# yパラメータの等価回路



$y_{gs}, y_{bs}, y_{gd}, y_{bd}$



$y_{sd}$



# NQS小信号等価回路

時定数の関係

$$R_{gs} C_{gs} = R_{bs} C_{bs} = \tau_1 - \tau_2$$

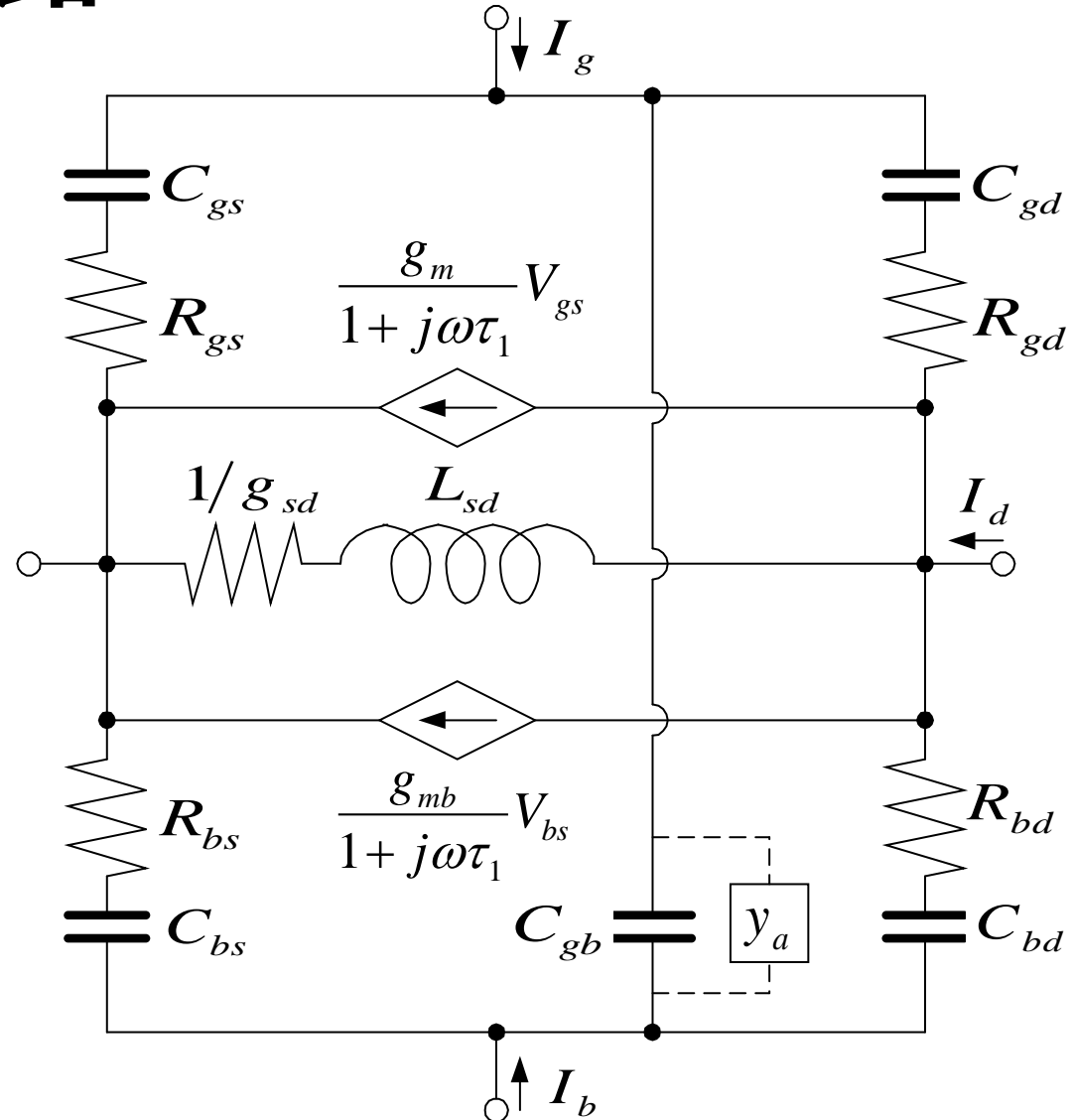
$$R_{gd} C_{gd} = R_{bd} C_{bd} = \tau_1 - \tau_3$$

$$L_{sd} g_{sd} = \tau_1$$

抵抗の関係

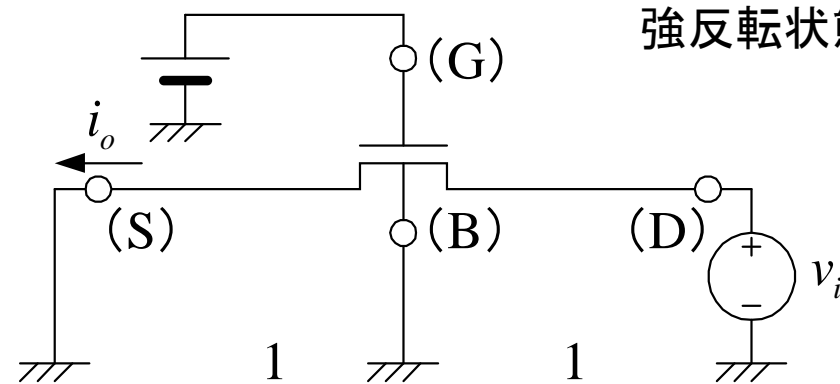
$$R_{kl} \propto (\omega_0 C_{ox})^{-1}$$

$$= \left( \frac{L}{W} \right) \frac{\alpha}{\mu C'_{ox} (V_{GS} - V_T)}$$



# インダクタンス成分の解釈

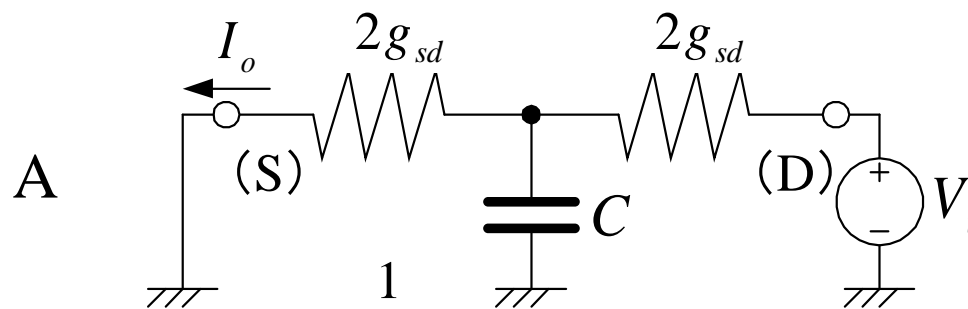
強反転状態: チャネルは均一抵抗



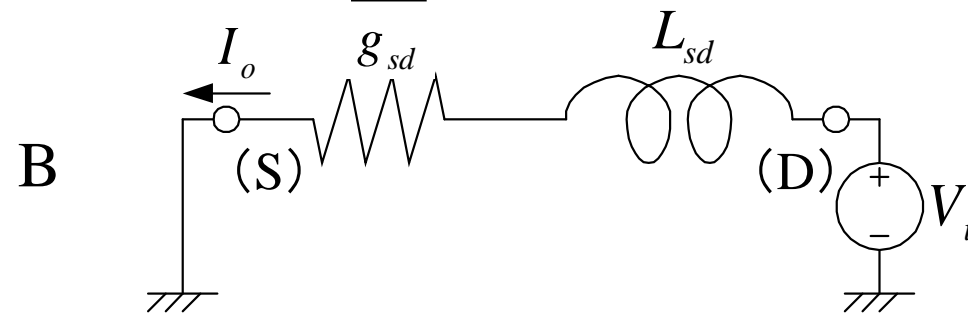
AとBで同じ



$$I_o = \frac{g_{sd}}{1 + j\omega\tau} V_i$$



$$\tau = C / (4g_{sd})$$



$$\tau = L_{sd} g_{sd}$$

# 完全QSモデルとNQSモデルの比較

$\omega\tau_1 \ll 1$ の場合、 $(1 + j\omega\tau_1)^{-1} \approx 1 - j\omega\tau_1$ であるから、

$$-y_{sd} \approx g_{sd} - j\omega\tau_1 g_{sd}, \quad \omega\tau_1 \ll 1$$

$$y_m \approx g_m - j\omega\tau_1 g_m, \quad \omega\tau_1 \ll 1$$

$$y_{mb} \approx g_{mb} - j\omega\tau_1 g_{mb}, \quad \omega\tau_1 \ll 1$$

となる。完全QSモデルの場合、

$$-y_{sd} = g_{sd} + j\omega C_{sd}$$

$$y_m = g_m - j\omega C_m$$

$$y_{mb} = g_{mb} - j\omega C_{mb}$$

であるから、

$$\tau_1 g_{sd} = -C_{sd}, \quad \tau_1 g_m = C_m, \quad \tau_1 g_{mb} = C_{mb}$$

となり、NQSモデルは完全QSモデルになる。但し、 $C_{mx}$ は無視する。

# 複素数係数を用いない等価回路

$$\frac{g_m}{1 + j\omega\tau_1} V_{gs} = g_m V_1$$

$$\frac{g_{mb}}{1 + j\omega\tau_1} V_{bs} = g_{mb} V_2$$

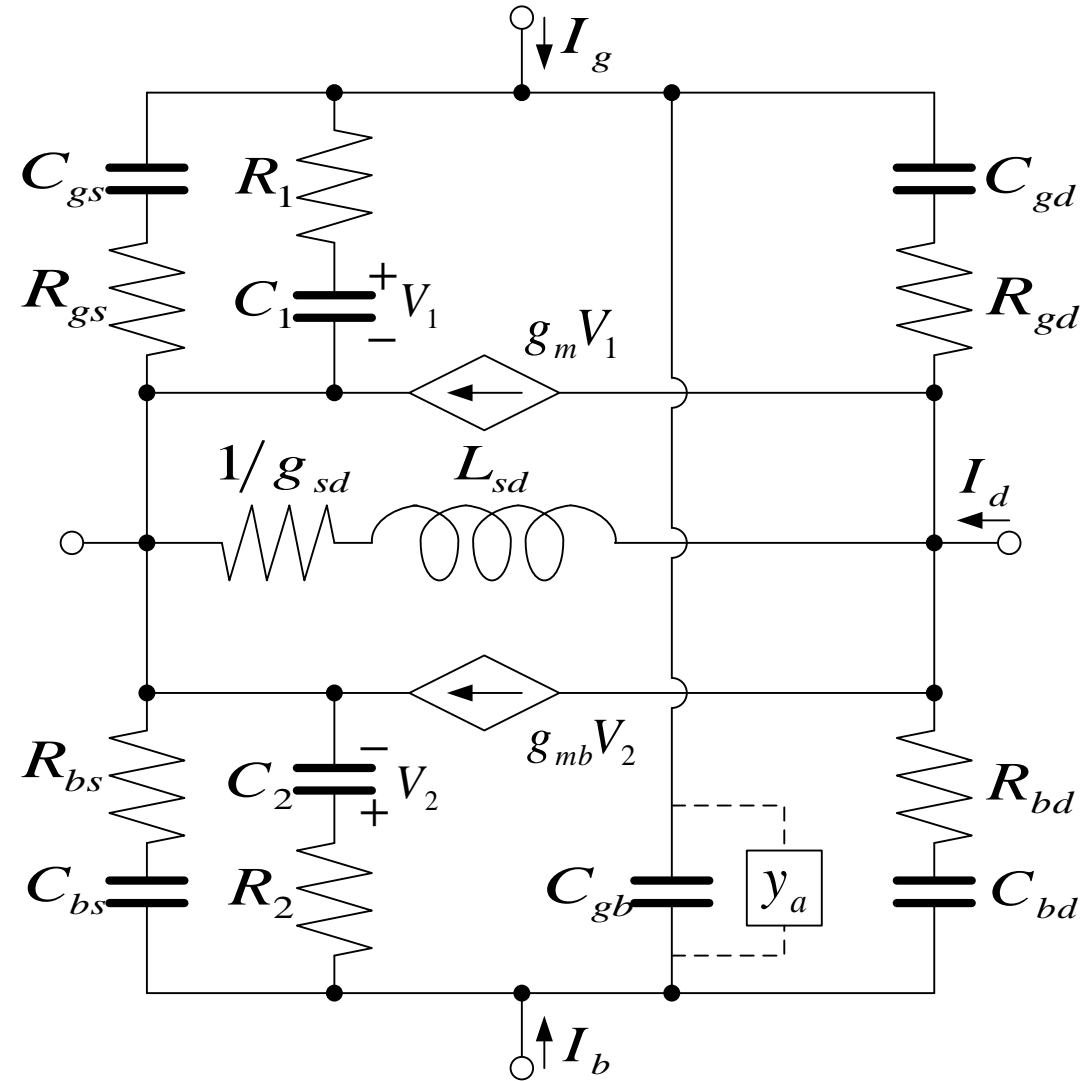
$$V_1 = \frac{1}{1 + j\omega\tau_1} V_{gs}$$

$$V_2 = \frac{1}{1 + j\omega\tau_1} V_{bs}$$

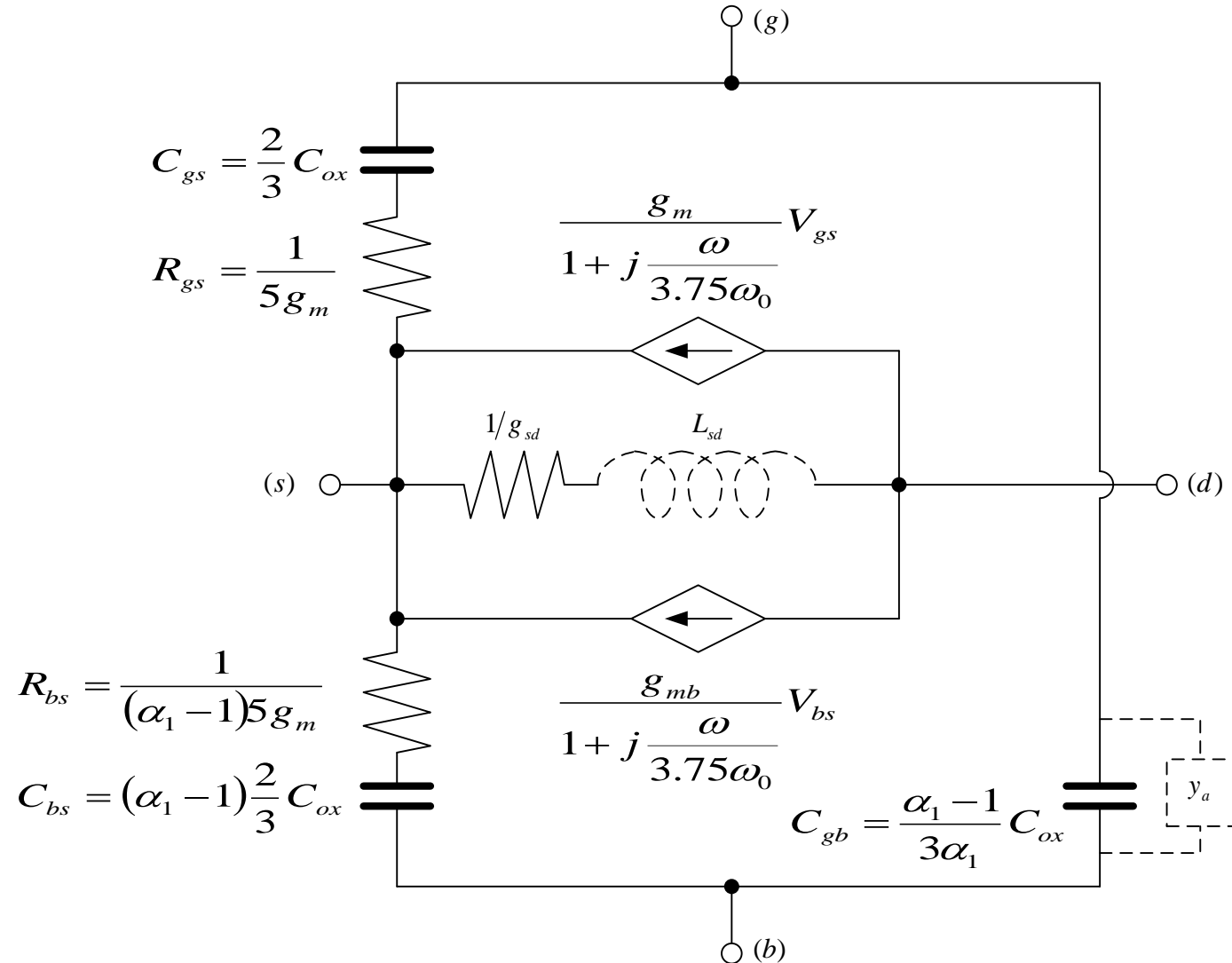
$$\tau_1 = R_1 C_1 = R_2 C_2$$

$$C_1 = 0.001 C_{gs}, R_1 = \frac{\tau_1}{C_1}$$

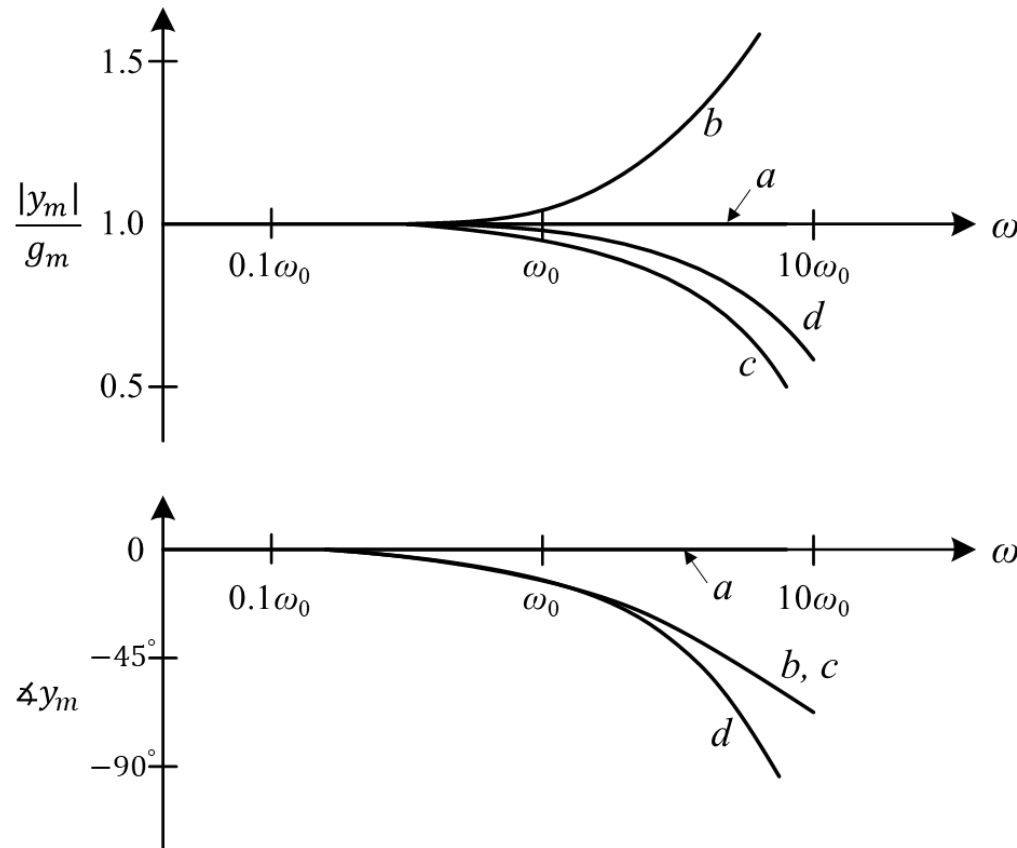
$$C_2 = 0.001 C_{bs}, R_2 = \frac{\tau_1}{C_2}$$



# 飽和領域での等価回路



# $y_m$ の規格化された大きさと位相 vs. $\omega$

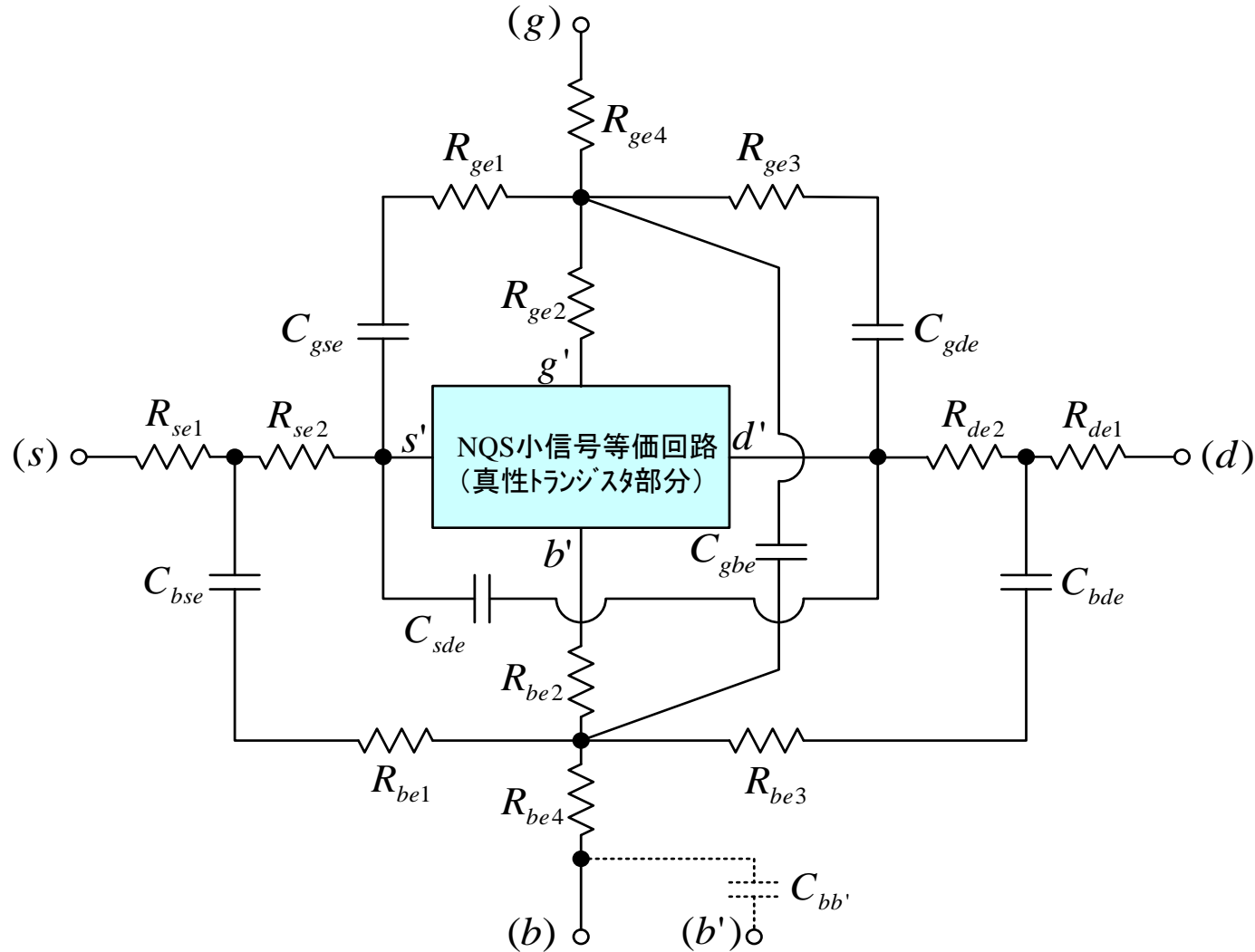


a: 低/中間周波モデル  $\sim \omega_0/10$   
 b: 完全QSモデル  $\sim \omega_0/3$   
 c: NQS(高周波)モデル  $\sim \omega_0$   
 d: 高次項含むモデル  $\sim 10\omega_0$

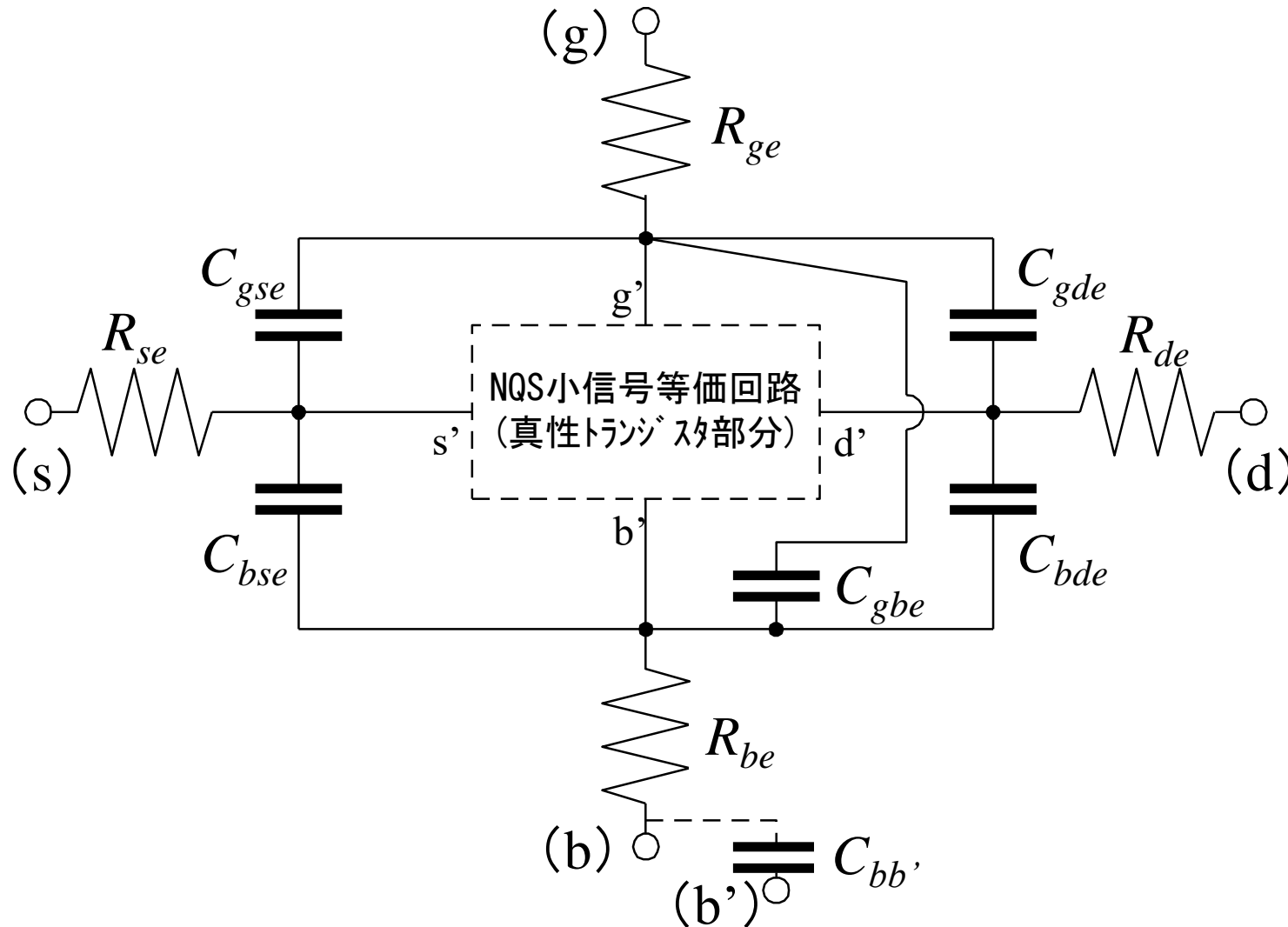
$$\omega_0 = \frac{\mu(V_{GS} - V_T)}{\alpha L^2}$$

M. Bagheri and Y. Tsididis, "A small-signal dc-to-high-frequency nonquasi-static model for the four-terminal MOSFET valid in all regions of operations," IEEE Transactions on Electron Devices, vol. ED-32, pp. 2383-2391, November 1985.

# 完全トランジスタの小信号モデル

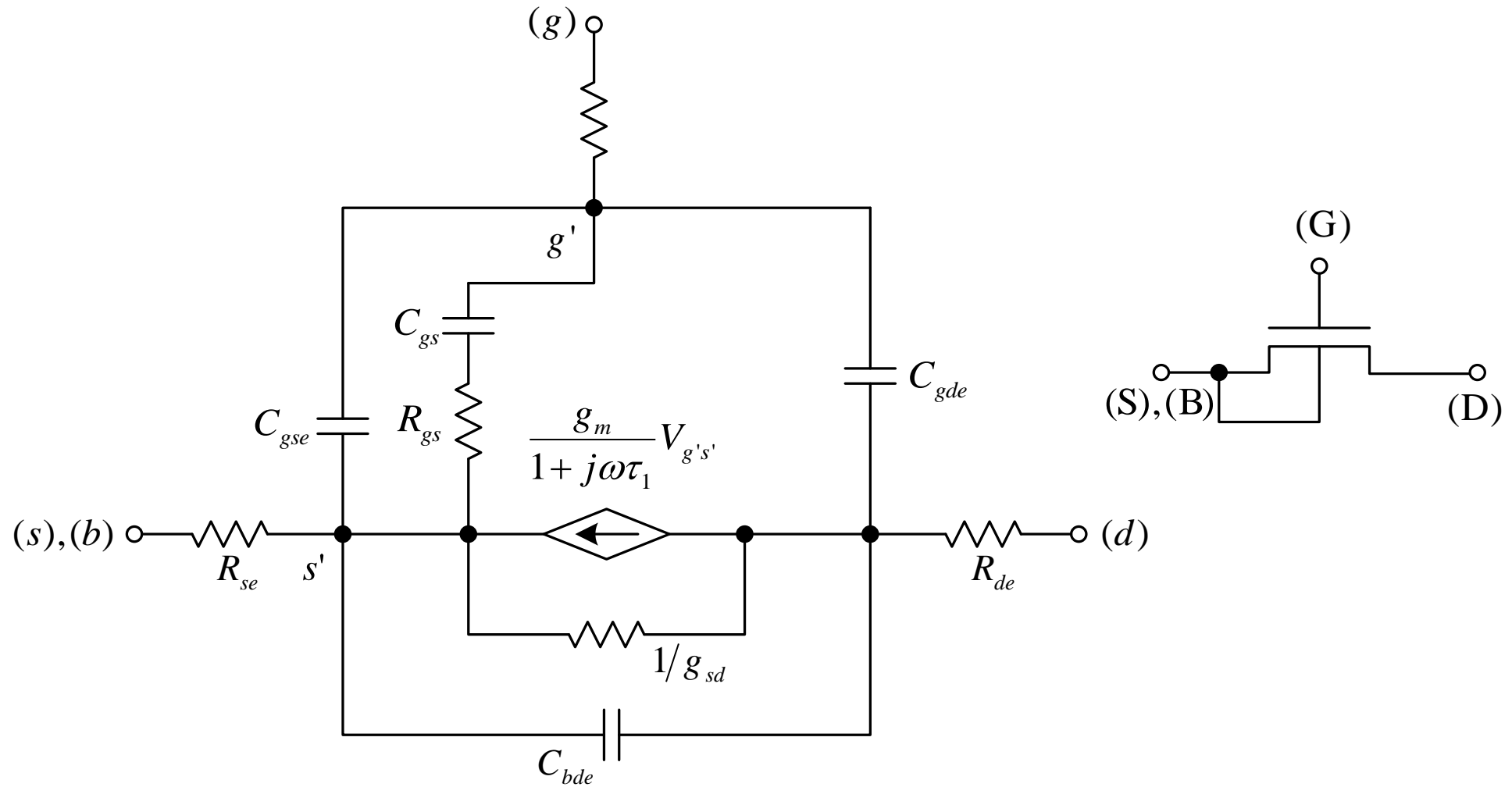


# 完全トランジスタの小信号モデル(実用的)





# ソースと基板を短絡した場合の小信号モデル: 飽和状態

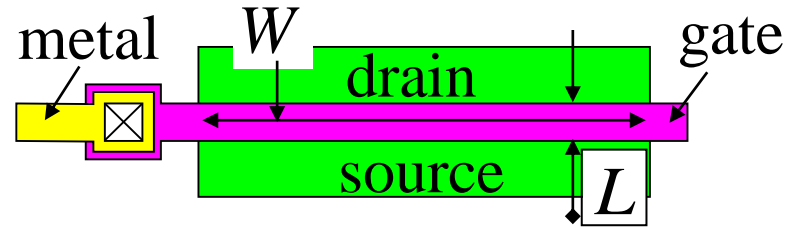


# ゲート抵抗の分布

片側コンタクトの場合の実効ゲート抵抗

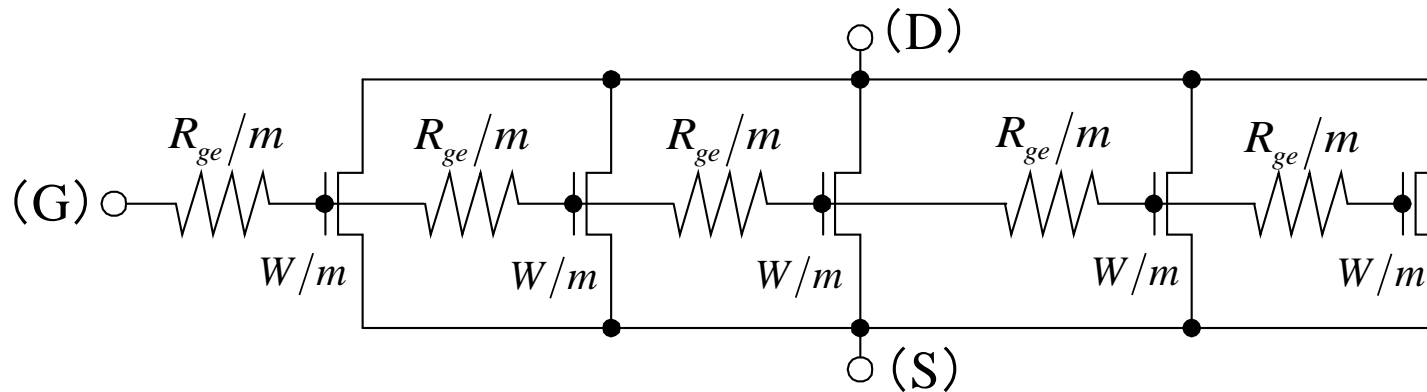
$$R_{ge,eff} = \frac{1}{3} \frac{W}{L} R_{\square}$$

$R_{\square}$  : ゲートのシート抵抗



両側コンタクトの場合の実効ゲート抵抗

$$R_{ge,eff} = \frac{1}{12} \frac{W}{L} R_{\square}$$



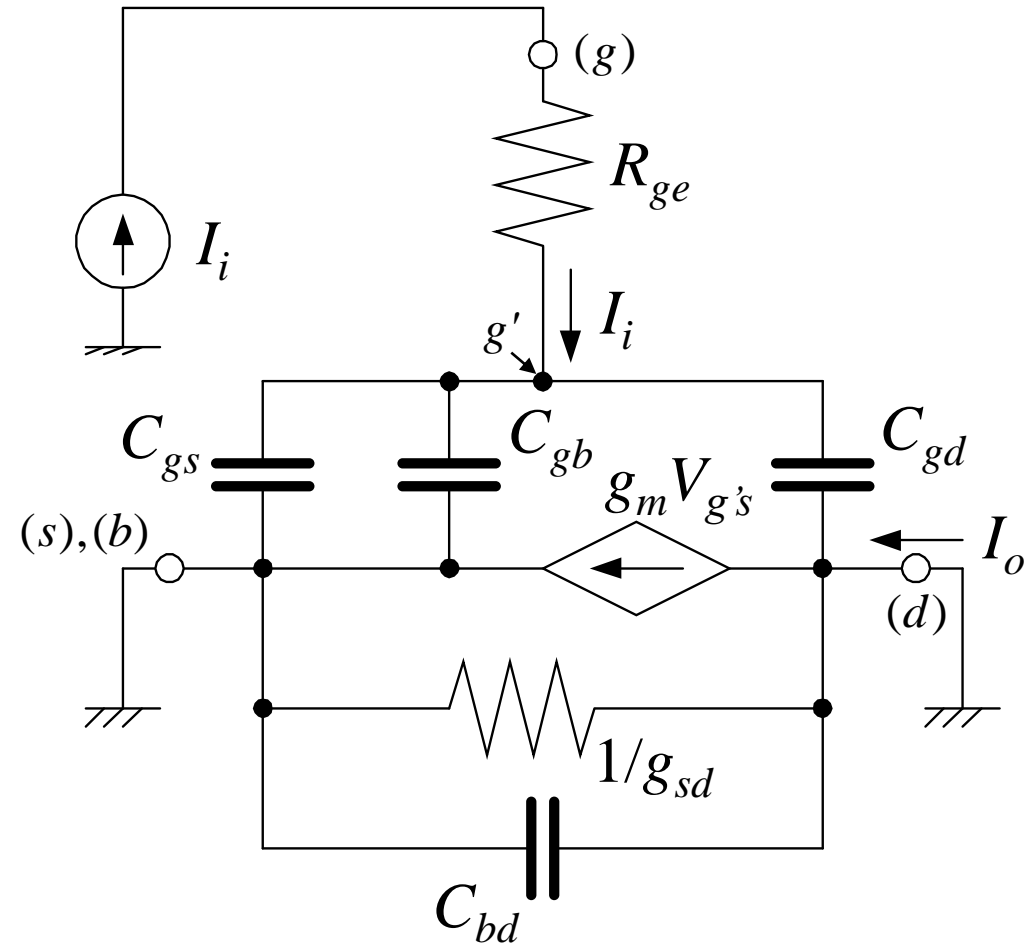
# トランジション周波数評価回路

出力電流

$$I_o \cong g_m V_{g's} = \frac{g_m I_i}{j\omega C_g}$$

(1)  $C_g = C_{gs} + C_{gb} + C_{gd}$   
 $\Rightarrow$  真性 + 外部容量

(2)  $C_{gd}, C_{bd}, 1/g_{sd}$   
 を流れる電流  $\Rightarrow$  無視



# トランジション周波数

真性部分と外部の容量成分を含めたゲート（ $g'$ ）～グランド間の容量 $C_g (= C_{gs} + C_{gb} + C_{gd})$ を使うと、ゲート（ $g'$ ）～グランド間の電圧 $V_{g's}$ は $I_i / j\omega C_g$ である。また、出力電流は $I_o = g_m V_{g's} = g_m I_i / j\omega C_g$ となる。ここで、 $g_{sd}, C_{bd}, C_{gd}$ に流れる電流を無視してある。したがって、この場合の利得は、 $I_o / I_i = g_m / j\omega C_g$ である。トランジション周波数 $\omega_T$ は、 $|I_o / I_i| = 1$ から、以下になる。

$$\omega_T = \frac{g_m}{C_g}$$

速度飽和がない場合、 $g_m = \frac{W}{L} \frac{\mu C_{ox}'}{\alpha} (V_{GS} - V_T)$ 、 $V_{DS} > V_{DS}'$ 、 $C_g = C_{ox}' WL$ とすると、 $\omega_T$ は以下になる。

$$\omega_T = \frac{\mu(V_{GS} - V_T)}{\alpha L^2} = \omega_0$$

速度飽和がある場合、 $g_m \approx WC_{ox}' |v_d|_{\max}$ から、 $\omega_T$ は以下になる。

$$\omega_T = \frac{|v_d|_{\max}}{L}$$

# 最大周波数

最大周波数 : Unity Power Gain Frequency

$\omega_{\max}$  : Power Gain = 1, Power Gain = (Load Power) / (Input Power)

一方向(フィードバックのない) 場合のPower Gainは

$$\omega_T^2 / [4R_{ge} \omega^2 (g_{sd} + \omega_T C_{gd})]$$

となる。これが1のところの $\omega$ が $\omega_{\max}$ となる。

$$\omega_{\max} \approx \frac{\omega_T}{\sqrt{4R_{ge,eff} (g_{sd} + \omega_T C_{gd})}}, \quad R_{se} \ll R_{ge}, R_{ge} \Rightarrow R_{ge,eff}$$

$R_{ge,eff}$  を小さくすることが $\omega_{\max}$  を大きくする。

⇒ シリサイドゲート、メタルゲート、

マルチコンタクト、デバイスの分割 (寄生容量に注意)