令和4年度　集積回路設計技術・次世代集積回路工学特論資料

4端子MOSトランジスタ

群馬大学
松田順一

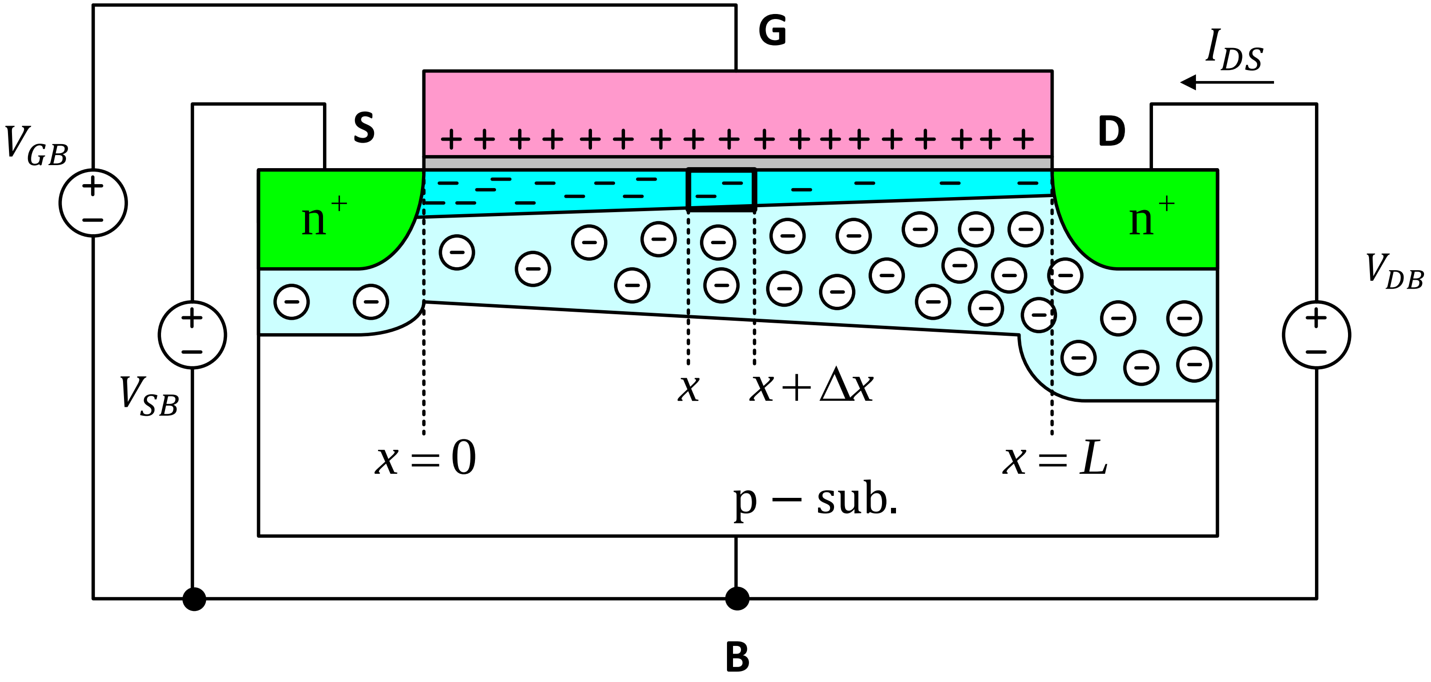
概要

- 完全チャージ・シート・モデル
- 簡易チャージ・シート・モデル
  - ソース参照モデル、対称モデル
- 強反転モデル
  - 完全対称モデル、簡易対称モデル、簡易ソース参照モデル
- 弱反転モデル
- EKV（C. C. Enz, F. Krummenacher, E. A. Vittoz）モデル
- 実効移動度
- 温度依存性
- pチャネル・トランジスタ
- 付録：擬フェルミ電位を用いたモデル（Ｐａｏ－Ｓａｈ）

（注）以下の本を参考に、本資料を作成。

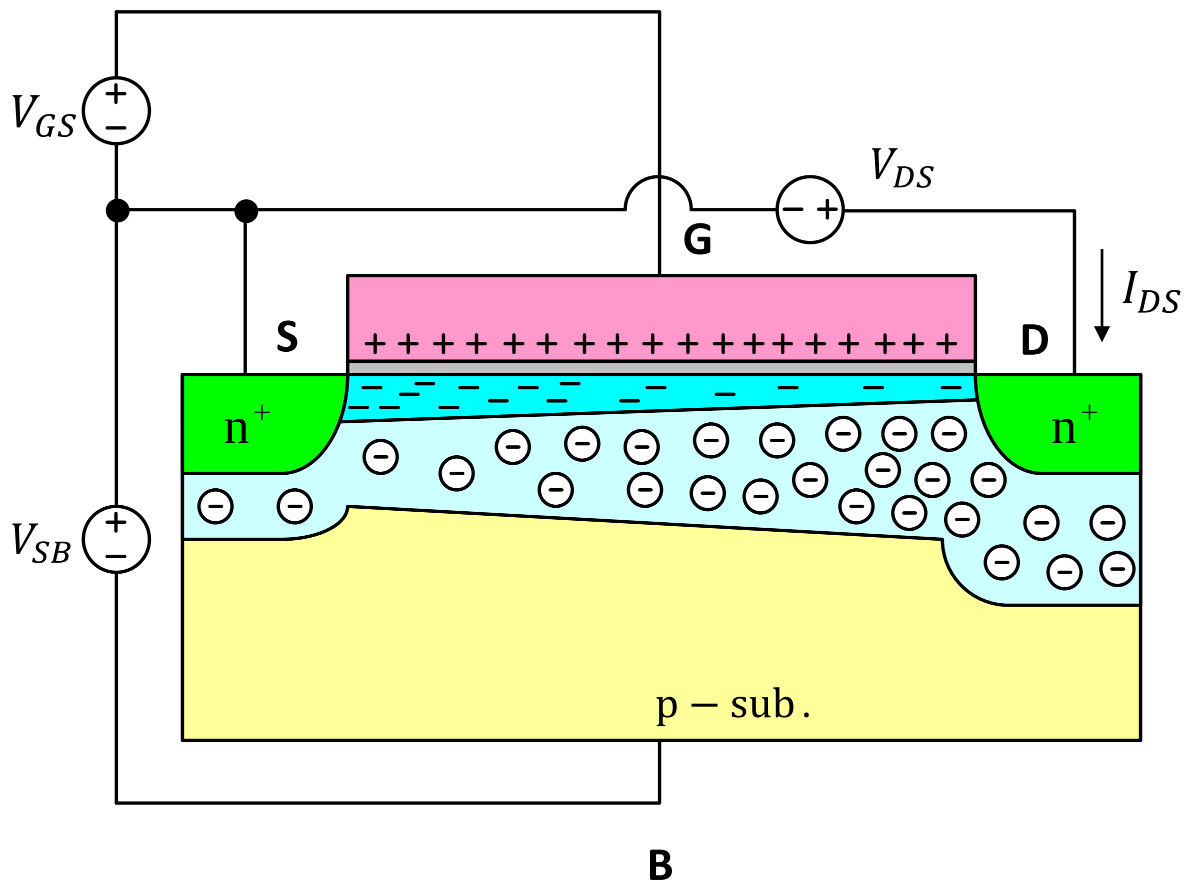
(1) Yannis Tsividis, Operation and Modeling of the MOS Transistor Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1999.
(2) Yannis Tsividis and Colin McAndrew, Operation and Modeling of the MOS Transistor Third Edition, Oxford University Press, New York, 2011.

nチャネルMOSトランジスタ
（基板に対する各端子電圧）

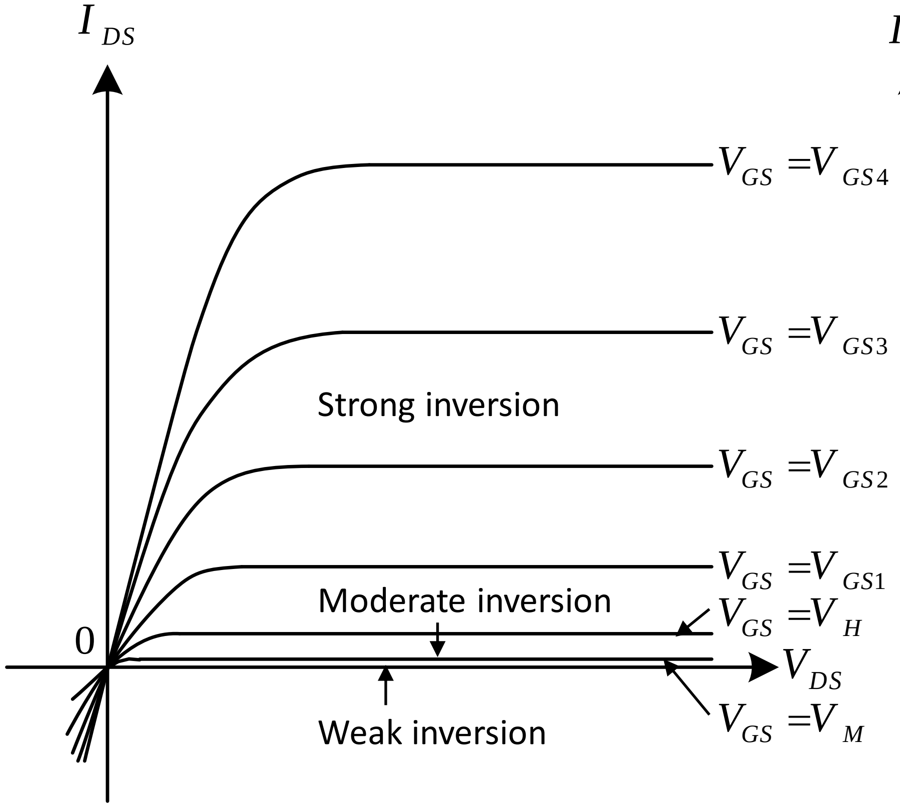


G : ゲート
D : ドレイン
S : ソース
B : 基板

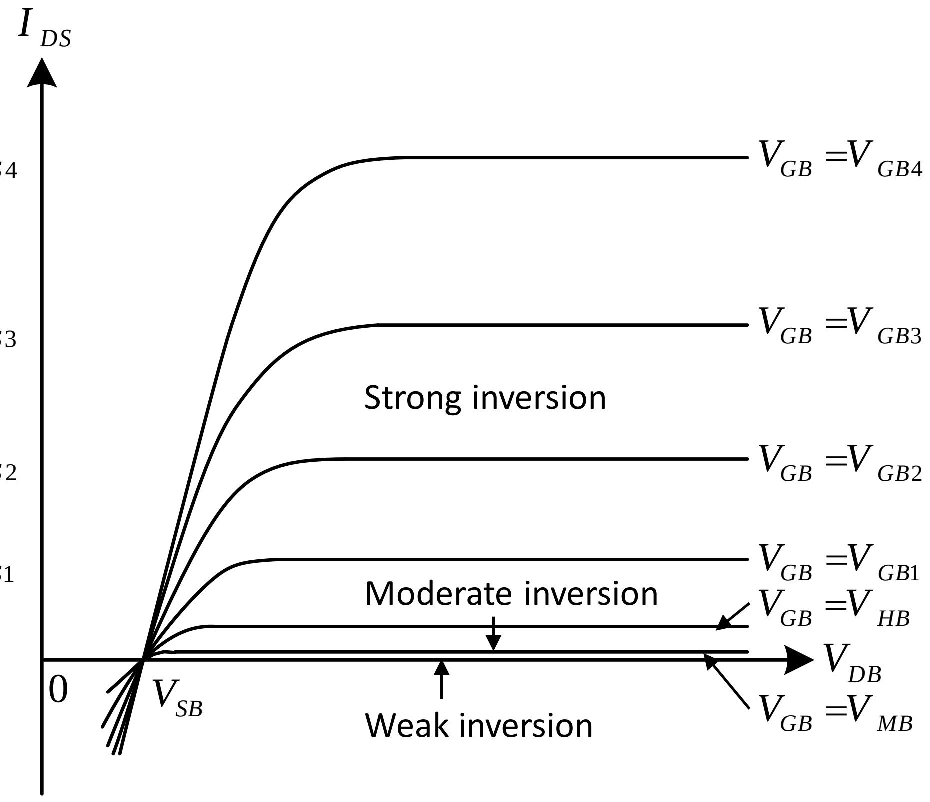
nチャネルMOSトランジスタ
（ソースに対する各端子電圧）



電流電圧特性

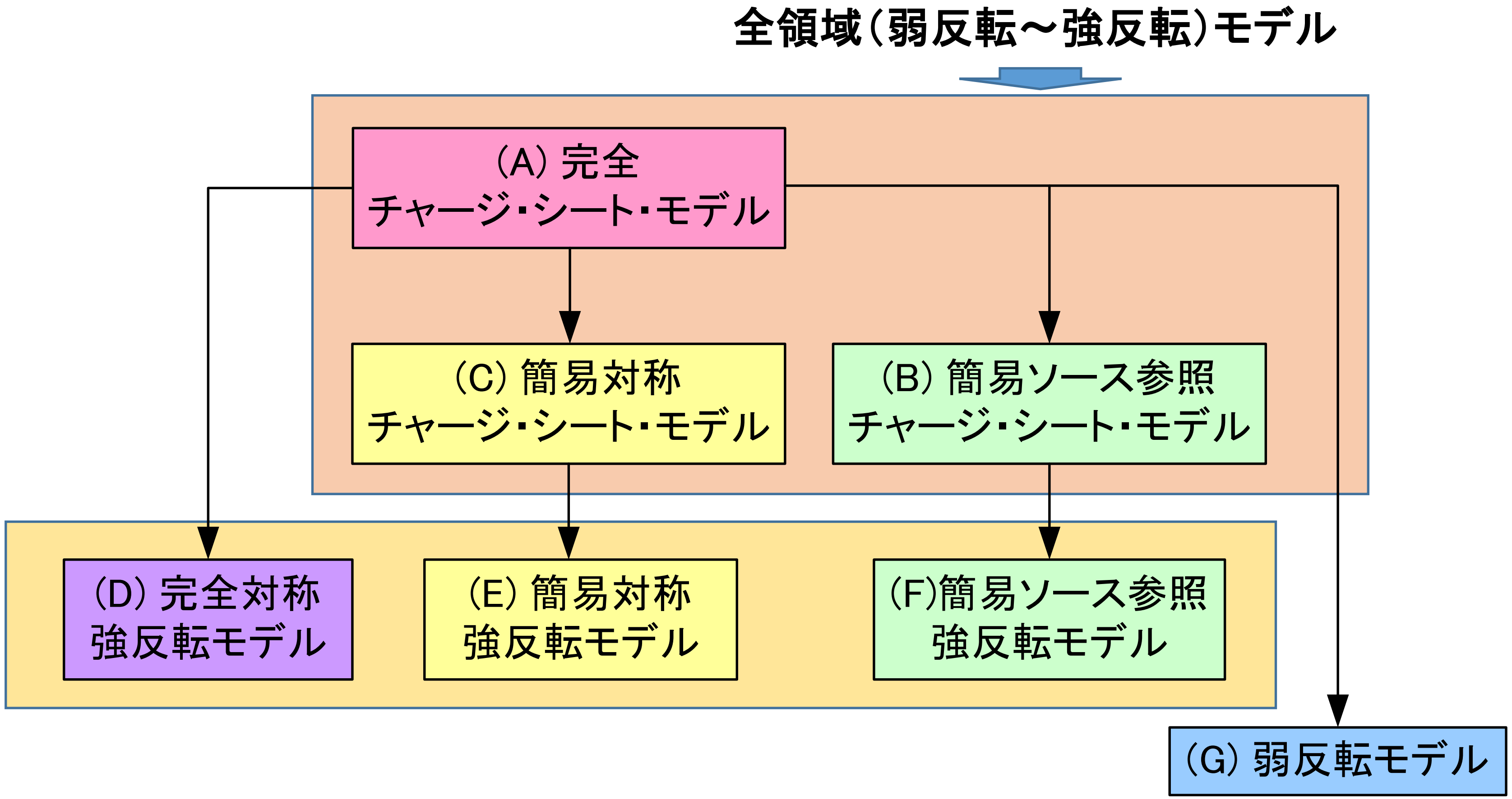


ソース基準の I_{DS}-V_{DS} 特性

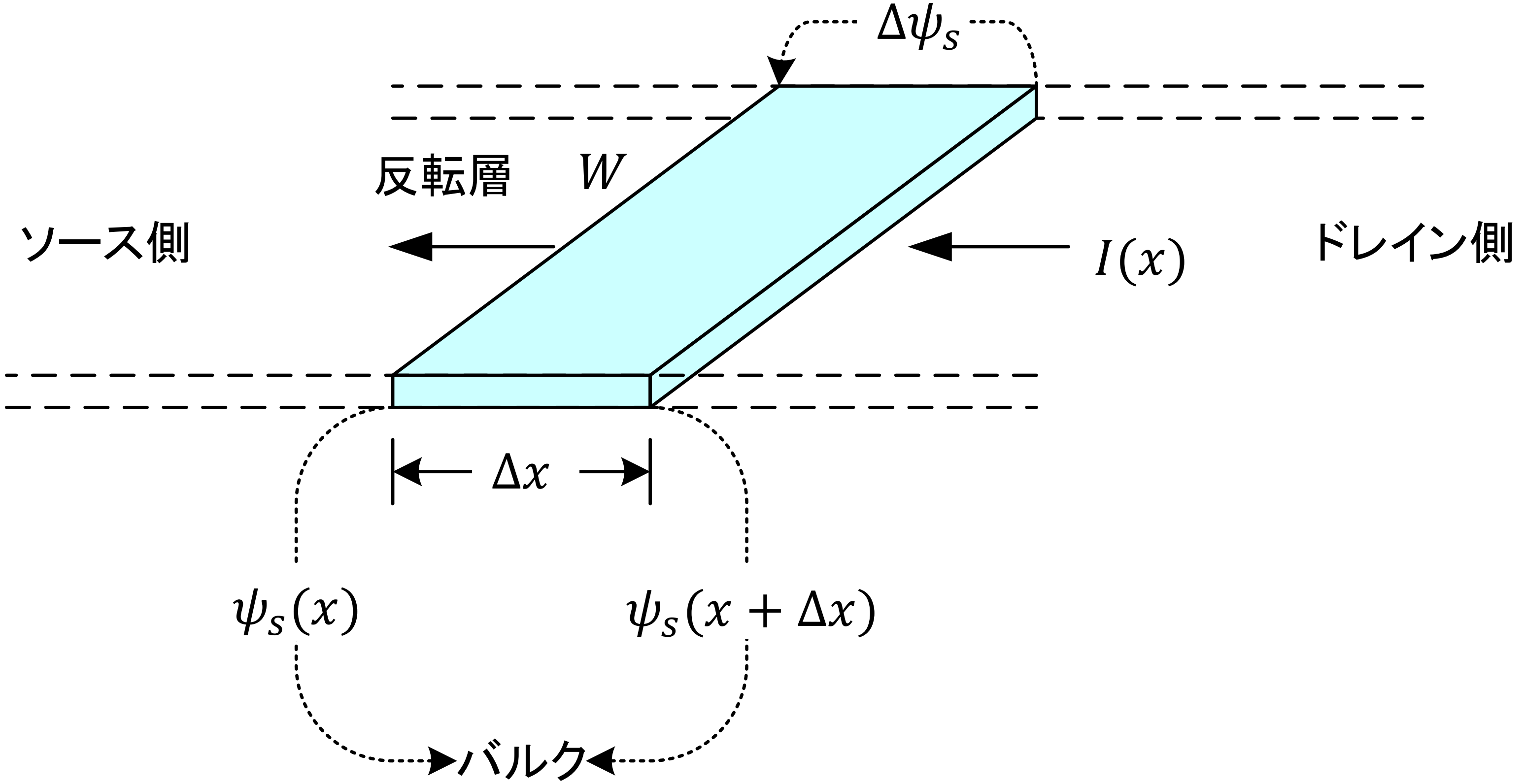


基板基準の I_{DS}-V_{DS} 特性

電流式モデルの階層


全領域（弱反転～強反転）モデル
（A）完全
チャージ・シート・モデル
（C）簡易対称
チャージ・シート・モデル
（B）簡易ソース参照
チャージ・シート・モデル
（D）完全対称
強反転モデル
（E）簡易対称
強反転モデル
（F）簡易ソース参照
強反転モデル
（G）弱反転モデル

反転層の微小要素



(A)完全チャージ･シート･モデルの導出(1)

チャネル内の点 x における電流$I(x)$は、ドリフト電流 + 拡散電流から、

$$I(x) = \mu W(-Q_I')\frac{d\psi_s}{dx} + \mu W\phi_t\frac{dQ_I'}{dx}$$

となる。これを$x = 0$から$x = L$まで積分すると、

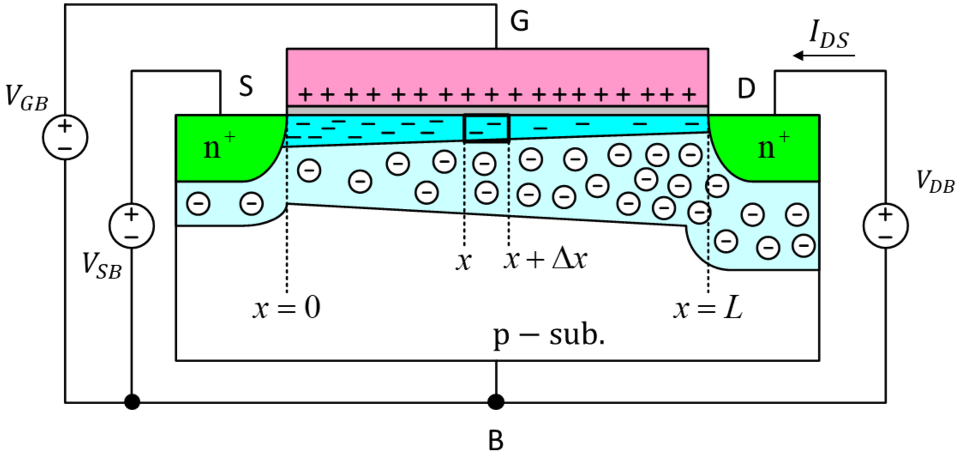
$$\int_0^L I_{DS}dx = W\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} \mu(-Q_I')\,d\psi_s + W\phi_t\int_{Q_{I0}'}^{Q_{IL}'} \mu\,dQ_I'$$

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\left[\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} \mu(-Q_I')\,d\psi_s + \phi_t\int_{Q_{I0}'}^{Q_{IL}'} \mu\,dQ_I'\right]$$

ここで、

$$I_{DS1} = \frac{W}{L}\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} \mu(-Q_I')\,d\psi_s,\quad I_{DS2} = \frac{W}{L}\phi_t\int_{Q_{I0}'}^{Q_{IL}'} \mu\,dQ_I'$$

ドリフト電流　　　　拡散電流



$\psi_s\big|_{x=0} = \psi_{s0}$ （ソース端の表面電位）

$\psi_s\big|_{x=L} = \psi_{sL}$ （ドレイン端の表面電位）

$Q_I'\big|_{x=0} = Q_{I0}'$ （ソース端の反転層電荷密度）

$Q_I'\big|_{x=L} = Q_{IL}'$ （ドレイン端の反転層電荷密度）

(A)完全チャージ･シート･モデルの導出(2)

移動度を一定として、積分の外に出すと、

$$I_{DS1} = \frac{W}{L}\mu \int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}} (-Q_I')\,d\psi_s, \quad I_{DS2} = \frac{W}{L}\mu\phi_t(Q_{IL}' - Q_{I0}')$$

となる。ここで、Q_I'は

$$Q_I' = -C_{ox}'\left(V_{GB} - V_{FB} - \psi_s + \frac{Q_B'}{C_{OX}'}\right) = -C_{ox}'\left(V_{GB} - V_{FB} - \psi_s - \gamma\sqrt{\psi_S}\right) \quad (\because Q_B' = -\gamma C_{ox}'\sqrt{\psi_s})$$

で与えられるから、I_{DS1}とI_{DS2}は以下になる。

$$\boldsymbol{I_{DS1} = \frac{W}{L}\mu C_{ox}'\left[(V_{GB} - V_{FB})(\psi_{sL} - \psi_{s0}) - \frac{1}{2}(\psi_{sL}^2 - \psi_{s0}^2) - \frac{2}{3}\gamma\left(\psi_{sL}^{3/2} - \psi_{s0}^{3/2}\right)\right]}$$ **⇒ドリフト電流**

$$\boldsymbol{I_{DS2} = \frac{W}{L}\mu C_{ox}'\left[\phi_t(\psi_{sL} - \psi_{s0}) + \phi_t\gamma\left(\psi_{sL}^{1/2} - \psi_{s0}^{1/2}\right)\right]}$$ **⇒拡散電流**

（A）完全チャージ・シート・モデルの導出（３）

以下のV_{GB}とψ_sの関係式において

$$V_{GB} = V_{FB} + \psi_s + \gamma\sqrt{\psi_s + \phi_t e^{[\psi_s - (2\phi_F + V_{CB})]/\phi_t}}$$

ソース端：$V_{CB} \Rightarrow V_{SB}$、ドレイン端：$V_{CB} \Rightarrow V_{DB}$
とすると、ψ_{s0}とψ_{sL}は、

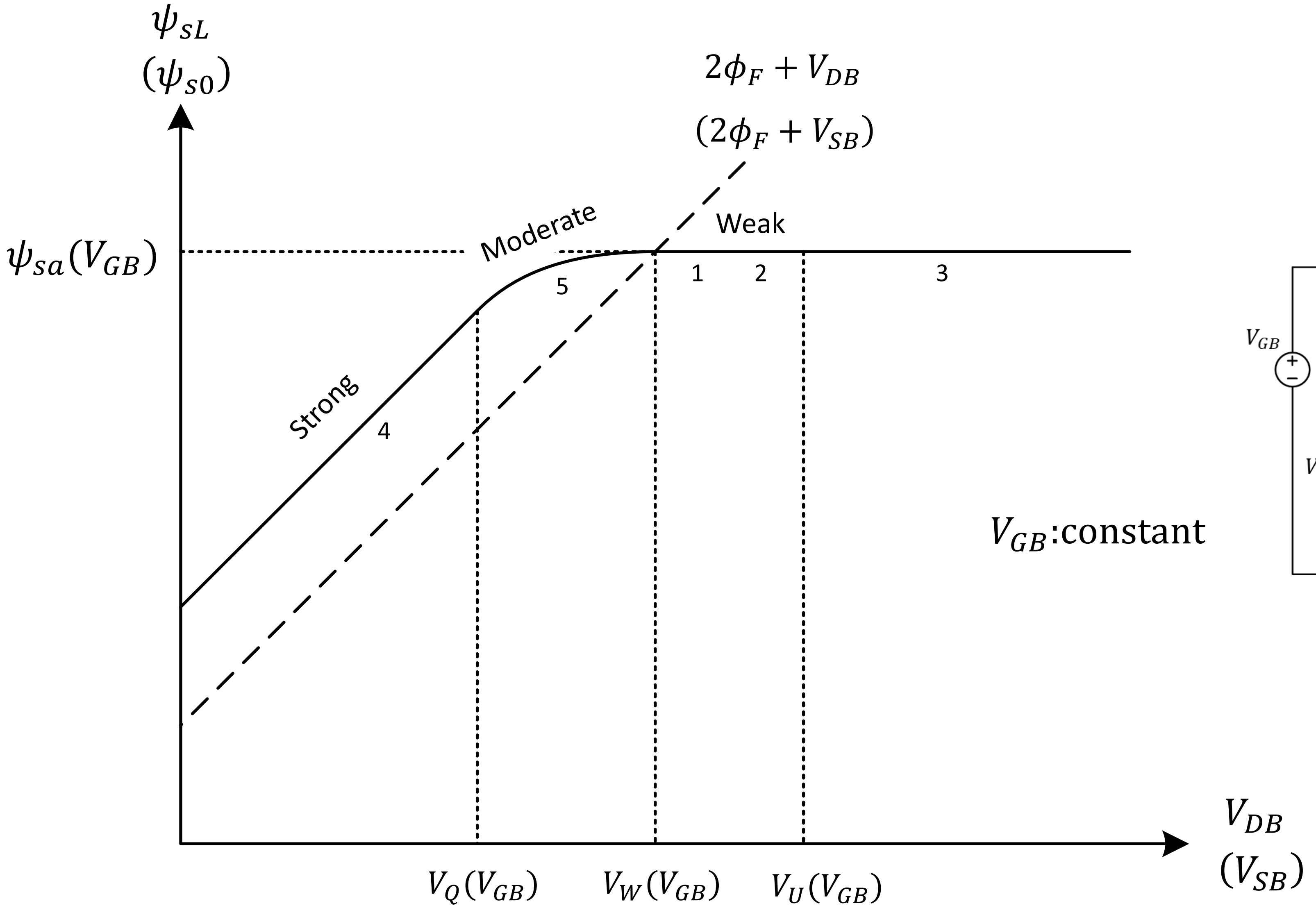
$$\psi_{s0} = V_{GB} - V_{FB} - \gamma\sqrt{\psi_{s0} + \phi_t e^{[\psi_{s0} - (2\phi_F + V_{SB})]/\phi_t}}$$

$$\psi_{sL} = V_{GB} - V_{FB} - \gamma\sqrt{\psi_{sL} + \phi_t e^{[\psi_{sL} - (2\phi_F + V_{DB})]/\phi_t}}$$

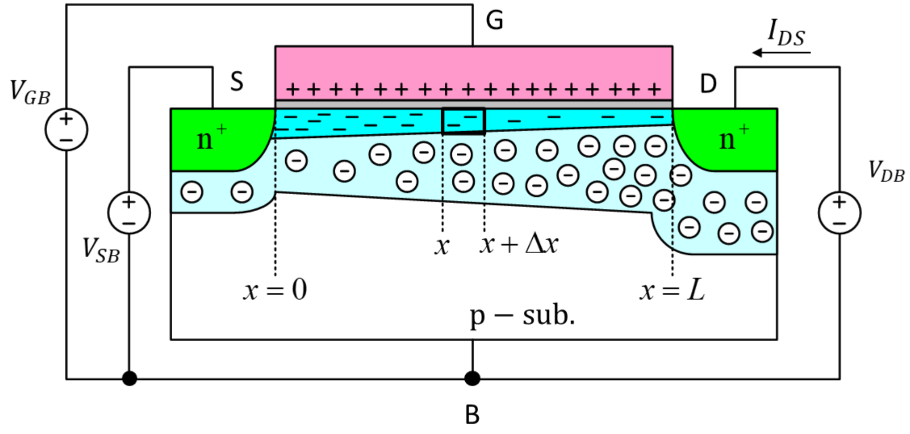
となる。

表面電位（ψ_{s0}, ψ_{sL}）とV_{GB}の関係は解析的には解けない

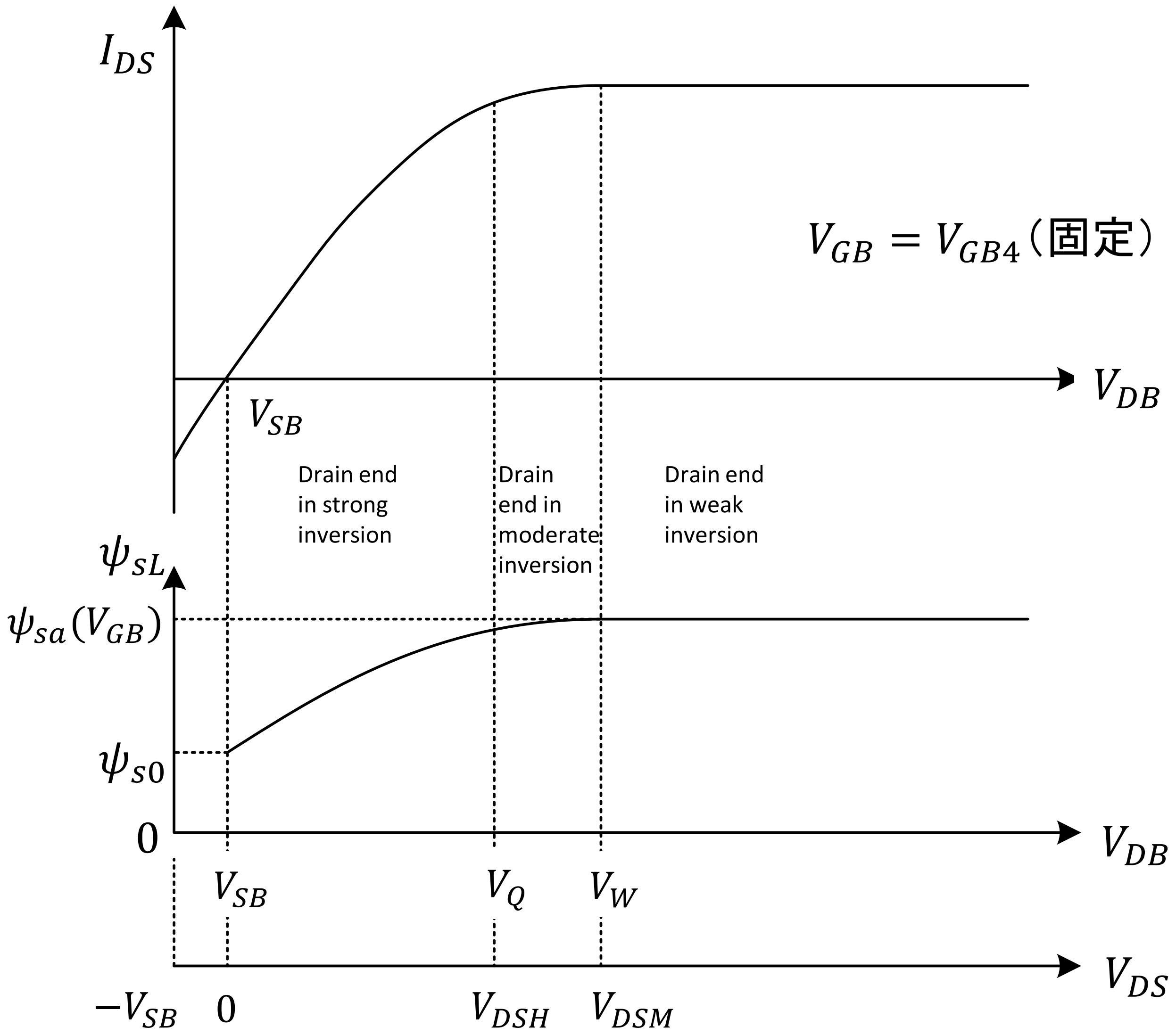
(A)ドレイン端での表面電位とドレイン基板間電圧

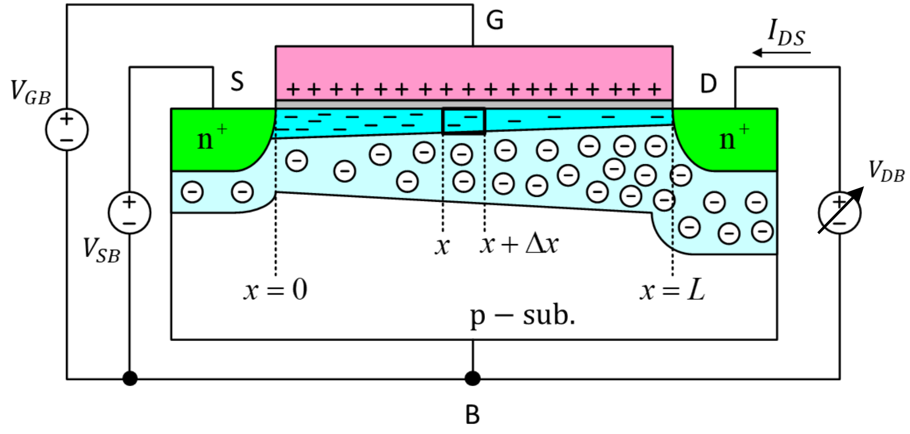


V_{GB}:constant

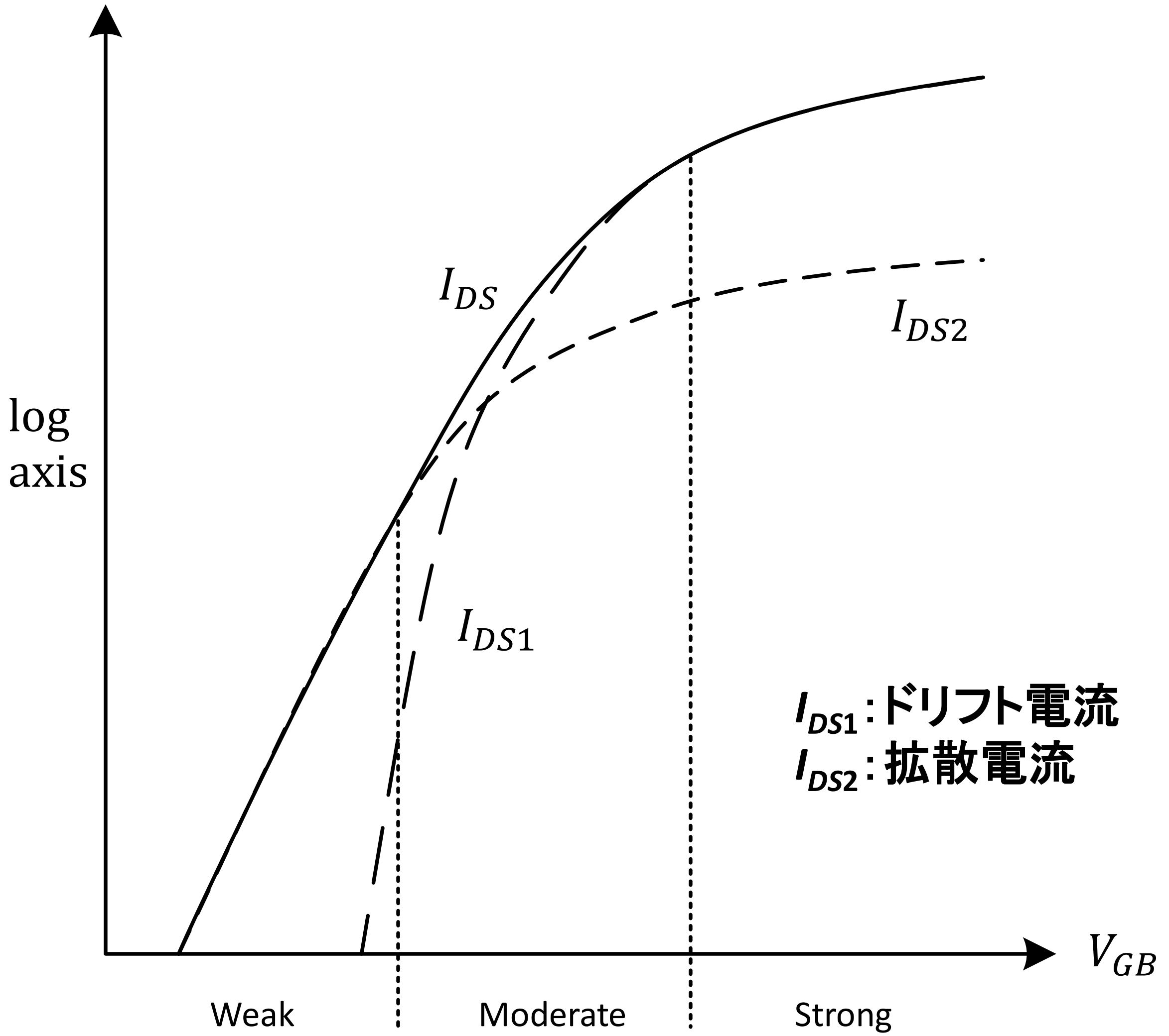


(A) I_{DS}–V_{DB}特性と表面電位との関係





(A)ドレイン～ソース電流成分



I_{DS1}:ドリフト電流
I_{DS2}:拡散電流

完全チャージシートモデル式によって弱反転、中（緩やかな）反転、強反転の全領域を表せる

(A)完全チャージ・シート・モデル式の対称性

完全なチャージ・シート・モデルは、以下に変形できる。

$I_{DS1}+I_{DS2}$から

$$I_{DS}=\frac{W}{L}[f(\psi_{sL})-f(\psi_{s0})]$$

ここで、

$$f(\psi_s)=\mu C'_{ox}\left[(V_{GB}-V_{FB}+\phi_t)\psi_s-\frac{1}{2}\psi_s^2-\frac{2}{3}\gamma\psi_s^{3/2}+\phi_t\gamma\psi_s^{1/2}\right]$$

これは、ソースとドレインを入れ替えても同じ式になる。

（A）チャネル内の表面電位と反転層電荷

電流式が、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}[f(\psi_{sL}) - f(\psi_{s0})]$$

であるから、xにおける電流は、以下で表される。

$$I_{DS} = \frac{W}{x}[f(\psi_s(x)) - f(\psi_{s0})]$$

したがって、

$$\frac{x}{L} = \frac{f\left(\psi_s(x)\right) - f(\psi_{s0})}{f(\psi_{sL}) - f(\psi_{s0})}$$

これが、xにおけるψ_sを与える。また、以下のQ_I'の式から、xにおけるQ_I'も求まる。

$$Q_I' = -C_{ox}'\left(V_{GB} - V_{FB} - \psi_s - \gamma\sqrt{\psi_s}\right)$$

(B)簡易チャージ・シート・モデルの導出(1)

$-\dfrac{Q_B'}{C_{ox}'}$を簡単化する。　　　　⇒ p. 9のQ_I'参照

$\psi_s = \psi_{se}$（ψ_{s0}〜ψ_{sa}までの任意点）でテイラー展開する。

$$\left\{\begin{array}{l} f(\psi_s) = f(\psi_{se}) + \left.\dfrac{df(\psi_s)}{d\psi_s}\right|_{\psi_s=\psi_{se}} (\psi_s - \psi_{se}) \\ f(\psi_s) = -\dfrac{Q_B'}{C_{ox}} = \gamma\sqrt{\psi_s} \end{array}\right.$$

$$-\frac{Q_B'}{C_{ox}'} = \gamma\sqrt{\psi_{se}} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{se}}}(\psi_s - \psi_{se}) \qquad \left(\because Q_B' = -\gamma C_{ox}'\sqrt{\psi_s}\right)$$

$$= \gamma\sqrt{\psi_{se}} + (\alpha - 1)(\psi_s - \psi_{se})$$ ここで、$\alpha = 1 + \dfrac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{se}}}$

したがって、Q_I'は次式になる。

$$Q_I' = -C_{ox}'\left[V_{GB} - V_{FB} - \psi_{se} - \gamma\sqrt{\psi_{se}} - \alpha(\psi_s - \psi_{se})\right]$$

(B)簡易チャージ･シート･モデルの導出(2)

Q'_Iから、$dQ'_I/d\psi_s=\alpha C'_{ox}$になるため、$I_{DS1}$は次式になる。

$$I_{DS1}=\frac{W}{L}\mu\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}}(-Q'_I)\,d\psi_s=\frac{W}{L}\mu\int_{Q'_{I0}}^{Q'_{IL}}(-Q'_I)\frac{1}{\alpha C'_{ox}}dQ'_I=\frac{W}{L}\frac{\mu}{2\alpha C'_{ox}}(Q'^2_{I0}-Q'^2_{IL})$$

一方、I_{DS2}は以前と変わらず、

$$I_{DS2}=\frac{W}{L}\mu\phi_t(Q'_{IL}-Q'_{I0})$$

$$\begin{cases} Q'_{IL}=-C'_{ox}\left[V_{GB}-V_{FB}-\psi_{se}-\gamma\sqrt{\psi_{se}}-\alpha(\psi_{sL}-\psi_{se})\right] \\ Q'_{I0}=-C'_{ox}\left[V_{GB}-V_{FB}-\psi_{se}-\gamma\sqrt{\psi_{se}}-\alpha(\psi_{s0}-\psi_{se})\right] \end{cases}$$

となる。したがって、次式が得られる。

$$\boldsymbol{I_{DS1}=\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[\left(V_{GB}-V_{FB}-\gamma\sqrt{\psi_{se}}-\psi_{se}+\alpha\psi_{se}\right)(\psi_{sL}-\psi_{s0})-\frac{\alpha}{2}\left(\psi^2_{sL}-\psi^2_{s0}\right)\right]}$$ **⇒ドリフト電流**

$$\boldsymbol{I_{DS2}=\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\alpha\phi_t(\psi_{sL}-\psi_{s0})}$$ **⇒拡散電流**

(B)簡易チャージ･シート･モデルの導出(3)

(ソース参照モデル(ソース端で近似): $\boldsymbol{\psi_{se} = \psi_{s0}}$ として近似)

$\psi_{se} = \psi_{s0}$ として近似すると、I_{DS1}とI_{DS2}は

$$\boldsymbol{I_{DS1} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[\left(V_{GB} - V_{FB} - \psi_{s0} - \gamma\sqrt{\psi_{s0}}\right)(\psi_{sL} - \psi_{s0}) - \frac{\alpha}{2}(\psi_{sL} - \psi_{s0})^2\right]}$$ **⇒ドリフト電流**

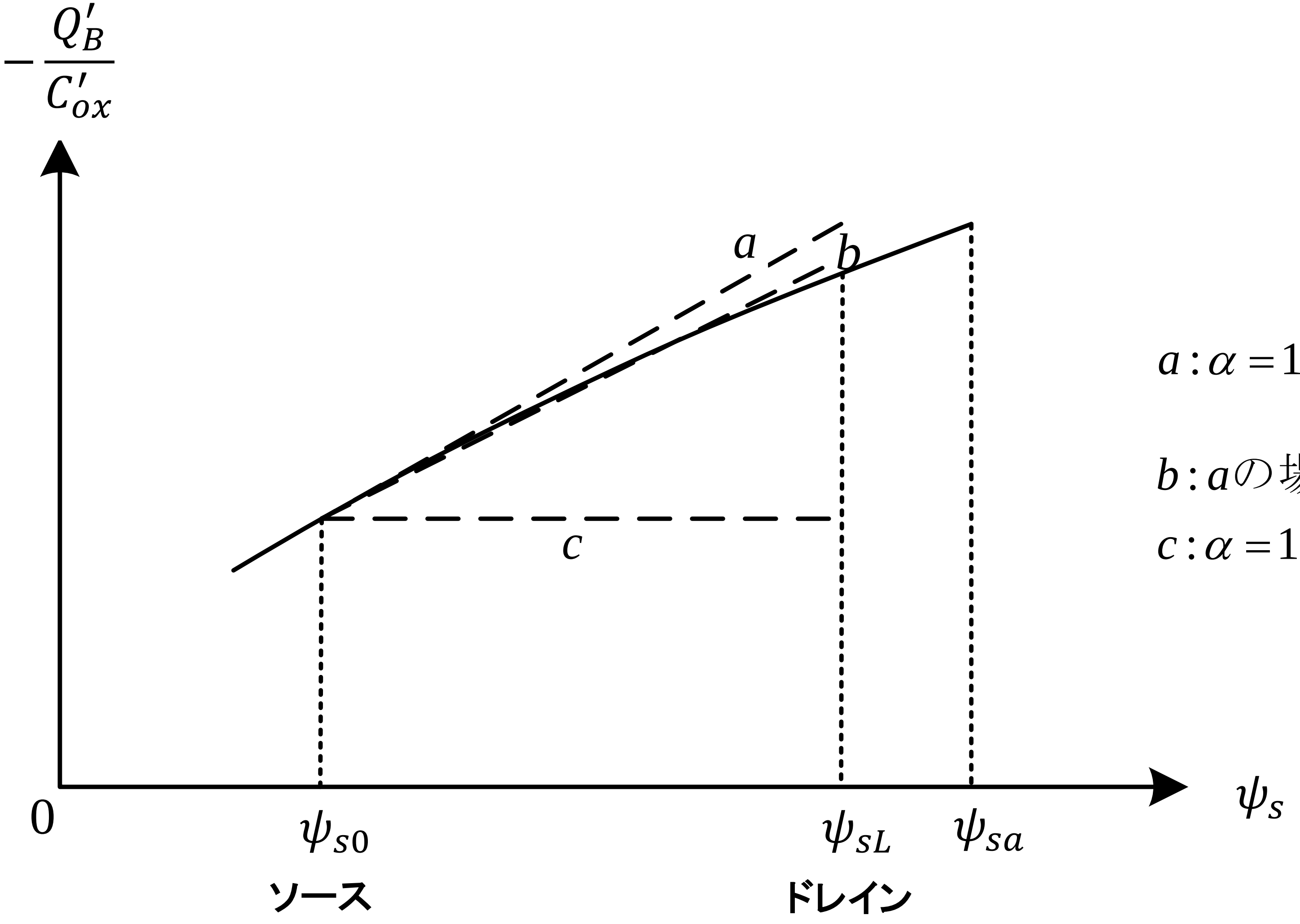
$$\boldsymbol{I_{DS2} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\phi_t\alpha(\psi_{sL} - \psi_{s0})}$$ **⇒拡散電流**

となる。また、αは

$$\alpha = \alpha_1 = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{s0}}}$$

である。

(B) $-\frac{Q'_B}{C'_{ox}}$ $vs.$ 表面電位特性の近似（ソース側での外挿）



$a: \alpha = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{s0}}}$

$b: a$の場合より僅かに小さいα

$c: \alpha = 1$

(B)簡易チャージ・シート・モデルの導出(4)

($\boldsymbol{\psi_{se} = \psi_{sa}}$ として近似)

$\psi_{se} = \psi_{sa}$ として近似すると、

$$\alpha = n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_{sa}}}$$

となり、I_{DS1}とI_{DS2}は次式になる。

$$\boldsymbol{I_{DS1} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[\left(V_{GB} - V_{FB} - \frac{\gamma}{2}\sqrt{\psi_{sa}}\right)(\psi_{sL} - \psi_{s0}) - \frac{n}{2}\left(\psi_{sL}^2 - \psi_{s0}^2\right)\right]}$$

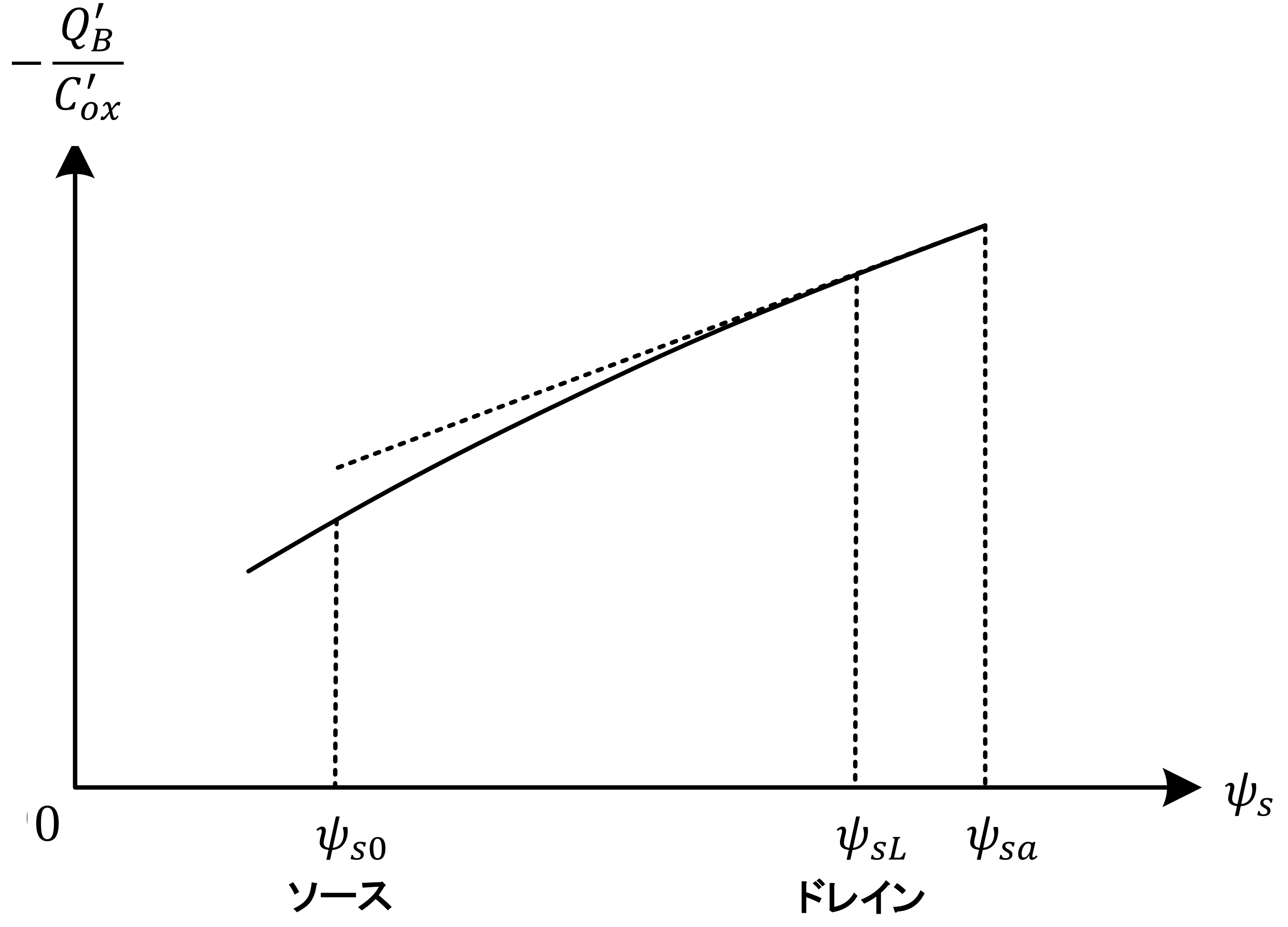
⇒ドリフト電流

$$\boldsymbol{I_{DS2} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}n\phi_t(\psi_{sL} - \psi_{s0})}$$

⇒拡散電流

⇒ $\boldsymbol{\psi_s \approx \psi_{sa}}$ では、$\boldsymbol{Q'_I \ll Q'_B}$であるため、弱反転領域にある。
⇒ $\boldsymbol{Q'_B}$が支配的であるとき、$\boldsymbol{Q'_B}$の近似の精度は良い。
⇒ $\boldsymbol{Q'_I}$が支配的であるとき、$\boldsymbol{Q'_B}$の近似の精度は良くないが、
全半導体電荷への$\boldsymbol{Q'_B}$の誤差の影響は少ない。

(B) $-\dfrac{Q_B'}{C_{ox}'}$ *vs.* 表面電位特性の近似（ψ_{sa}での外挿）



（C）順方向と逆方向電流（対称モデル）

完全チャージ・シート・モデルを簡単化した式（$\alpha \Rightarrow n$）

$$I_{DS1} = \frac{W}{L}\frac{\mu}{2nC'_{ox}}\left(Q'^2_{I0} - Q'^2_{IL}\right) \;\;,\;\; I_{DS2} = \frac{W}{L}\mu\phi_t\left(Q'_{IL} - Q'_{I0}\right)$$

⇒ p. 17参照

から、$I_{DS1} + I_{DS2}$を求めると、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\left[\frac{1}{2nC'_{ox}}\left(Q'^2_{I0} - Q'^2_{IL}\right) + \phi_t\left(Q'_{IL} - Q'_{I0}\right)\right] = \frac{W}{L}\mu\left(\frac{Q'^2_{I0}}{2nC'_{ox}} - \phi_t Q'_{I0}\right) - \frac{W}{L}\mu\left(\frac{Q'^2_{IL}}{2nC'_{ox}} - \phi_t Q'_{IL}\right)$$

$$= I_F - I_R$$

ここで、

$$\boldsymbol{I_F = \frac{W}{L}\mu\left(\frac{Q'^2_{I0}}{2nC'_{ox}} - \phi_t Q'_{I0}\right)} \quad \Rightarrow \quad I_{DS,saturation}$$ **（順方向電流）**

$$\boldsymbol{I_R = \frac{W}{L}\mu\left(\frac{Q'^2_{IL}}{2nC'_{ox}} - \phi_t Q'_{IL}\right)} \quad \Rightarrow \quad -I_{DS,rev.saturation}$$ **（逆方向電流）**

V_{DS}大：$\psi_{sL} \Rightarrow \psi_{sa}$,

$Q'_{IL} \Rightarrow 0$,

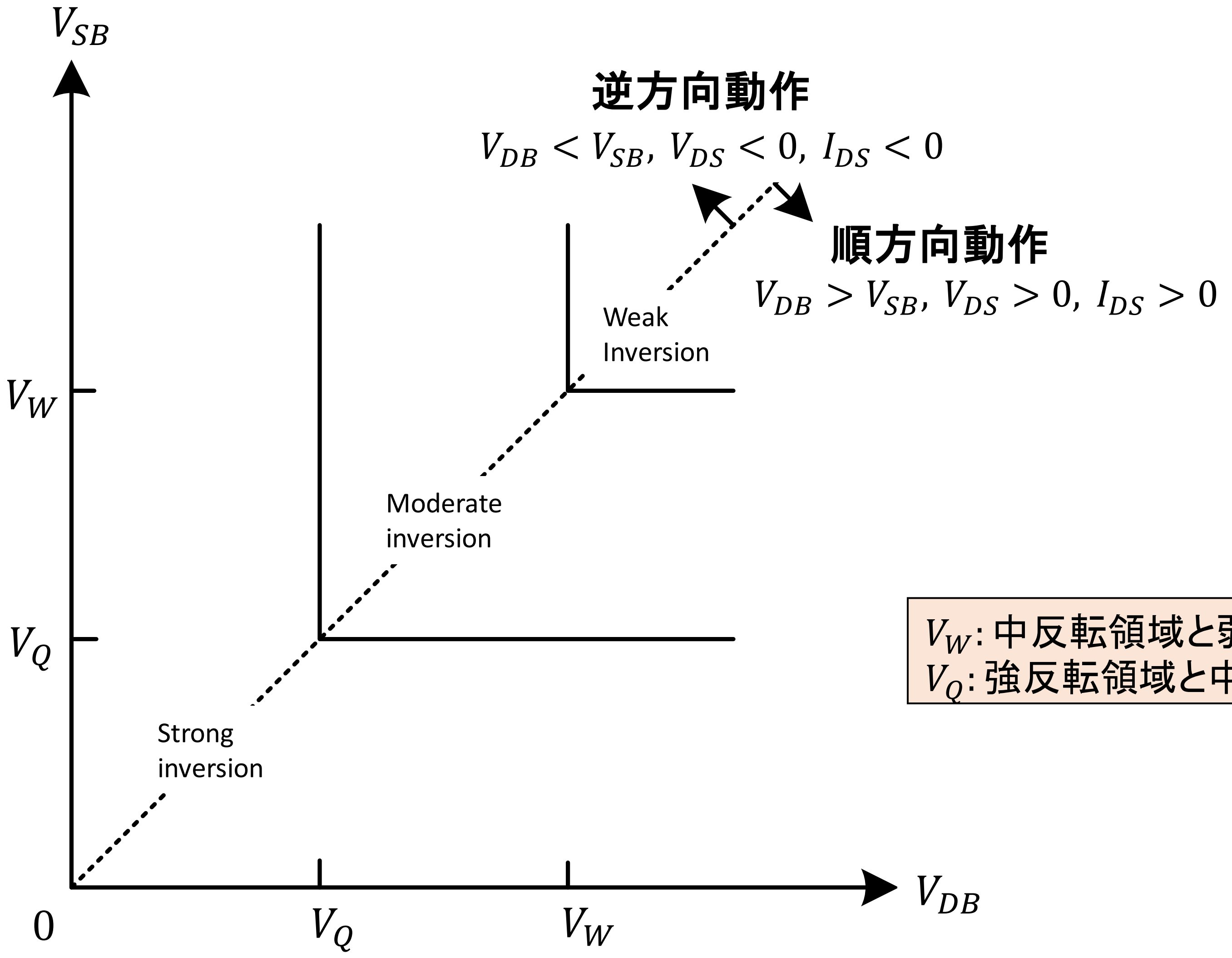
$I_R \Rightarrow 0$

V_{SB}大：$\psi_{s0} \Rightarrow \psi_{sa}$,

$Q'_{I0} \Rightarrow 0$,

$I_F \Rightarrow 0$

(C) MOSトランジスタの動作領域の定義



V_W: 中反転領域と弱反転領域の境界でのV_{SB}、またはV_{DB}
V_Q: 強反転領域と中反転領域の境界でのV_{SB}、またはV_{DB}

(D)完全対称強反転モデル

ソースとドレイン端とも強反転では、ψ_{s0}とψ_{sL}は以下で表される。

$$\psi_{s0} \approx \phi_0 + V_{SB}, \quad \psi_{sL} \approx \phi_0 + V_{DB} \qquad \left[\text{但し、}\phi_0 = 2\phi_F + \Delta\phi \quad (\Delta\phi = 6\phi_t)\right]$$

ここで、完全チャージ・シート・モデル(ドリフト成分)の以下の式を用いる。

$$I_{DS1} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[(V_{GB} - V_{FB})(\psi_{sL} - \psi_{s0}) - \frac{1}{2}(\psi_{sL}^2 - \psi_{s0}^2) - \frac{2}{3}\gamma\left(\psi_{sL}^{3/2} - \psi_{s0}^{3/2}\right)\right]$$

⇒ p. 9参照

この式に、上のψ_{s0}とψ_{sL}を代入して、整理すると、($I_{DS1} \Rightarrow I_{DSN}$)

$$I_{DSN} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left\{(V_{GB} - V_{FB})(V_{DB} - V_{SB}) - \frac{1}{2}[(V_{DB} + \phi_0)^2 - (V_{SB} + \phi_0)^2] - \frac{2}{3}\gamma\left[(\phi_0 + V_{DB})^{3/2} - (\phi_0 + V_{SB})^{3/2}\right]\right\}$$

$$= \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left\{(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0)(V_{DB} - V_{SB}) - \frac{1}{2}(V_{DB}^2 - V_{SB}^2) - \frac{2}{3}\gamma\left[(\phi_0 + V_{DB})^{3/2} - (\phi_0 + V_{SB})^{3/2}\right]\right\}$$

これは、次式で表され、ソースとドレインが対称である。

$$\begin{cases} \boldsymbol{g(V_{GB}, V_{DB}) = \mu C'_{ox}\left[(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0)V_{DB} - \frac{1}{2}V_{DB}^2 - \frac{2}{3}\gamma(\phi_0 + V_{DB})^{3/2}\right]} \\ \boldsymbol{g(V_{GB}, V_{SB}) = \mu C'_{ox}\left[(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0)V_{SB} - \frac{1}{2}V_{SB}^2 - \frac{2}{3}\gamma(\phi_0 + V_{SB})^{3/2}\right]} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{I_{DSN} = \frac{W}{L}[g(V_{GB}, V_{DB}) - g(V_{GB}, V_{SB})]}$$

(D)完全対称強反転モデル(直接導出)

チャネル内の点xでは、$\psi_s(x)$は以下になる。

$$\psi_s(x) = \phi_0 + V_{CB}(x)$$

ここで、$V_{CB}(0) = V_{SB}$， $V_{CB}(L) = V_{DB}$である。

I_{DSN}はドリフト成分のみを考慮して、

$$I_{DSN} = \mu W(-Q_I')\frac{d\psi_s}{dx} = \mu W(-Q_I')\frac{dV_{CB}}{dx} \qquad (\because \phi_0\text{:定数})$$

となる。これを、$x = 0\,(V_{CB} = V_{SB})$から$x = L\,(V_{CB} = V_{DB})$まで積分すると、

$$I_{DSN} = \frac{W}{L}\int_{V_{SB}}^{V_{DB}} \mu\,(-Q_I')dV_{CB}$$

となる。Q_I'に次式を代入すと、完全対称強反転モデルが求まる。

$$Q_I' = -C_{ox}'\left(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0 - V_{CB} + \frac{Q_B'}{C_{ox}'}\right) \qquad \left(Q_B' = -\gamma C_{ox}'\sqrt{\phi_0 + V_{CB}}\right)$$

$$= -C_{ox}'\left(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0 - V_{CB} - \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{CB}}\right) = -C_{ox}'[V_{GB} - V_{TB}(V_{CB})]$$

(D)完全対称強反転モデル(飽和点と飽和領域)

$dI_{DSN}/dV_{DB} = 0$におけるV_{DB}は、V_P(ピンチオフ電圧)となる。

$$V_P = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}}\right)^2 - \phi_0$$

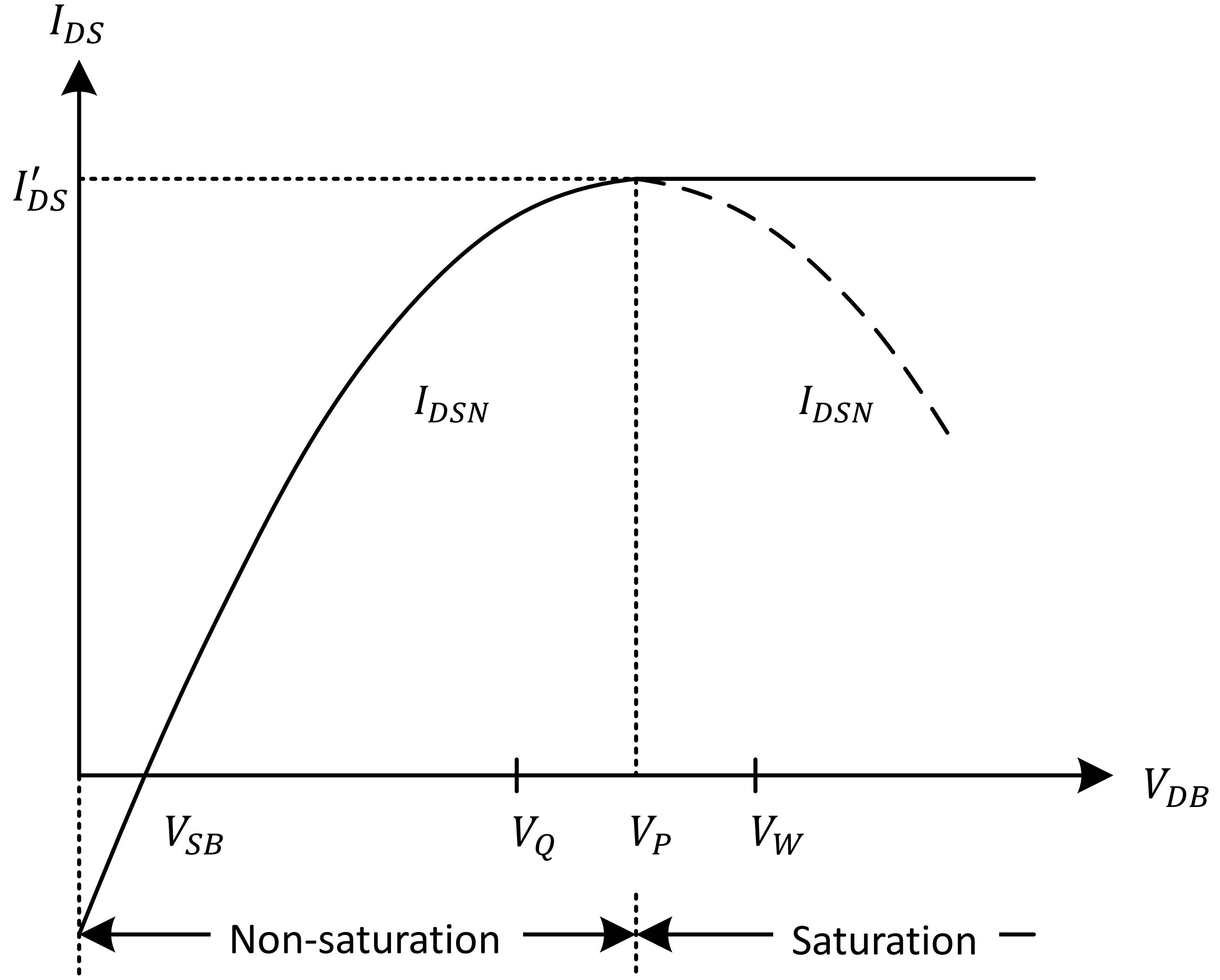
ここで、$\phi_0 = 2\phi_F$とおくと、$V_P = V_W$(弱反転と中反転の境界)となる。
これは、外部からの電圧としてV_{GB}で決まる値である。
V_Pでの電流(飽和電流: $V_{SB} < V_{DB}$)を $I'_{DS} = I_{DSN}\Big|_{V_{DB}=V_P}$ とすると、I_{DS}は、

$$I_{DS} = \begin{cases} I_{DSN}, & V_{DB} \le V_P \\ I'_{DS}, & V_{DB} > V_P \end{cases}$$

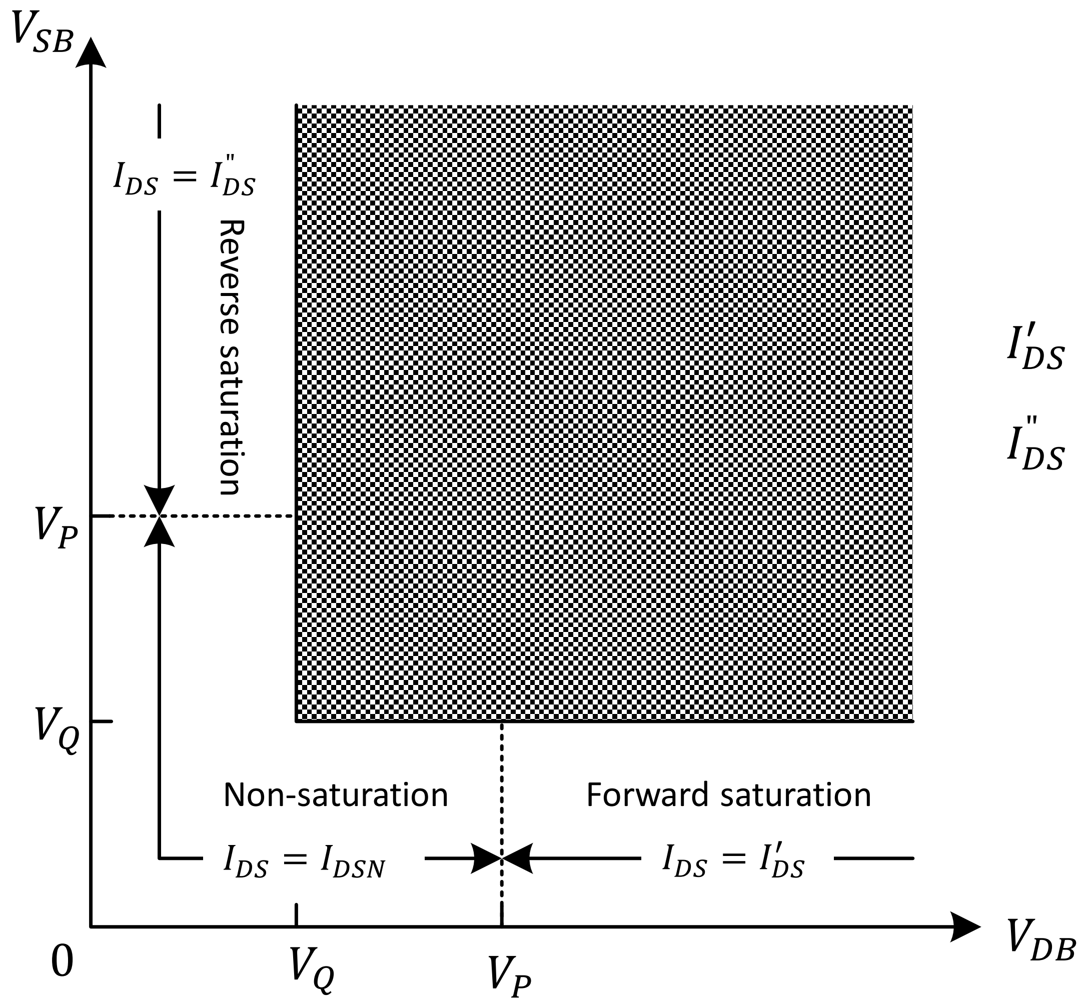
となる。また、$V_{SB} > V_{DB}$の場合の飽和電流は以下の如くになる。

$$I''_{DS} = I_{DSN}\Big|_{V_{SB}=V_P}$$

(D) 完全対称強反転モデルでのI_{DS}–V_{DB}特性



(D)完全強反転モデル



$$I'_{DS} = I_{DSN}\Big|_{V_{DB}=V_P}$$

$$I''_{DS} = I_{DSN}\Big|_{V_{SB}=V_P}$$

(E)簡易対称強反転モデル(1)

簡単化された対称モデル

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\left[\frac{1}{2nC'_{ox}}(Q'^2_{I0} - Q'^2_{IL}) + \phi_t(Q'_{IL} - Q'_{I0})\right]$$ ⇒ p. 22参照

の[　]内の第2項は拡散成分であるから、強反転領域ではこの項を無視して、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\frac{1}{2nC'_{ox}}(Q'^2_{I0} - Q'^2_{IL})$$ ⇒ Q_I'に関し3端子MOS構造 p.30参照（令和４年度版）

（ピンチオフ近傍の反転層電荷（強反転の場合））

となる。Q'_{I0}とQ'_{IL}に $Q'_I \approx -nC'_{ox}(V_P - V_{CB})$ を用いると、I_{DSN}（非飽和領域のI_{DS}）は、以下になる。

$$\boldsymbol{I_{DSN} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{n}{2}\left[(V_P - V_{SB})^2 - (V_P - V_{DB})^2\right]}$$

順方向飽和電流I'_{DS}と逆方向飽和電流I''_{DS}は、次式となる。

$$\boldsymbol{I'_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{n}{2}(V_P - V_{SB})^2} \qquad (\boldsymbol{V_{DB} = V_P}\text{で飽和})$$

$$\boldsymbol{I''_{DS} = -\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{n}{2}(V_P - V_{DB})^2} \qquad (\boldsymbol{V_{SB} = V_P}\text{で飽和})$$

$$V_P = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}}\right)^2 - \phi_0$$

$$n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_P}}$$

(E)簡易対称強反転モデル(2)

V_P の近似を用いて、モデルを簡単化する。

$$V_P \approx \frac{V_{GB}-V_{T0}}{n} \quad (但し、V_{T0}=V_{FB}+\phi_0+\gamma\sqrt{\phi_0})$$

⇒ V_Pに関し3端子MOS構造 p.29参照（令和4年度版）

（ピンチオフ電圧の別表現（2））

これを、

$$I_{DSN}=\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{n}{2}[(V_P-V_{SB})^2-(V_P-V_{DB})^2]$$

に代入し、整理すると、

$$\boldsymbol{I_{DSN}=\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[(V_{GB}-V_{T0})(V_{DB}-V_{SB})-\frac{n}{2}\left(V_{DB}^2-V_{SB}^2\right)\right]}$$

となる。I_{DSN}は、$V_{DB}=V_P$で$dI_{DSN}/dV_{DB}=0$となる。
この場合、順方向飽和電流I'_{DS}と逆方向飽和電流I''_{DS}は、次式になる。

$$\boldsymbol{I'_{DS}=\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{1}{2n}(V_{GB}-V_{T0}-nV_{SB})^2}, \qquad \boldsymbol{I''_{DS}=-\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{1}{2n}(V_{GB}-V_{T0}-nV_{DB})^2}$$

(F)簡易ソース参照強反転モデル

簡単化されたソース参照モデルの以下の式において、

$$I_{DS1}=\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[\left(V_{GB}-V_{FB}-\psi_{s0}\quad-\gamma\sqrt{\psi_{s0}}\quad\right)(\psi_{sL}-\psi_{s0})-\frac{\alpha}{2}(\psi_{sL}-\psi_{s0})^2\right]$$

⇒ p. 18参照

$\psi_{s0}=\phi_0+V_{SB}$、$\psi_{sL}=\phi_0+V_{DB}$を代入すると、強反転での非飽和電流は、

$$I_{DSN}=\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[\left(V_{GB}-V_{SB}-V_{FB}-\phi_0-\gamma\sqrt{\phi_0+V_{SB}}\right)(V_{DB}-V_{SB})-\frac{\alpha}{2}(V_{DB}-V_{SB})^2\right]$$

但し、$\alpha=\alpha_1=1+\frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0+V_{SB}}}$

となる。ここで、$V_{DB}-V_{SB}=V_{DS}, V_{GB}-V_{SB}=V_{GS}$とおくと、次式を得る。

$$\boldsymbol{I_{DSN}=\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[\left(V_{GS}-V_T\Big|_{V_{SB}}\right)V_{DS}-\frac{\alpha}{2}V_{DS}^2\right]}$$

， 但し、$\boldsymbol{V_T\Big|_{V_{SB}}=V_{FB}+\phi_0+\gamma\sqrt{\phi_0+V_{SB}}}$

(F)簡易ソース参照強反転モデル(直接導出:1)

直接導出する場合、$-Q'_B/C'_{ox}$ の近似式を使う。V_{SB}の辺りで $-Q'_B/C'_{ox}$ を
テイラー展開(最初の２項までとる)すると、

$$-\frac{Q'_B}{C'_{ox}} \approx \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} + (\alpha_1 - 1)(V_{CB} - V_{SB})$$

$\alpha_1 - 1$ は、$-Q'_B/C'_{ox}\ vs. V_{CB}$の $V_{CB} = V_{SB}$での傾きであり、$\alpha_1 - 1 = \gamma/2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}$
である。α_1は、$-Q'_B/C'_{ox}$ を過剰に見積もっているため、その代わりに
α($\alpha < \alpha_1$)を考えると、$-Q'_B/C'_{ox}$ は、以下になる。

$$-\frac{Q'_B}{C'_{ox}} \approx \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} + (\alpha - 1)(V_{CB} - V_{SB})$$

これから、Q'_Iは次式となる。

$$Q'_I = -C'_{ox}\left(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0 - V_{CB} + \frac{Q'_B}{C'_{ox}}\right)$$

$$= -C'_{ox}\left[V_{GB} - V_{SB} - V_{FB} - \phi_0 - \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} - \alpha(V_{CB} - V_{SB})\right]$$

(F)簡易ソース参照強反転モデル(直接導出:2)

Q_I'を以下の式に用い、

$$I_{DSN} = \frac{W}{L}\int_{V_{SB}}^{V_{DB}} \mu\,(-Q_I')dV_{CB}$$

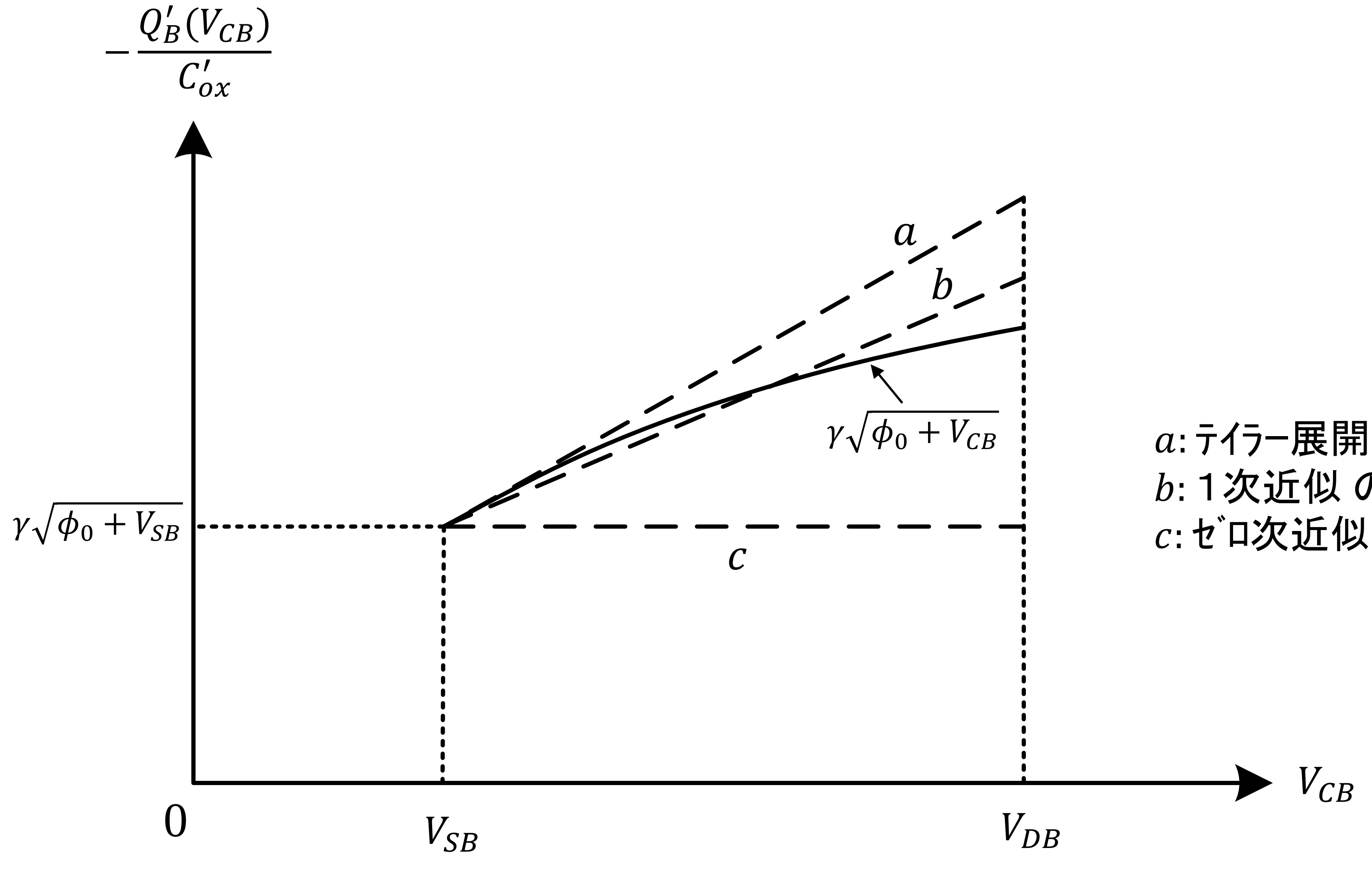
$V_{DB} = V_{DS} + V_{SB}$、$V_{GB} = V_{GS} + V_{SB}$として、積分を行うと、
I_{DSN}は、(但し、μ: 一定)

$$\boldsymbol{I_{DSN} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[\left(V_{GS} - V_T\Big|_{V_{SB}}\right)V_{DS} - \frac{\alpha}{2}V_{DS}^2\right]}$$

但し、$\boldsymbol{V_T\Big|_{V_{SB}} = V_{FB} + \phi_0 + \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}}$

となり、簡単化されたソース参照モデルと同じになる。

(F)強反転での$-Q_B'/Cox'$とチャネル内の逆バイアスV_{CB}



a: テイラー展開による1次近似 at $V_{CB} = V_{SB}$
b: 1次近似 の改善
c: ゼロ次近似

(F)簡易ソース参照強反転モデル(飽和点と飽和領域)

非飽和領域では、I_{DSN}は

$$I_{DSN} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{\alpha}{2}{V_{DS}}^2\right]$$

となる。ここで、

$$V_T = V_{FB} + \phi_0 + \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} \qquad \Rightarrow V_T \text{は} V_{SB} \text{に依存する。}$$

または、

$$V_T = V_{T0} + \gamma\left(\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} - \sqrt{\phi_0}\right), \qquad V_{T0} = V_{FB} + \phi_0 + \gamma\sqrt{\phi_0}$$

である。$dI_{DSN}/dV_{DS} = 0$のところでの$V_{DS}(=V'_{DS})$は、$V'_{DS} = (V_{GS} - V_T)/\alpha$
となる。この場合の電流I'_{DS}は、以下になる。

$$I'_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{(V_{GS} - V_T)^2}{2\alpha}$$

(F)簡易ソース参照強反転モデル(まとめ)

電流I_{DS}は,

$$I_{DS}=\begin{cases} I_{DSN}, & V_{DS}\le V'_{DS} \\ I'_{DS}, & V_{DS}>V'_{DS} \end{cases}$$

すなわち、以下になる。

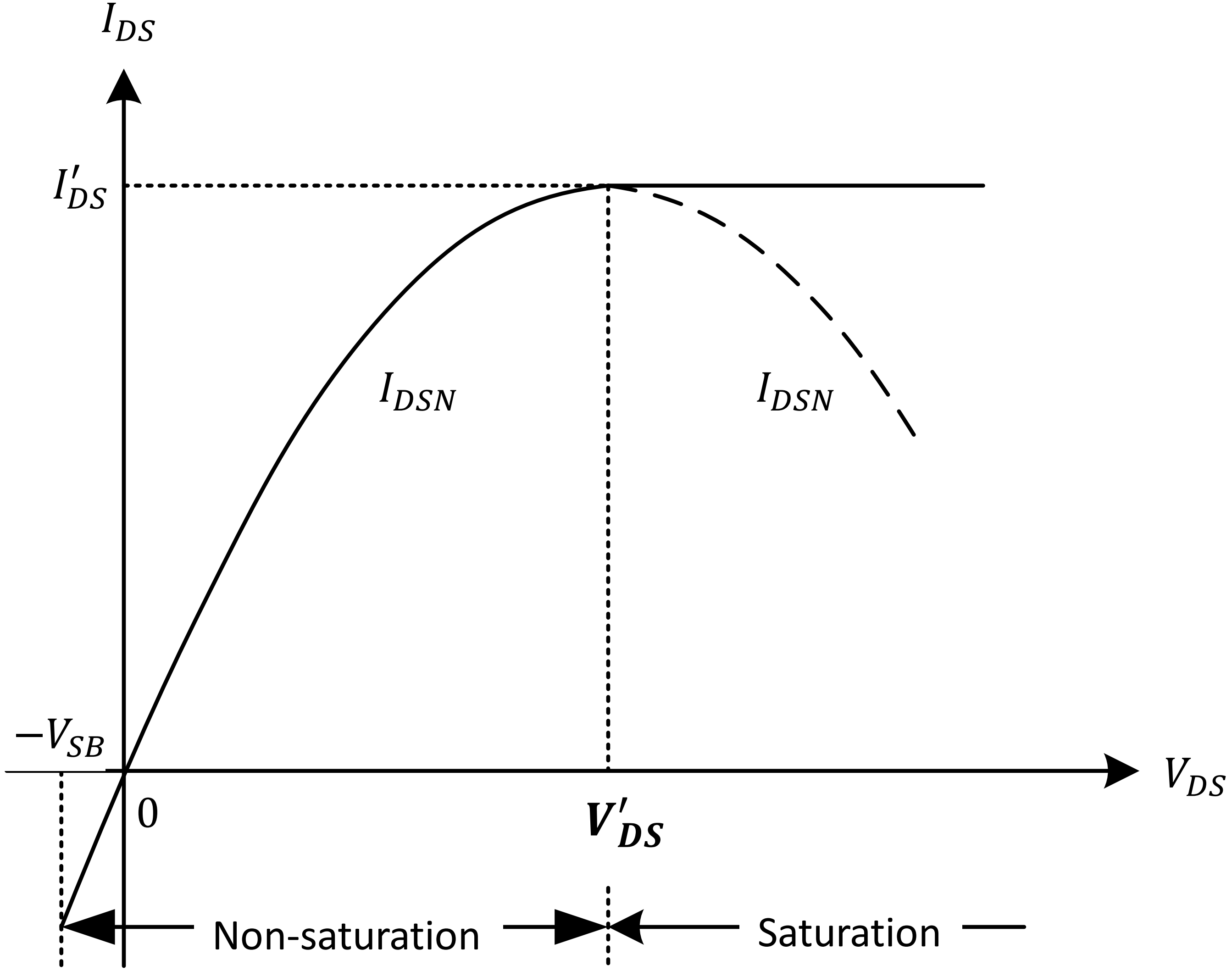
$$\boldsymbol{I_{DS}=\begin{cases} \dfrac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[(V_{GS}-V_T)V_{DS}-\dfrac{\alpha}{2}{V_{DS}}^2\right], & V_{DS}\le V'_{DS} \\ \dfrac{W}{L}\mu C'_{ox}\dfrac{(V_{GS}-V_T)^2}{2\alpha}, & V_{DS}>V'_{DS} \end{cases}}$$

また、非飽和と飽和領域を一緒にして、I_{DS}は以下でも表される。

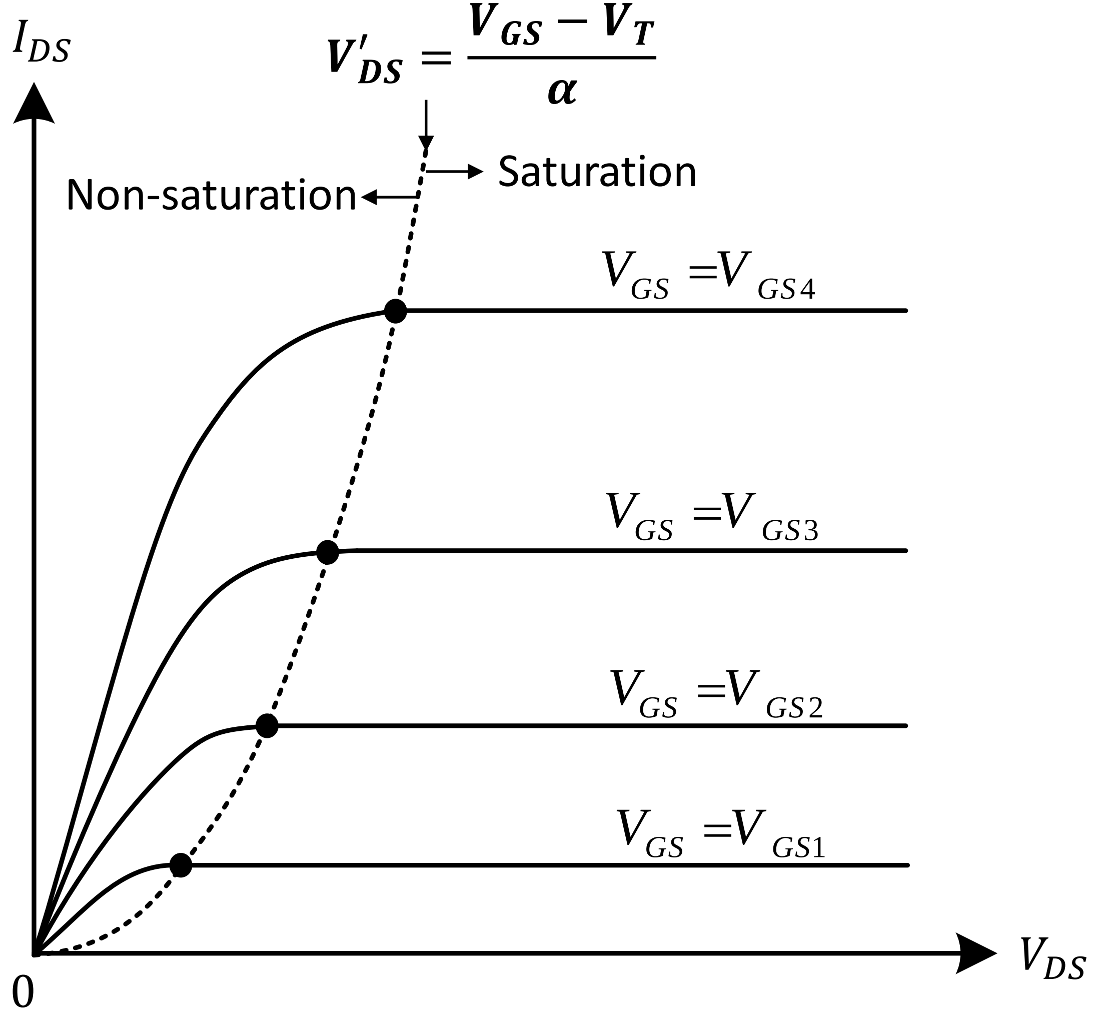
$$\boldsymbol{I_{DS}=I'_{DS}\left(1-\eta^2\right)}$$

ここで、$\boldsymbol{\eta=\begin{cases} 1-\dfrac{V_{DS}}{V'_{DS}}, & V_{DS}\le V'_{DS} \\ 0, & V_{DS}>V'_{DS} \end{cases}}$

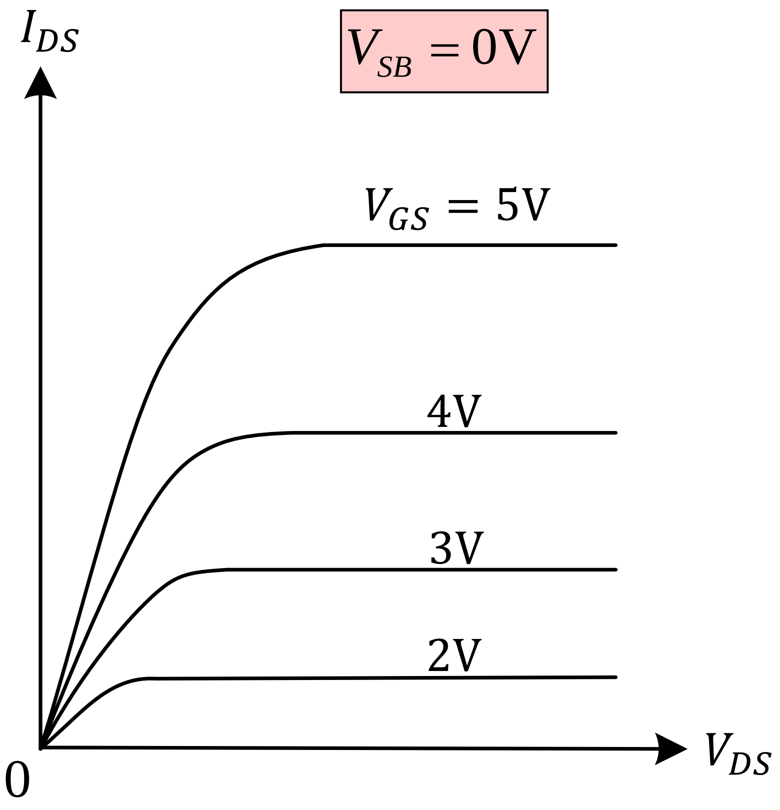
（F）I_{DS}–V_{DS}特性：含むV_{DS}＞V_{DS}’（ソース参照強反転）

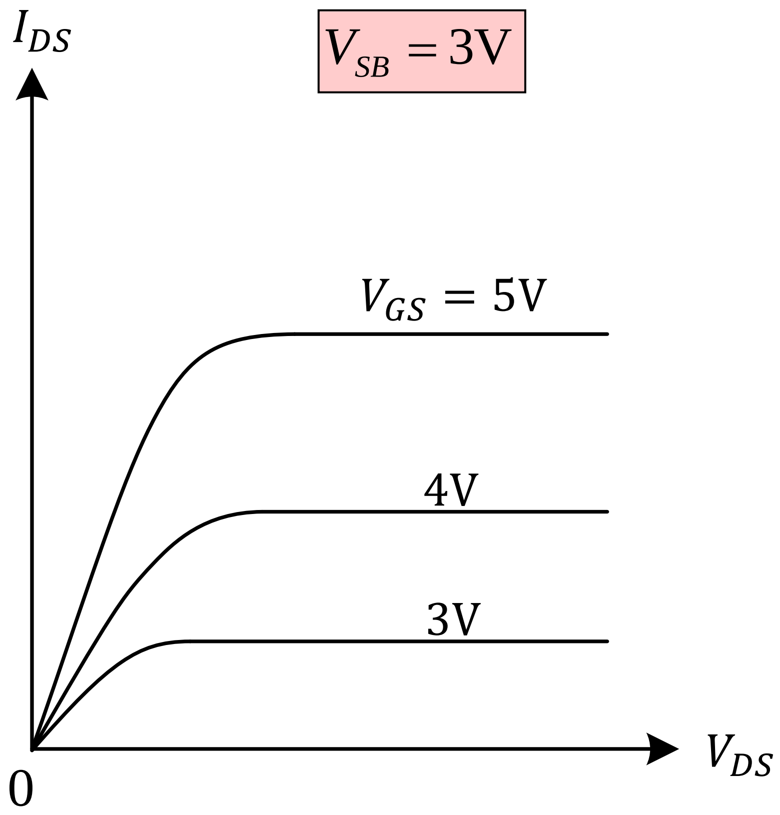


(F) I_{DS}–V_{DS}特性（ソース参照強反転）

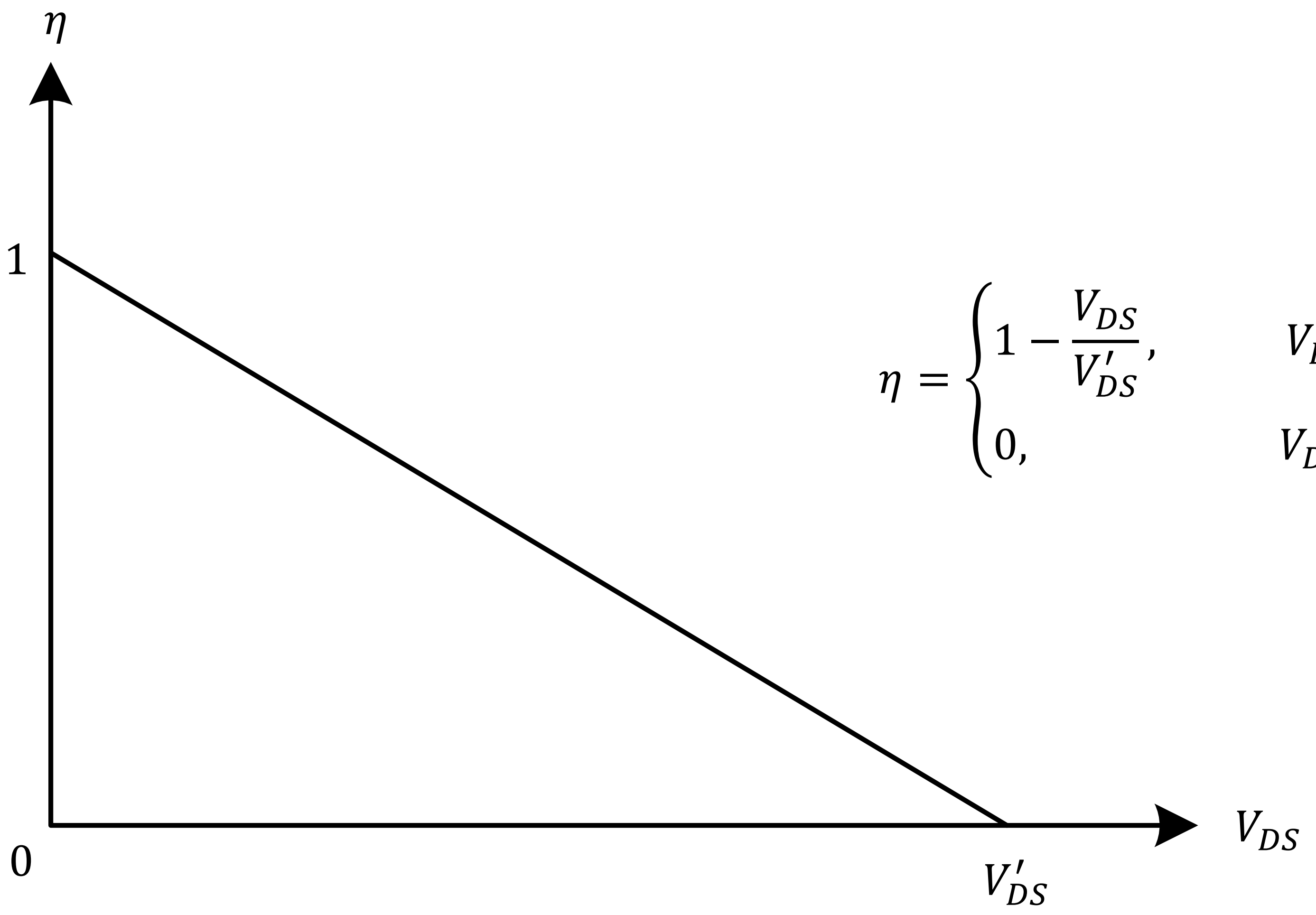


(F) V_{SB}を変えた場合のI_{DS}–V_{DS}特性





(F) パラメータ η vs. V_{DS}



$$\eta = \begin{cases} 1 - \dfrac{V_{DS}}{V'_{DS}}, & V_{DS} \leq V'_{DS} \\ 0, & V_{DS} > V'_{DS} \end{cases}$$

（F）αの近似（1）

$$\alpha_0 = 1$$

⇒ チャネルに沿った空乏層幅：一定（ソース端）
⇒ $|Q_B'|$の過少見積もり
⇒ $|Q_I'|$の過剰見積もり（I_{DS}、V_{DS}'の過剰見積もり）

$$\alpha_1 = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}}$$

⇒ $V_{DS} = V_{DB} - V_{SB}$が小さい場合：良い近似
⇒ 一般に、$|Q_B'|$の過剰見積もり
⇒ $|Q_I'|$の過少見積もり（I_{DS}、V_{DS}'の過少見積もり）

（F）αの近似（2）

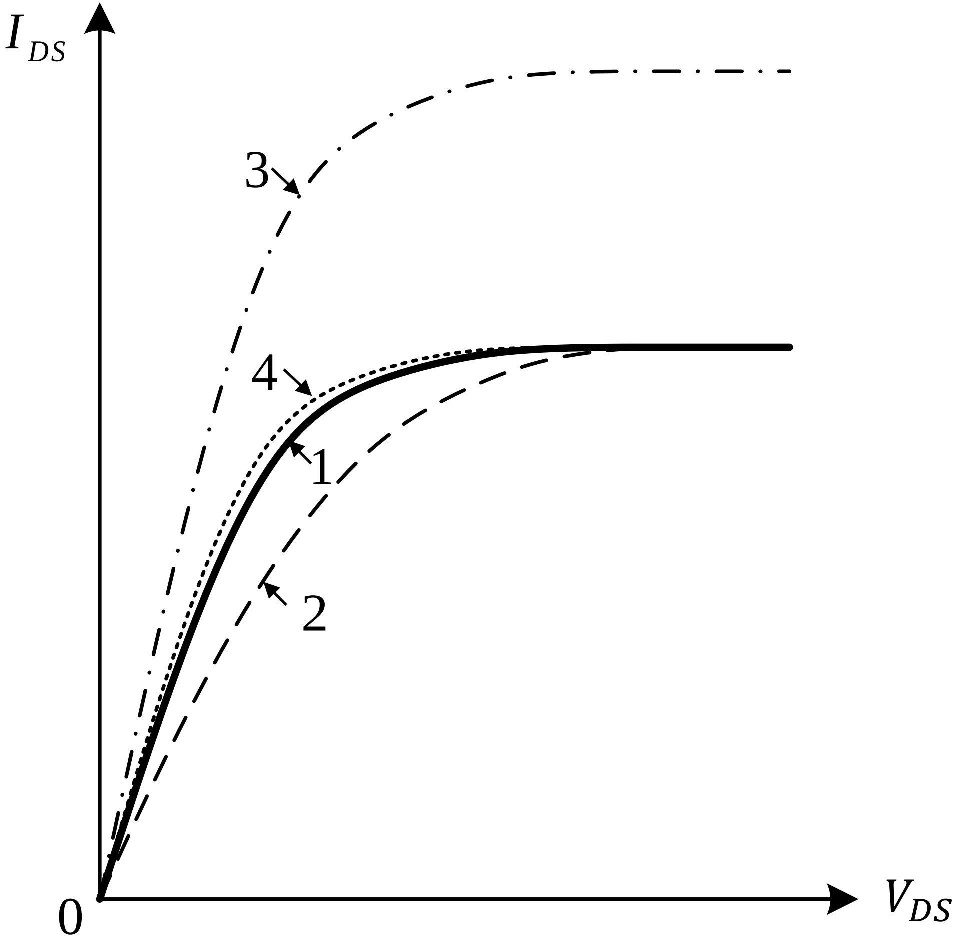
$$\alpha_2 = 1 + d_2 \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}}$$ d_2: 修正係数(0.5～0.8)

$$d_2 = 1 - [k_1 + k_2(\phi_B + V_{SB})]^{-1}$$ k_1, k_2 : 定数

$$\alpha_3 = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_3 + \phi_0 + V_{SB}}}$$ $\phi_3 = 1$

$$\alpha_4 = 1 + \frac{\gamma}{4\sqrt{\phi_0}}$$

（F）I_{DS} vs. V_{DS} 特性（α：パラメータ）



１　測定
２　α=1: 飽和領域でフィッティング
３　α=1: 低V_{DS}領域でフィッティング
４　α=1.7でフィッティング

(F)チャネルの任意点における電位(1)

強反転領域での電流I_{DSN}は、

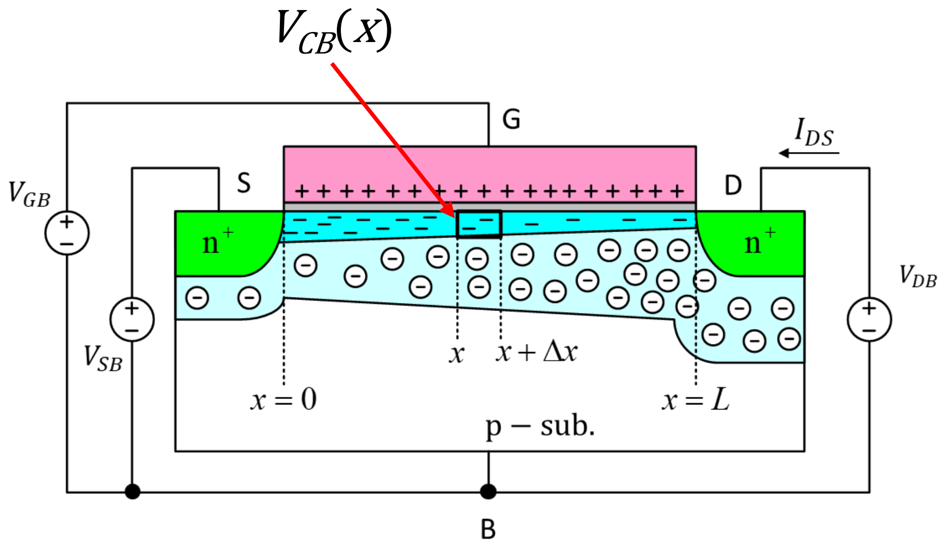
$$I_{DSN} = \frac{W}{L} h(V_{GB}, V_{SB}, V_{DB})$$

で表される。ここで、hは関数である。
チャネルに沿う点xでの電流は、以下になる。

$$I_{DSN} = \frac{W}{x} h(V_{GB}, V_{SB}, V_{CB}(x))$$

上2式から、xと$V_{CB}(x)$の以下の関係を得る。

$$\frac{x}{L} = \frac{h(V_{GB}, V_{SB}, V_{CB}(x))}{h(V_{GB}, V_{SB}, V_{DB})}$$



(F) チャネルの任意点における電位（2）

電流I_{DS}は,

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{(V_{GS}-V_T)^2}{2\alpha}(1-\eta^2)$$

ここで、

$$\eta = \begin{cases} 1-\dfrac{V_{DS}}{V'_{DS}}, & V_{DS} \le V'_{DS} \\ 0, & V_{DS} > V'_{DS} \end{cases} \quad , \qquad V'_{DS} = \frac{V_{GS}-V_T}{\alpha}$$

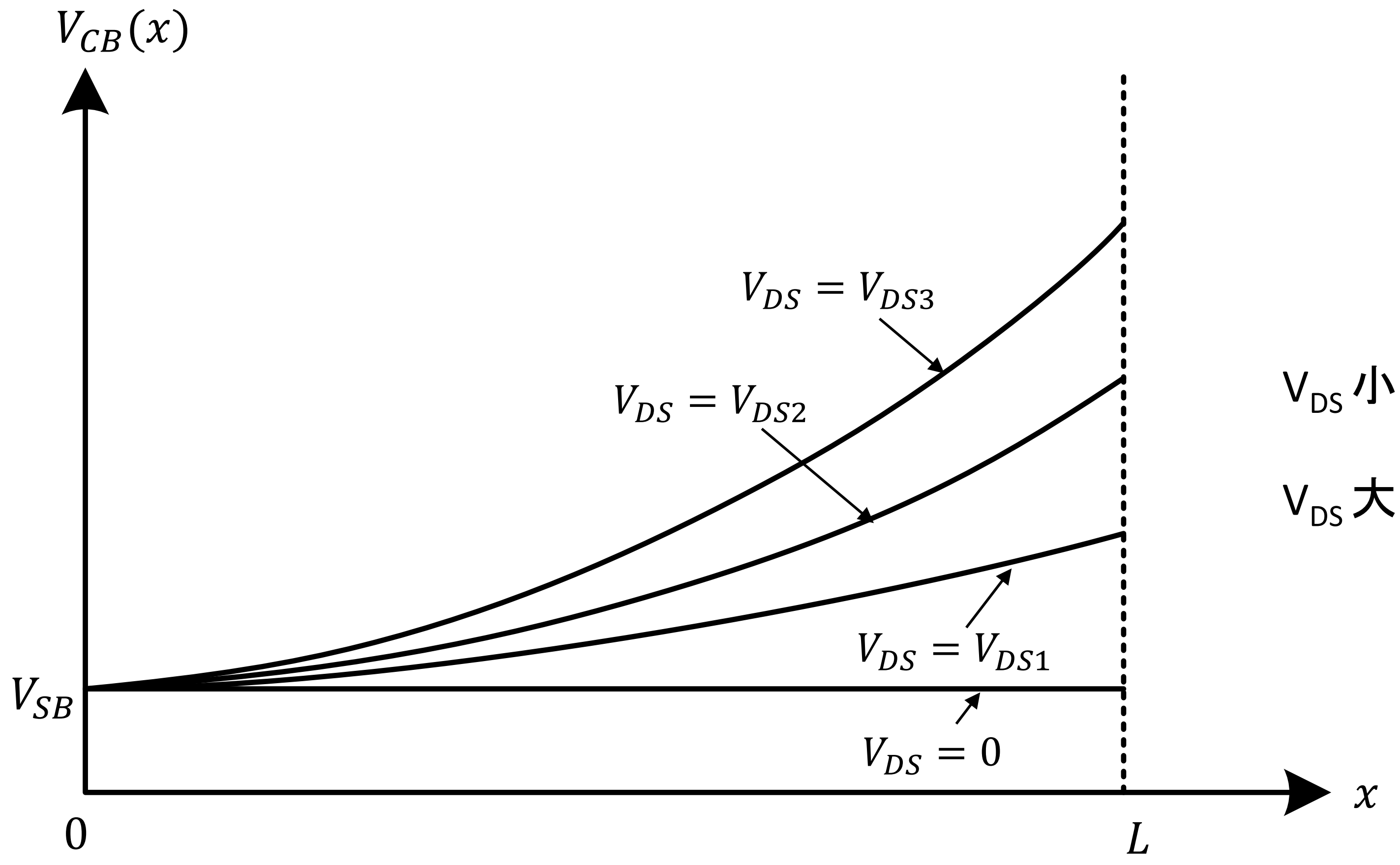
である。チャネルに沿う点xでの電流は、以下になる。

$$I_{DS} = \frac{W}{x}\mu C'_{ox}\frac{(V_{GS}-V_T)^2}{2\alpha}\left\{1-\left[1-\frac{\alpha}{V_{GS}-V_T}(V_{CB}(x)-V_{SB})\right]^2\right\}$$

I_{DS}に関する上２式を等しいとして解くと、$V_{CB}(x)$は次式になる。

$$V_{CB}(x) = V_{SB} + \frac{V_{GS}-V_T}{\alpha}\left[1-\sqrt{1-\frac{x}{L}(1-\eta^2)}\right]$$

(F) チャネルに沿っての基板からの電位



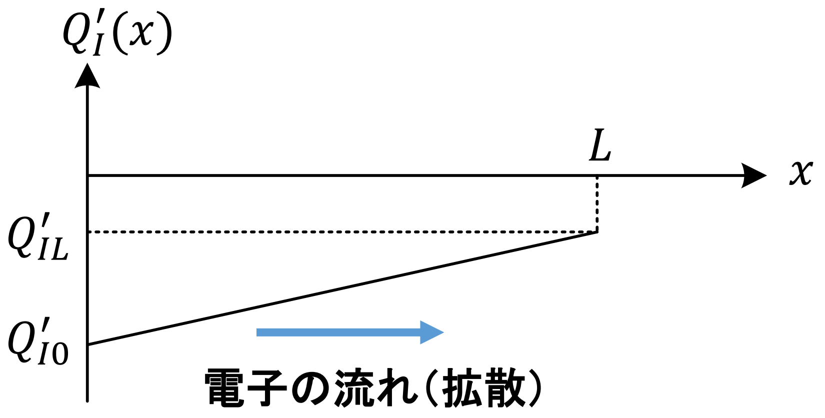
V_{DS} 小 ⇒ チャネル電位の傾きは
ほぼ一定
V_{DS} 大 ⇒ チャネル電位の傾きは
ドレイン側でより大きくなる

(G)弱反転モデル(基本)

弱反転領域では、表面電位ψ_sは、

$$\psi_s \approx \psi_{sa}(V_{GB})$$

$$\psi_{sa}(V_{GB}) = \left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + V_{GB} - V_{FB}}\right)^2$$



となり、V_{GB}の関数になる。

⇒ Q'_Bはチャネル位置に依存しない。

(空乏層深さはチャネルに沿って一定)

⇒ チャネルに沿って同じ電位

(電流は拡散成分のみ存在:ドリフト成分はない)

したがって、ここでは完全チャージ・シート・モデルの拡散成分を用いる。

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\phi_t(Q'_{IL} - Q'_{I0})$$

（G）弱反転モデル（対称モデル）

弱反転領域の電荷の式（空乏領域でも成立）

$$Q_I' = -\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}}\phi_t e^{[\psi_{sa}(V_{GB})-2\phi_F]/\phi_t} \cdot e^{-V_{CB}/\phi_t}$$

⇒ ３端子MOS構造 p.20参照（令和４年度版）

を用いると、Q_{I0}', Q_{IL}'は以下になる。

$$Q_{I0}' = -\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}}\phi_t e^{(\psi_{sa}(V_{GB})-2\phi_F)/\phi_t} \bullet e^{-V_{SB}/\phi_t}, \quad Q_{IL}' = -\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}}\phi_t e^{(\psi_{sa}(V_{GB})-2\phi_F)/\phi_t} \bullet e^{-V_{DB}/\phi_t}$$

したがって、弱反転領域のI_{DS}は、以下になる。

$$\boldsymbol{I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\phi_t(Q_{IL}' - Q_{I0}') = \frac{W}{L}\hat{I}(V_{GB})\left(e^{-V_{SB}/\phi_t} - e^{-V_{DB}/\phi_t}\right)}$$

但し、 $$\hat{I}(V_{GB}) = \mu\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{\psi_{sa}(V_{GB})}}{\phi_t}^2 e^{(\psi_{sa}(V_{GB})-2\phi_F)/\phi_t}$$

（G）弱反転モデル（対称モデル別表現）

弱反転のI_{DS}（対称モデル）の式で、

$$\psi_{sa} = V_P + \phi_0,\quad n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_P(V_{GB})}},\quad \gamma = \frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{C'_{ox}}$$

を用いると、以下を得る。

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\quad (n-1)e^{(\phi_0 - 2\phi_F)/\phi_t}\phi_t^2\left[e^{(V_P - V_{SB})/\phi_t} - e^{(V_P - V_{DB})/\phi_t}\right]$$

更に、$V_P = (V_{GB} - V_{T0})/n$を用いると、

$$\boldsymbol{I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\quad (n-1)e^{(\phi_0 - 2\phi_F)/\phi_t}\phi_t^2\left[e^{(V_{GB} - V_{T0} - nV_{SB})/(n\phi_t)} - e^{(V_{GB} - V_{T0} - nV_{DB})/(n\phi_t)}\right]}$$

を得る。

(G)弱反転モデル(ソース参照モデル)

Q_{I0}'に関し、3端子MOS構造のp.21参照
(令和4年度版)

$$Q_I' \approx Q_M' e^{(V_{GC}-V_M)/(n\phi_t)} \qquad Q_I' \to Q_{I0}'$$

$$Q_M' = -\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{2\phi_F + V_{CB}'}}\phi_t \qquad V_{CB}' \to V_{SB}' \qquad V_{GC} \to V_{GS}$$

弱反転での電流式は、以下である。

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\phi_t(Q_{IL}' - Q_{I0}') = -\frac{W}{L}\mu\phi_t Q_{I0}'\left(1 - \frac{Q_{IL}'}{Q_{I0}'}\right)$$

ここで、 $Q_{IL}'/Q_{I0}' = e^{-(V_{DB}-V_{SB})/\phi_t} = e^{-V_{DS}/\phi_t}$ であるから、I_{DS}は以下になる。 ⇒ p. 48参照

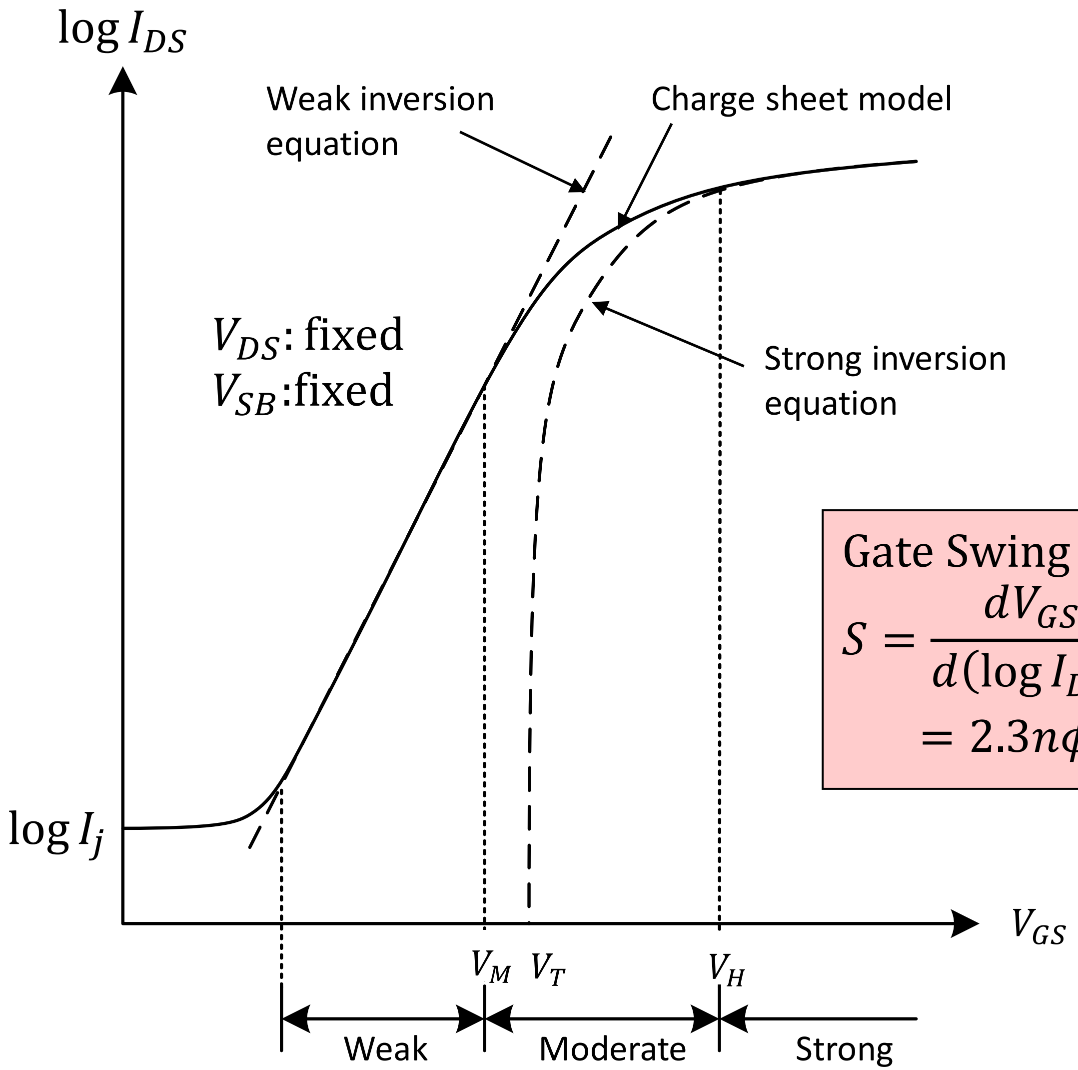
$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\phi_t(-Q_{I0}')\left(1 - e^{-V_{DS}/\phi_t}\right)$$

ここで、$Q_{I0}' \approx Q_M' e^{(V_{GS}-V_M)/(n\phi_t)}$ を用いると、I_{DS}($V_{SB} = V_{SB}'$で固定)は以下になる。

$$\boldsymbol{I_{DS} = \frac{W}{L} I_M' e^{(V_{GS}-V_M)/(n\phi_t)}\left(1 - e^{-V_{DS}/\phi_t}\right)}$$

$$\left\{ I_M' = \mu\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{2\phi_F + V_{SB}'}}{\phi_t}^2, \qquad V_M = V_{FB} + 2\phi_F + \gamma\sqrt{2\phi_F + V_{SB}'}, \qquad n = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F + V_{SB}'}} \right\}$$

（G） Log I_{DS} vs. V_{GS}特性



Gate Swing

$$S = \frac{dV_{GS}}{d(\log I_{DS})} = 2.3n\phi_t$$

弱反転モデル（ソース参照モデル）

$$I_{DS} \propto \exp\left(\frac{V_{GS} - V_M}{n\phi_t}\right)$$

$$\ln(I_{DS}) = \frac{\log(I_{DS})}{\log(e)} \propto \frac{V_{GS} - V_M}{n\phi_t}$$

$$\log(I_{DS}) \propto \log(e)\frac{V_{GS} - V_M}{n\phi_t}$$

$$\frac{d\log(I_{DS})}{dV_{GS}} = \log(e)\frac{1}{n\phi_t}$$

$$\frac{dV_{GS}}{d\log(I_{DS})} = \frac{n\phi_t}{\log(e)} = 2.3n\phi_t$$

EKVモデル（対称モデルへの展開1）

■ EKVのモデル式は、以下である。

$$\boldsymbol{I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}(2n)\phi_t^2\left\{\left[\ln\left(1+e^{(V_P-V_{SB})/(2\phi_t)}\right)\right]^2 - \left[\ln\left(1+e^{(V_P-V_{DB})/(2\phi_t)}\right)\right]^2\right\}}$$

非飽和と飽和の全領域で使用。漸近的に弱反転と強反転に近づく。

■ 弱反転領域 ⇒ 指数項 ≪ 1　であるから、$\ln(1+x) \approx x, \quad |x| \ll 1$から

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}(2n)\phi_t^2\left[e^{(V_P-V_{SB})/\phi_t} - e^{(V_P-V_{DB})/\phi_t}\right]$$

が得られる。これは、弱反転(対称モデル)の別表現の式で　$(n-1)e^{(\phi_0-2\phi_F)/\phi_t}$ を $2n$
とおいたものになる。

■ 強反転かつ非飽和領域 ⇒ 指数項 ≫ 1　であるから、$[\ln(1+e^y)]^2 \approx (\ln e^y)^2 = y^2, \quad e^y \gg 1$から

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{n}{2}\left[(V_P-V_{SB})^2 - (V_P-V_{DB})^2\right]$$

⇒ p.30 参照

となる。これは、簡単化された対称強反転モデルになる。

EKVモデル（対称モデルへの展開2）

EKVの式で、V_{DS}が大きくなると、2番目の指数関数は無視でき、

$$I_{DS} = I'_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{n}{2}(V_P - V_{SB})^2 \qquad （V_{DB} = V_P\text{で飽和}）$$

となる。I'_{DS}は順方向飽和電流である。また、EKVの式に$V_P = (V_{GB} - V_{T0})/n$を代入すると、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}(2n)\phi_t^2\left\{\left[\ln\left(1 + e^{(V_{GB}-V_{T0}-nV_{SB})/(2n\phi_t)}\right)\right]^2 - \left[\ln\left(1 + e^{(V_{GB}-V_{T0}-nV_{DB})/(2n\phi_t)}\right)\right]^2\right\}$$

となる。強反転の下では、指数項 $\gg 1$であるため、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{1}{2n}[(V_{GB} - V_{T0} - nV_{SB})^2 - (V_{GB} - V_{T0} - nV_{DB})^2]$$

$$= \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[(V_{GB} - V_{T0})(V_{DB} - V_{SB}) - \frac{n}{2}(V_{DB}^2 - V_{SB}^2)\right]$$

⇒ p.30 参照

すなわち、簡単化された対称強反転モデルの式になる。

EKVモデル（展開時の誤差）

弱反転領域では、指数項 $\ll 1$であるから、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}(2n)\phi_t^2\left[e^{(V_{GB}-V_{T0}-nV_{SB})/(n\phi_t)} - e^{(V_{GB}-V_{T0}-nV_{DB})/(n\phi_t)}\right]$$

となる。これは、弱反転(対称モデル)の別表現の式で $\boldsymbol{(n-1)e^{(\phi_0-2\phi_F)/\phi_t}}$ を $\boldsymbol{2n}$ とおいたものとなる。
この置換えによる誤差は、V_{T0}を少し増大させることでI_{DS}を正しい値に近づけることができる。
V_{T0}は指数関数内にあるため、ほんの少しの増大で対応できる。
したがって、この増大があっても強反転領域での誤差は少ない。
例えば、強反転飽和領域での電流式は、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{1}{2n}(V_{GB} - V_{T0} - nV_{SB})^2$$

となり、括弧内の値は大きいので、V_{T0}の僅かな変化はI_{DS}への大きな誤差にはならない。

EKVモデル（ソース参照モデル1）

■ EKVモデルをソース参照モデルに変えると、以下になる。

$$\boldsymbol{I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}(2n)\phi_t^2\left\{\left[\ln\left(1+e^{(V_{GS}-V_T)/(2n\phi_t)}\right)\right]^2-\left[\ln\left(1+e^{(V_{GS}-V_T-nV_{DS})/(2n\phi_t)}\right)\right]^2\right\}}$$

$$V_T = V_{T0}+\gamma\left(\sqrt{\phi_0+V_{SB}}-\sqrt{\phi_0}\right),\quad V_{T0}=V_{FB}+\phi_0+\gamma\sqrt{\phi_0}$$

このV_Tには、イオン注入、短チャネル効果等を考慮できる。弱反転の場合、指数項 $\ll 1$であるから、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}(2n)\phi_t^2\left[e^{(V_{GS}-V_T)/(n\phi_t)}-e^{(V_{GS}-V_T-nV_{DS})/(n\phi_t)}\right] = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}(2n)\phi_t^2 e^{(V_{GS}-V_T)/(n\phi_t)}\left[1-e^{-V_{DS}/\phi_t}\right]$$

となる。これは、以下の弱反転のソース参照モデルに対応する。

$$I_{DS} = \frac{W}{L}I'_M e^{(V_{GS}-V_M)/(n\phi_t)}\left(1-e^{-V_{DS}/\phi_t}\right)$$

$$I'_M = \mu\frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{2\sqrt{2\phi_F+V'_{SB}}}{\phi_t}^2 = \mu C'_{ox}(n-1){\phi_t}^2,\quad n = 1+\frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F+V'_{SB}}}$$

$$V_M = V_{FB}+2\phi_F+\gamma\sqrt{2\phi_F+V'_{SB}}\quad V_{SB}=V'_{SB}\text{（固定）}$$

EKVモデル（ソース参照モデル2）

弱反転において、EKVモデルとソース参照モデルとの違いは、
$\boldsymbol{(n-1)e^{(V_{GS}-V_M)/(n\phi_t)}}$ が $\boldsymbol{(2n)e^{(V_{GS}-V_T)/(n\phi_t)}}$ に置き換わっていることである。

$$V_M = V_{FB} + 2\phi_F + \gamma\sqrt{2\phi_F + V_{SB}} \quad , \qquad V_T = V_{FB} + \phi_0 + \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} \quad , \qquad \phi_0 = 2\phi_F + \Delta\phi$$

$$n \quad = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi_F + V_{SB}}} \qquad \Rightarrow n \quad = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}}$$

すなわち、$\boldsymbol{n-1}$ と $\boldsymbol{2n}$ の違いを指数の中の $V_T - V_M$ で調整でき、正しい I_{DS} に近づけることができる。
また、n において $\boldsymbol{2\phi_F}$ を $\boldsymbol{\phi_0}$ に換えることにより、更に精度は上がる。この場合 $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{\alpha_3}$ に変わる。
強反転の場合（非飽和）、EKVモデル中の両指数項 $\gg 1$であるから、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{1}{2n}\left[(V_{GS} - V_T)^2 - (V_{GS} - V_T - nV_{DS})^2\right] = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{\alpha}{2}{V_{DS}}^2\right],$$

ここで $n \Rightarrow \alpha$ となる。これは、簡単化されたソース参照強反転モデル（非飽和）である。

EKVモデル（ソース参照モデル3）

強反転の場合（飽和）、EKVモデル中の最初の指数項 $\gg 1$、 2番目の指数項 $\ll 1$であるから、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{1}{2n}[(V_{GS} - V_T)^2] = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}\frac{1}{2\alpha}[(V_{GS} - V_T)^2] \quad ,$$

ここで$n \Rightarrow \alpha$となる。これは、簡単化されたソース参照強反転モデル（飽和）である。
反転とは無関係にV_{DS}が高いとEKVモデル中の2番目の項は無視でき、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu C'_{ox}(2n)\phi_t^2\left[\ln\left(1 + e^{(V_{GS}-V_T)/(2n\phi_t)}\right)\right]^2$$

となる。アナログ回路では、たいていのデバイスは飽和領域で動作しており、
上式は近似計算には向いている。
EKVモデルは、インターポレーション（弱反転と強反転の間）モデルに非常に有効である。

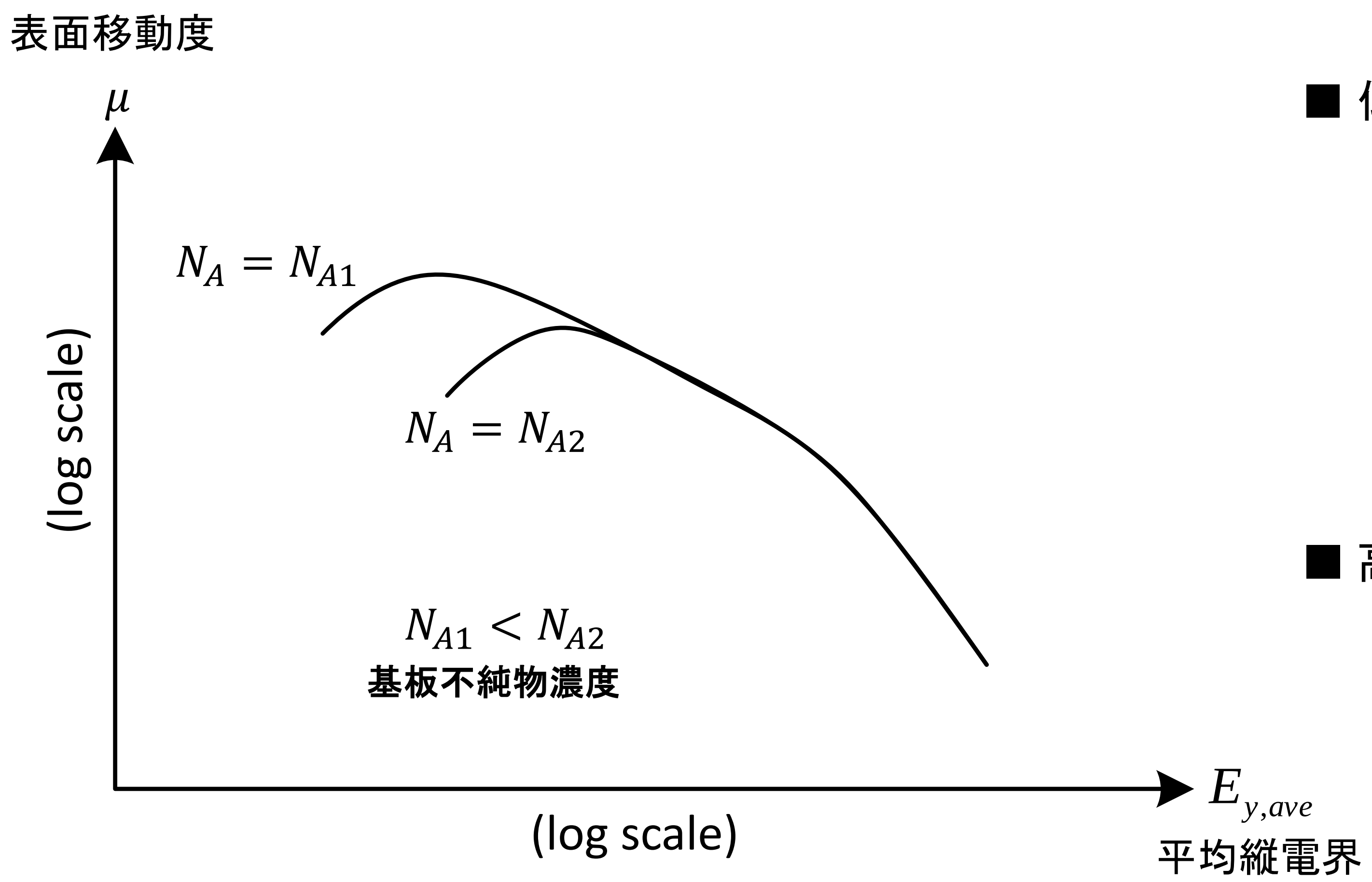
ソース参照モデルの利点

- 通常の印加電圧に対応している。
- 閾値電圧が電流式中に自然に表れる。
- バックゲートを第２のゲートとして扱える。
- キャリア速度飽和をV_{DS}によって簡単に扱える。
- 非対称デバイスに対応できる。
- ソース参照モデルが高周波動作に対応している。

基板参照モデルの利点

- 対称デバイスに対応できる。
  （アナログ回路対応）
- 電流の飽和点をV_{SB}に関係なくV_{DB}で直接表現できる。
  （基板参照長チャネルモデル）
- 弱反転領域をよく表現できる。
  （ Ψ_{sa}はV_{GB}のみに依存）
- 縦方向電界による移動度変化をよく扱える。
- I_{DS}とその微分は$V_{DS}=0$で連続に扱える。
  （コンピュータシミュレーションに適合）

表面移動度と平均縦電界



■ 低電界領域での$E_{y,ave}$のμへの影響

不純物原子によるクーロン散乱
酸化膜界面電荷

⇒$E_{y,ave}$が高くなるにつれ増大する反転層電荷が、不純物原子や界面電荷をシールドするため、上記影響が弱まり、μは$E_{y,ave}$の増大に伴い上昇する。
⇒ $E_{y,ave}$が更に高くなるとフォノン（格子振動）散乱の影響が強くなり、上記上昇は止まる。

■ 高電界領域での$E_{y,ave}$のμへの影響

表面ラフネス（Surface Roughness）散乱

⇒$E_{y,ave}$が高くなるにつれμは低下

実効移動度（1）

ドリフト電流と拡散電流を併せたI_{DS}は、

$$I_{DS} = \mu W(-Q_I')\frac{d\psi_s}{dx} + \mu W\phi_t\frac{dQ_I'}{dx}$$

となる。μを一定とし、$x = 0$から$x = L$まで積分すると、μは積分の外にでるため、

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu\left[\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}}(-Q_I')\,d\psi_s + \phi_t(Q_{IL}' - Q_{I0}')\right]$$

となる。ここで、μをμ_{eff}（実効移動度：縦電界依存性あり）で置き換えると、
I_{DS}は以下になる。

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\mu_{eff}\left[\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}}(-Q_I')\,d\psi_s + \phi_t(Q_{IL}' - Q_{I0}')\right]$$

実効移動度（2）

一方、ドリフト電流と拡散電流を併せたI_{DS}

$$I_{DS} = \mu W(-Q_I')\frac{d\psi_s}{dx} + \mu W\phi_t\frac{dQ_I'}{dx}$$

の両辺をμで割り、$x = 0$から$x = L$まで積分すると、

$$I_{DS}\int_0^L \frac{dx}{\mu} = W\left[\int_{\psi_{s0}}^{\psi_{sL}}(-Q_I')\,d\psi_s + \phi_t(Q_{IL}' - Q_{I0}')\right]$$

となる。この式と前シートで求めたμ_{eff}を含む式を比較すると、以下が得られる。

$$\mu_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{L}\int_0^L \frac{1}{\mu}dx}$$

実効移動度（3）

実験データから、μは強反転の場合、以下で近似できる。

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha_\theta \mathrm{E}_{y,ave}}$$

ここで、

$$\mathrm{E}_{y,ave} = \frac{\mathrm{E}_{ys} + \mathrm{E}_{yb}}{2}$$

である。E_{ys}は表面での縦方向電界、E_{yb}は反転層下での縦方向電界である。つまり、

$$\mathrm{E}_{ys} = -\frac{Q_I' + Q_B'}{\varepsilon_s}, \qquad \mathrm{E}_{yb} = -\frac{Q_B'}{\varepsilon_s}$$

である。この場合、$\mathrm{E}_{y,ave}$は次式になる。

$$\mathrm{E}_{y,ave} = -\frac{Q_B' + 0.5Q_I'}{\varepsilon_s}$$

Mathiessenの法則

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$$

実効移動度（4）

$\mathrm{E}_{y,ave}$をμの式に代入すると、、μは以下になる。

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 - (a_\theta/\varepsilon_s)(Q_B' + 0.5Q_I')}$$

更に、μ_{eff}は、

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_0}{\frac{1}{L}\int_0^L [1 - (a_\theta/\varepsilon_s)(Q_B' + 0.5Q_I')]dx}$$

である。ここで、V_{CB}がxに対し線形に変化するものとすると（低いV_{DS}の場合成立）、
$dV_{CB}/dx \approx (V_{DB} - V_{SB})/L$　となるため、μ_{eff}は次式になる。

$$\mu_{eff} \approx \frac{\mu_0}{[1/(V_{DB} - V_{SB})]\int_{V_{SB}}^{V_{DB}} [1 - (a_\theta/\varepsilon_s)(Q_B' + 0.5Q_I')]dV_{CB}}$$

実効移動度（５）

計算の結果、μ_{eff}は

$$\mu_{eff} = \frac{\mu_0}{1+\theta f_\mu} \qquad \left(但し、\theta = \frac{\alpha_\theta}{2\varepsilon_s} C'_{ox} \right)$$

となる。f_μは、完全対称強反転モデルの場合、

$$f_\mu = (V_{GB} - V_{FB} - \phi_0) - \frac{1}{2}(V_{DB} + V_{SB}) + \frac{2}{3}\gamma \frac{(\phi_0 + V_{DB})^{3/2} - (\phi_0 + V_{SB})^{3/2}}{V_{DB} - V_{SB}}$$

一方、簡単化されたソース参照強反転モデルの場合のf_μは、

$$f_\mu = V_{GS} - V_{FB} - \phi_0 + \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) V_{DS} = V_{GS} - V_T + 2\gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) V_{DS}$$

但し、$V_T = V_{FB} + \phi_0 + \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}}$

実効移動度（６）

μ_{eff}の式の中のQ'_BとQ'_Iに代入する式として、

完全対称強反転モデル（直接導出）からの式

$$Q'_B = -\gamma C'_{ox} \sqrt{\phi_0 + V_{CB}}$$

$$Q'_I = -C'_{ox}\left(V_{GB} - V_{FB} - \phi_0 - V_{CB} - \gamma \sqrt{\phi_0 + V_{CB}}\right)$$

または、簡単化されたソース参照強反転モデル（直接導出）の式

$$-\frac{Q'_B}{C'_{ox}} \approx \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} + (\alpha - 1)(V_{CB} - V_{SB})$$

$$Q'_I = -C'_{ox}\left[V_{GB} - V_{SB} - V_{FB} - \phi_0 - \gamma\sqrt{\phi_0 + V_{SB}} - \alpha(V_{CB} - V_{SB})\right]$$

を代入して計算する。

実効移動度（7）

簡単化されたソース参照強反転モデルからのμ_{eff}を更に近似すると、

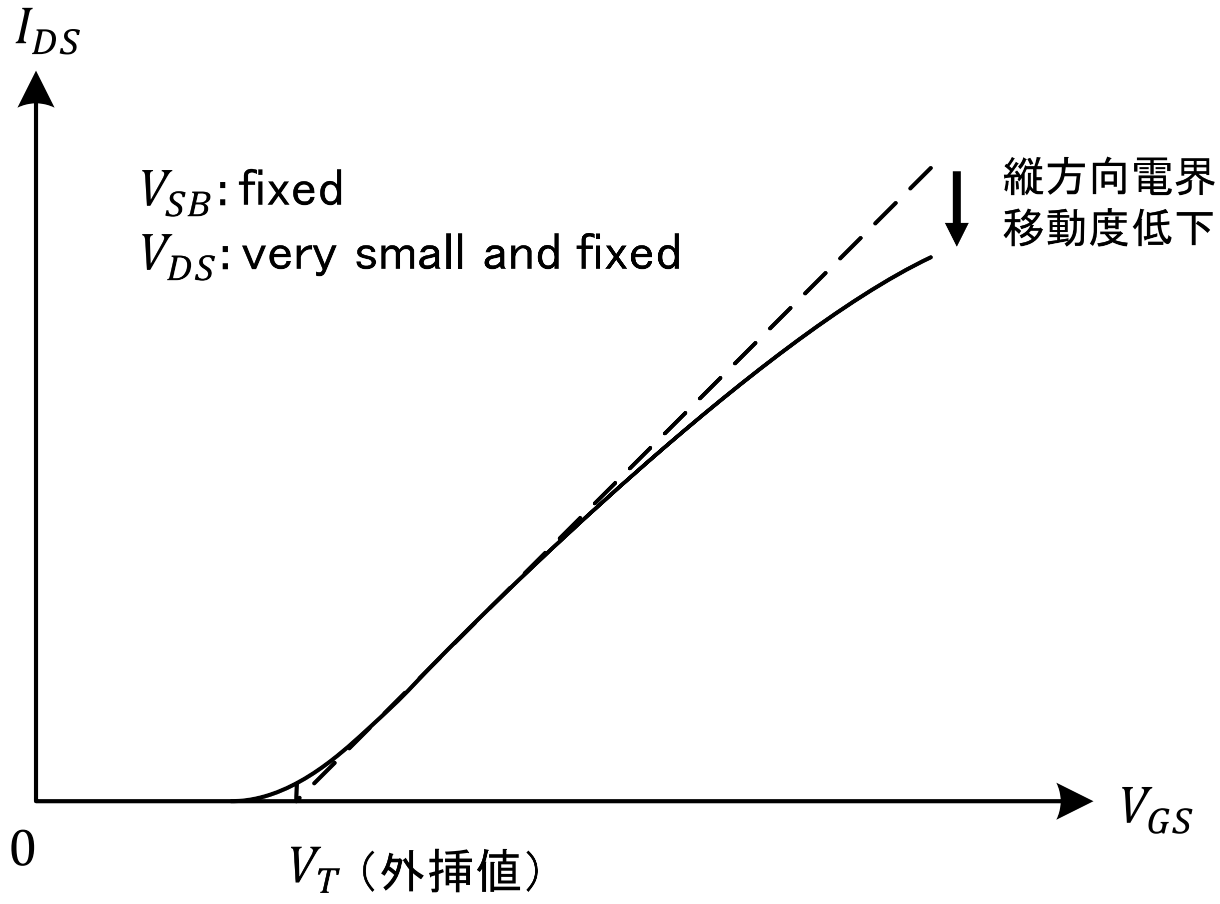
$$\mu_{eff} = \frac{\mu_0}{1 + \theta(V_{GS} - V_T) + \theta_B V_{SB}}$$ (但し、θ_Bは定数)

となる。ここでの近似は、

（１） f_μの中のV_{DS}に関する項を落とした。
⇒ 飽和電圧V'_{DS}に関し、今までの式（μを一定とした式）を使える。

（２） f_μの中のV_{SB}に関する項を線形近似した。

I_{DS} vs. V_{GS}特性



I_{DS}
V_{SB}: fixed
V_{DS}: very small and fixed
縦方向電界による
移動度低下に起因
0
V_T（外挿値）
V_{GS}

温度依存性

移動度の温度依存性は、以下で表される。

$$\mu(T) = \mu(T_r)\left(\frac{T}{T_r}\right)^{-k_3}$$

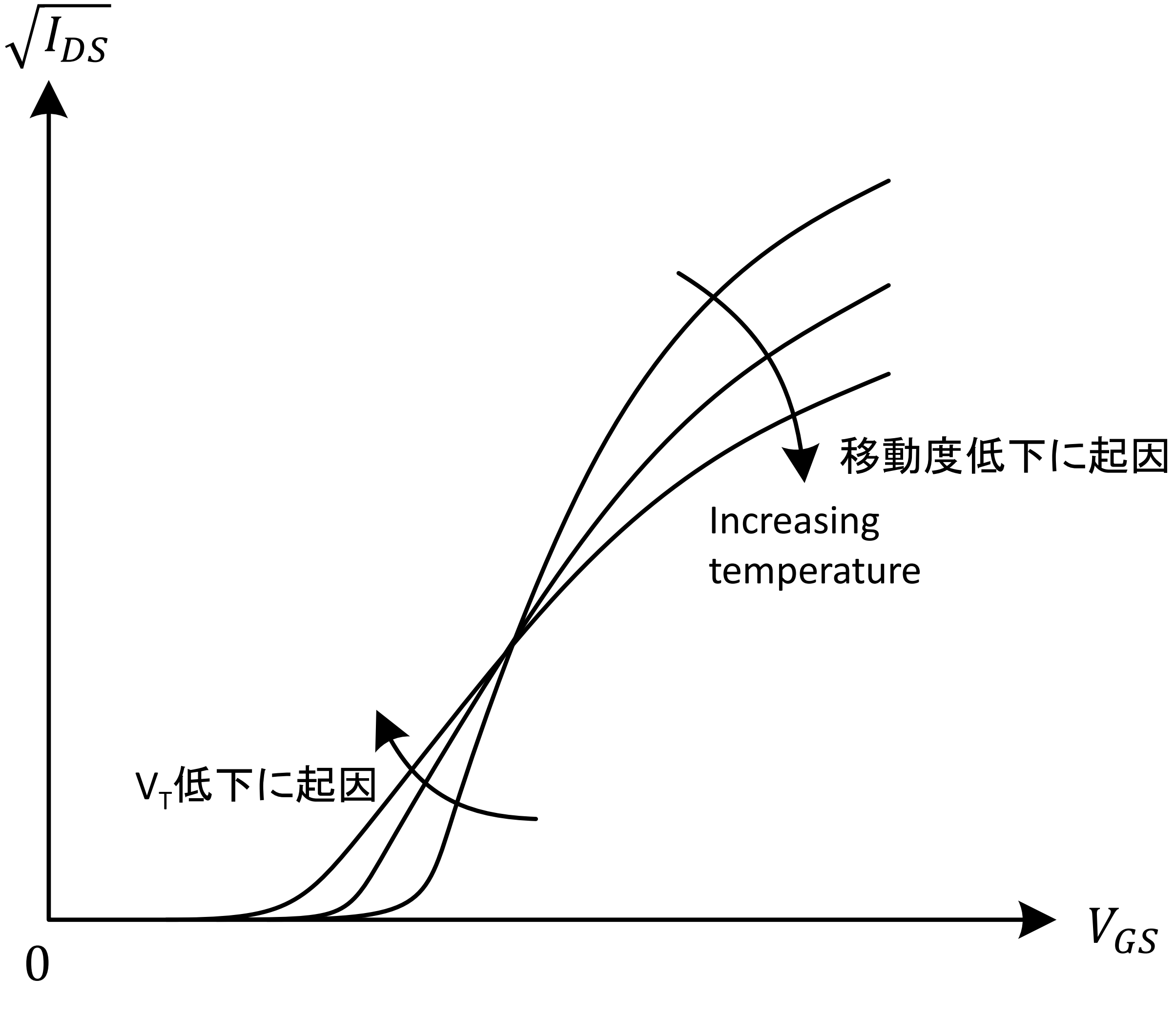
ここで、Tは絶対温度、T_rは室温、$k_3(= 1.2〜2.0)$は定数である。
V_Tの温度依存性は、以下で表される。

$$V_T(T) = V_T(T_r) - k_4(T - T_r)$$

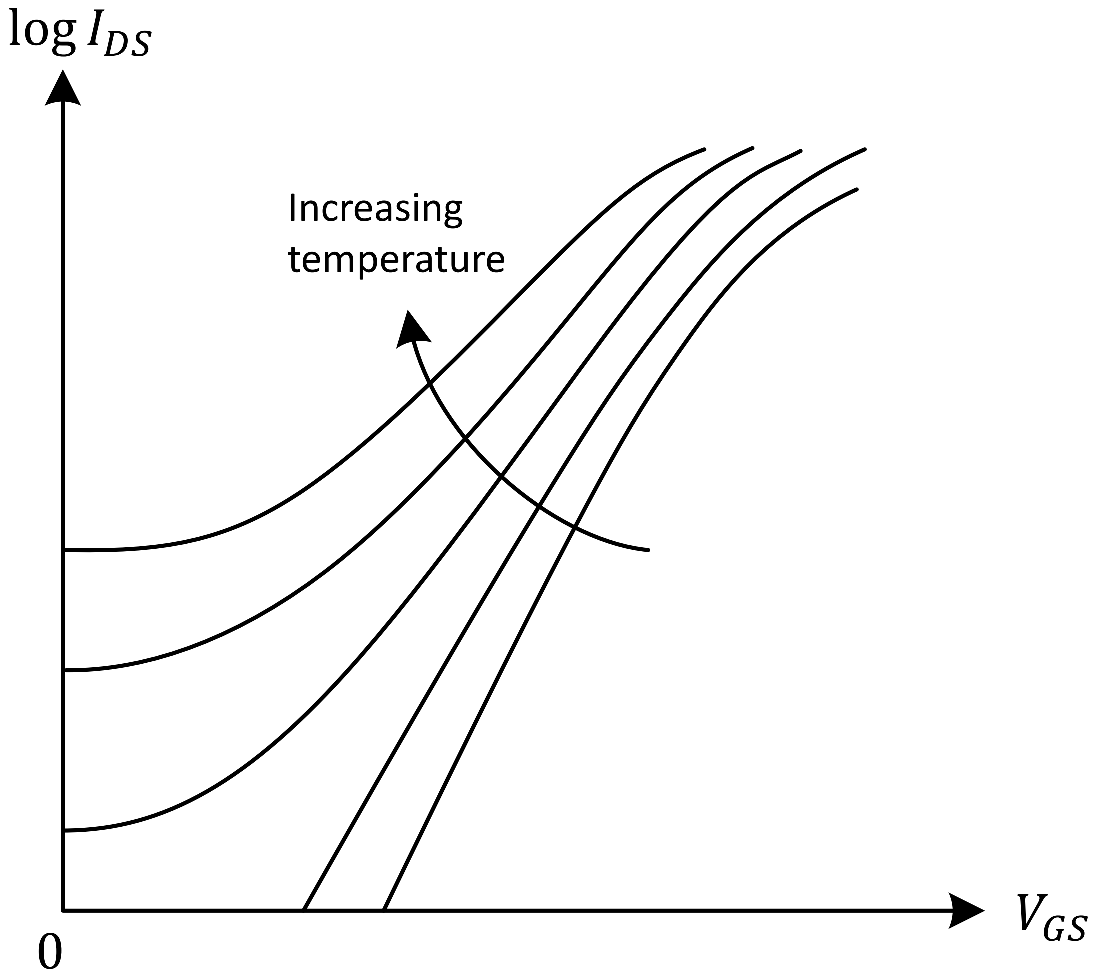
ここで、$k_4(= 0.5〜3\ \mathrm{mV/K})$は定数である。$V_T$は、$\phi_0$と$V_{FB}$により温度依存性を持つ。
これらから、電流式（簡単化されたソース参照強反転モデル：飽和状態）は次式となる。

$$\sqrt{I_{DS}} = \sqrt{\mu(T)}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{W}{L}\frac{C'_{ox}}{\alpha}}\left[V_{GS} - V_T(T)\right]$$

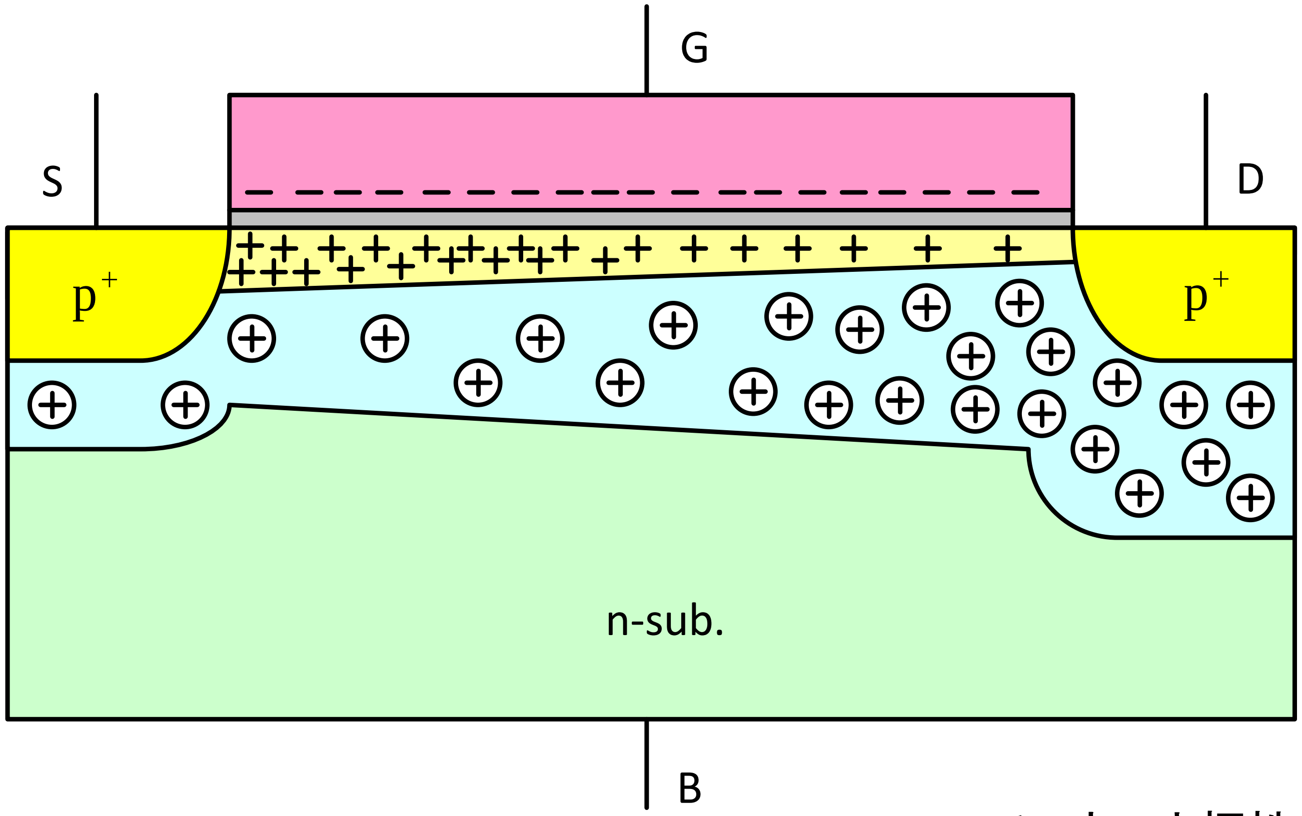
飽和領域での$I_{DS}^{1/2}$ vs. V_{GS}



Log I_{DS} vs. V_{GS}（低電流領域）

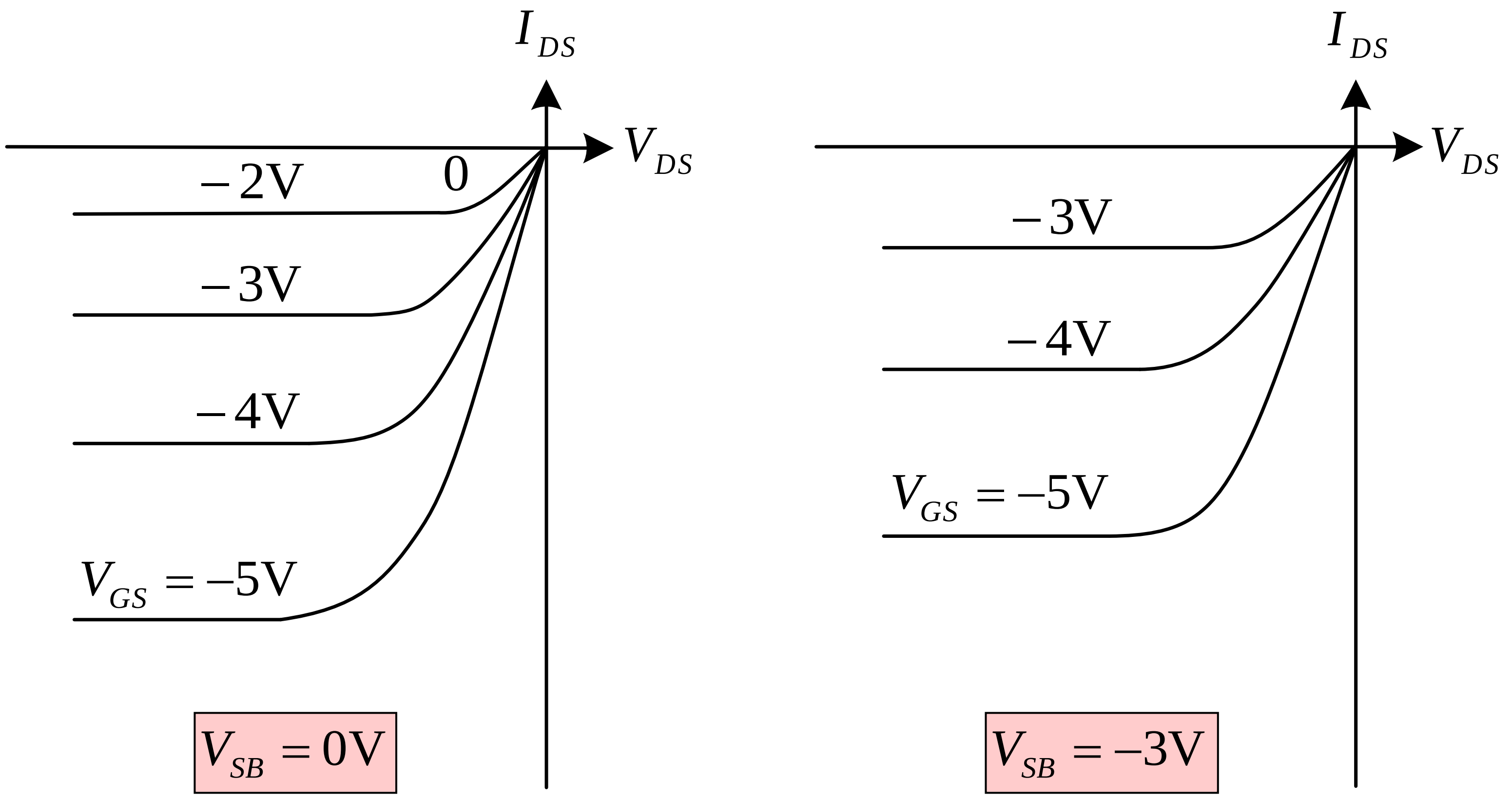


pチャネルMOSFET



nチャネルと極性が逆

pチャネルMOSFET I_{DS}–V_{DS} 特性



Pチャネルトランジスタ電流式

強反転領域の電流式は、以下になる。

$$I_{DSN} = -\frac{W}{L}\mu C'_{ox}\left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{\alpha}{2}{V_{DS}}^2\right]$$

ここで、閾値電圧は以下になる。

$$V_T(V_{SB}) = V_{T0} - \gamma\left(\sqrt{-\phi_0 - V_{SB}} - \sqrt{-\phi_0}\right)$$

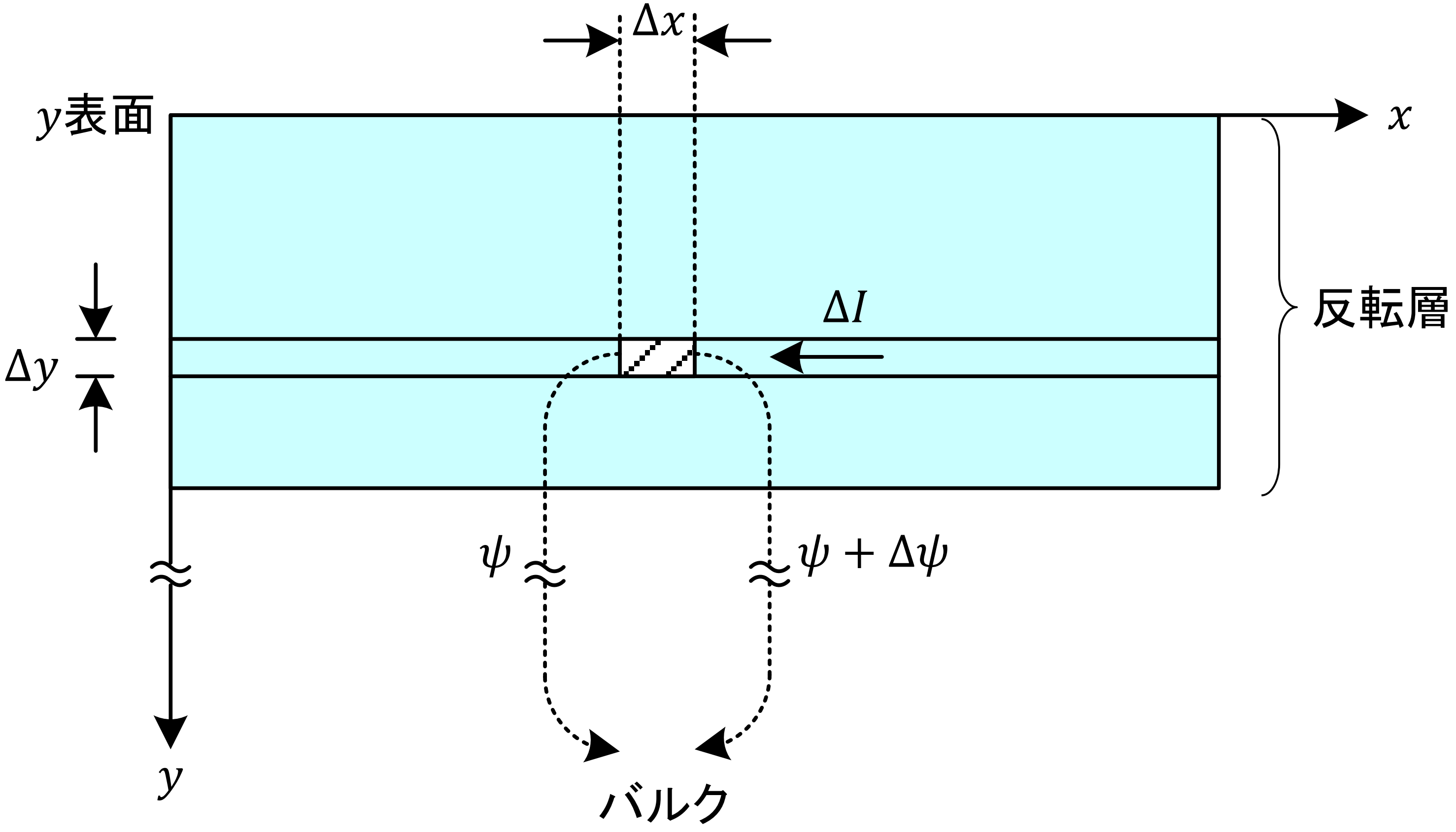
$$V_{T0} = V_{FB} + \phi_0 - \gamma\sqrt{-\phi_0}$$

ここで、V_{SB}とϕ_0は負の値である。

付録

擬フェルミ電位を用いたモデル（Ｐａｏ－Ｓａｈ）

擬フェルミ電位を用いたドレイン電流（1）
Pao-Sahモデル：反転層内の電流



擬フェルミ電位を用いたドレイン電流（２）

反転層内微小領域を流れる電流は、以下の如くである。

$$dI_{DS} = dI_{drift}(x, y) + dI_{diff}(x, y)$$

$$dI_{drift}(x, y) = (Wdy)q\mu n(x, y)\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x},\quad dI_{diff}(x, y) = -(Wdy)q\mu\phi_t\frac{\partial n(x, y)}{\partial x}$$

電子密度$n(x, y)$は、以下の如くである。

$$n(x, y) = n_0 e^{[\psi(x,y) - V(x)]/\phi_t}$$

$V(x)$は基板の深い領域と表面との擬フェルミ電位差である。

$$V(0) = V_{SB},\quad V(L) = V_{DB}$$

$n(x, y)$をxで微分すると、以下を得る。

$$\frac{\partial n(x, y)}{\partial x} = \frac{n(x, y)}{\varphi_t}\left[\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} - \frac{dV(x)}{dx}\right]$$

擬フェルミ電位を用いたドレイン電流（３）

$dI_{diff}(x,y)$は次式になる。

$$dI_{diff}(x,y) = -(Wdy)q\mu n(x,y)\left[\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} - \frac{dV(x)}{dx}\right]$$

この式と$dI_{drift}(x,y)$の式から、dI_{DS}は以下となる。

$$dI_{DS} = (Wdy)q\mu n(x,y)\frac{dV(x)}{dx}$$

全電流は、$y = y_{surface}$から$y = y_c$まで積分して、以下を得る。

$$I_{DS} = W\mu\frac{dV(x)}{dx}q\int_{y_{surface}}^{y_c} n(x,y)dy = W\mu(-Q_I')\frac{dV(x)}{dx}$$

（y_cより下では、
電子密度を無視でき、
μはyに依存しない）

次に、チャネル長に沿って積分すると以下になる。

$$I_{DS} = \frac{W}{L}\int_{V_{SB}}^{V_{DB}} \mu(-Q_I')dV$$

擬フェルミ電位を用いたドレイン電流（４）

電子と正孔が空乏層内に存在するとした場合、Q_I'は以下になる。

$$Q_I' = -qN_A e^{(-2\phi_F - V)/\phi_t} \int_{\psi_c}^{\psi_s} \frac{e^{\psi(y)/\phi_t}}{\mathrm{E}(\psi)} d\psi$$

ここで、ψ_cは、電子が無視できるところの基板に対する電位である。
便宜的に、$n = n_i$のところにとる。すなわち

$$\psi_c = \phi_F + V$$

である。また、$\mathrm{E}(\psi)$は、

$$\mathrm{E}(\psi) = \frac{\sqrt{2q\varepsilon_s N_A}}{\varepsilon_s} \sqrt{\phi_t e^{-\frac{\psi(y)}{\phi_t}} + \psi - \phi_t + e^{-\frac{2\phi_F}{\phi_t}} (\phi_t e^{\frac{\psi(y)-V}{\phi_t}} - \psi - \phi_t e^{-\frac{V}{\phi_t}})}$$

で与えられる。上記　Q_I' から I_{DS} は、下記の２重積分で表される。

$$I_{DS} = \frac{W}{L} qN_A \int_{V_{SB}}^{V_{DB}} \mu \int_{\psi_c}^{\psi_s} \frac{e^{(\psi - 2\phi_F - V)/\phi_t}}{\mathrm{E}(\psi)} d\psi dV$$