

制御工学は電子回路設計の 基礎理論

工学でもっとも重要な発明
フィードバックの概念

群馬大学 小林春夫

示村悦二郎先生の
制御工学の歴史の
テキスト等を参照
しています。

制御工学 第1回

自動制御とは何か

- 英語では:

Automatic Control (自動制御) ← こっち
Quality Control (品質管理)

- 辞書では: 制御

(1) 制し御すること

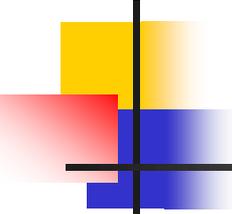
(2) 相手方を抑えて自分の意志のままに動かしてゆくこと。

御: 「馬を操る」の意味、 例: 御者



身近な自動制御の例

- 水道からバケツに水を入れる。
- 貯金額の制御
- 自転車の運転(方向、スピード)
- エアコンによる室温の制御



工学システムの制御の例

- 自動車の運転

アクセル、ブレーキ、ハンドル、クラッチ

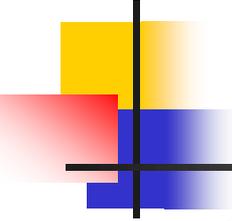
- ボートの運転

波にかかわらず、一定方向に進路を制御

- 飛行機の制御

悪天候の中でも、速度・高度・向きを一定に保つ

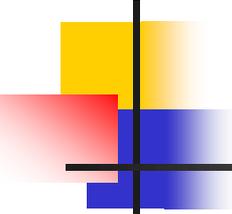
- ロケットの制御



工学システムの制御の例(2)

- 半導体プロセス工場、鉄鋼プラント工場、化学プラント工場の制御(プロセス制御)
流量、温度、
成分比率(ex. 燃料と空気の比)の制御
- ロボットの制御
ex. 荷物をその重さに関係なく与えられた
直線軌道に沿って一定速度で運搬する

○



社会システムの制御の例

- 経済システムの制御
(国家予算、金利政策、公共事業)
- 会社経営
- 軍隊の制御
- 対人関係

制御理論を用いて社会システムを解明する
アプローチ・学問がある。



生体システム、自然界システムの 制御の例

- 人体の体温

一年を通じて、外気温度にかかわらず、
ほぼ36.5度に保たれている。

- インダス川、揚子江の制御

川の流れの制御、治水

河を治める者が国を治める



信玄堤

- **武田信玄**： 戦国時代 甲斐の国の領主
信玄堤 信玄によってつくられた堤防
- 古代中国王朝 夏(か)の王 **禹(う)**：
黄河沿いの人々は洪水に苦しんでいたが、
禹は13年かけて治水工事を成功
- 秦の**始皇帝**： 韓王は秦が大工事を好むので
鄭国を秦に送る。治水の大工事をさせ秦の国力を
低下させる目論みは露見。が、鄭国は治水の
有効性を説く。始皇帝は同意し治水工事は進む。



制御とは何か

- **制御**: 注目している対象物に、何か目標とする状態があって、常にその目標状態を維持するようにその対象物を操作すること。

- 制御の主体

目的



- 制御の対象

知識(計測)

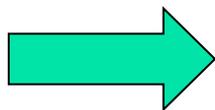
自律性

制御システムの構成

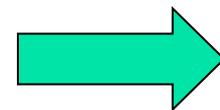
エアコン

外乱 (ドア開閉、
天気)

制御主体



制御対象



操作量

制御量

(冷たい空気の量)

(室温)

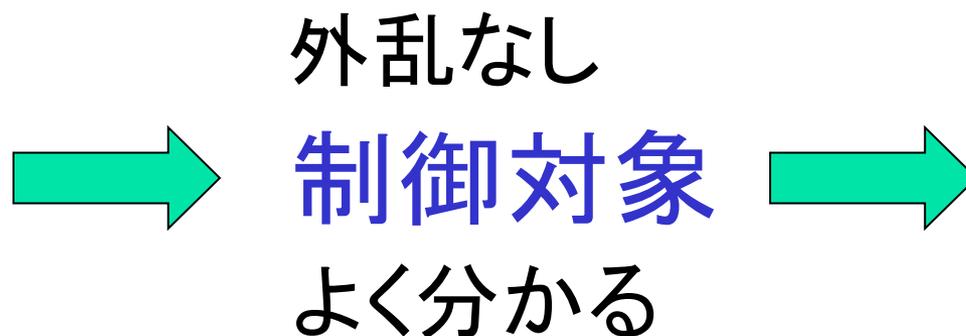
操作量: 制御主体がコントロールできる。

外乱: ” できない。



制御システムに関する知識 (1)

White Box

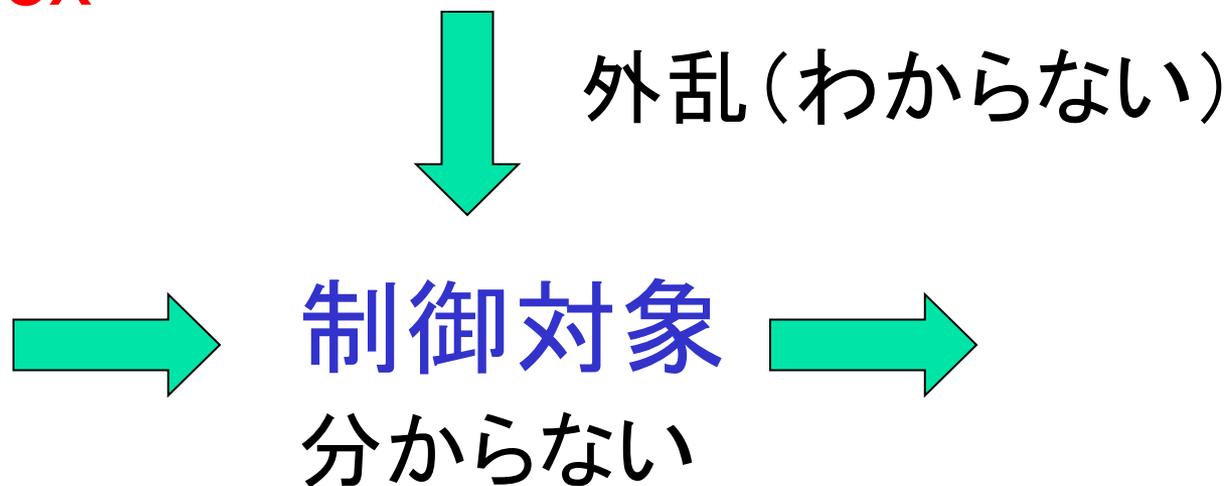


例： 人工衛星の制御

数式モデル、宇宙では外乱が少ない。
工学問題としては ある意味では簡単。

制御システムに関する知識 (2)

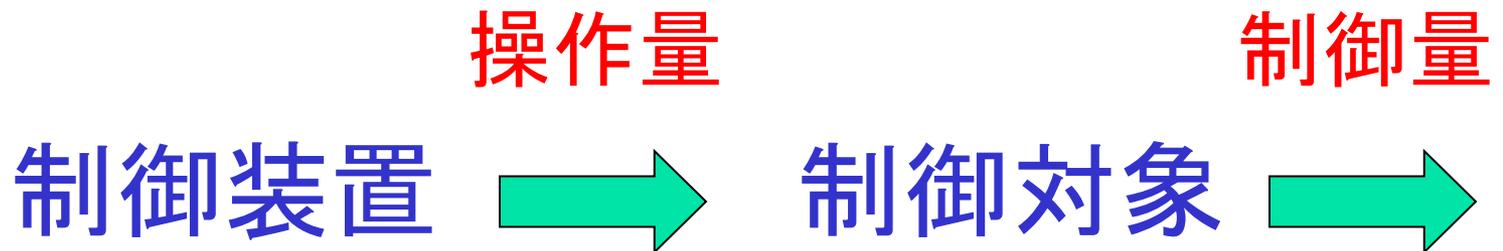
Black Box



例： 地上の多くのもの

制御対象が分かる場合

- 開ループ制御、
Open-Loop制御, Feedforward制御

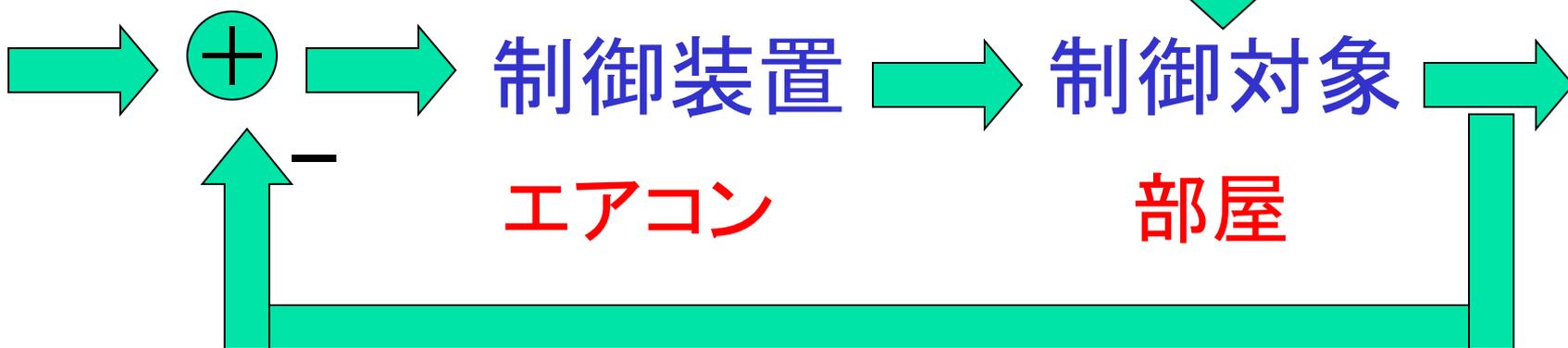


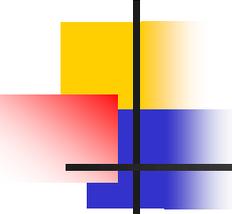
制御対象が分からない場合

- 閉ループ制御、

Closed-Loop制御, Feedback制御

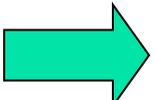
目標	動作信号	操作量	外乱	制御量
設定温度		冷空気量	天気	室温





2つの制御方式

- 開ループ制御 = feedforward 制御
control, steuerung
ドイツ、絶対王政
- 閉ループ制御 = feedback 制御
regulate, regelung
イギリス、民主主義

Feedback  工学、社会、生体システムの考え方で最も重要な概念

ジェームズ・ワット

James Watt 1736 - 1819



- イギリスの発明家、機械技術者。
- 蒸気機関の改良を通じて
全世界の産業革命の進展に寄与。

蒸気機関技術機関設計ではシリンダーが冷却と加熱を繰り返す。熱量が大量に無駄。凝縮器を分離し熱量損失低減、蒸気機関の出力、効率、費用対効果を高めた。

出力速度が一定になる回転運動が必要

调速機 (Governor) の発明 → フィードバック制御

ガバナーとフィードバック制御

ガバナー（Governor 調速機）

蒸気機関で、回転速度を一定に保つようにした装置。
回転数が下がると自動的に弁が開き回転数を上げ、
回転数が上がると弁が閉じることで回転数を一定に保つ。

➡ フィードバック制御

この装置は、条件により発振することがあり。
理由を調べることで制御工学が確立。

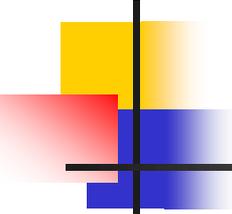
➡ フィードバック制御での安定性の問題





システム制御工学

- 制御対象は限定されていない。
機械工学、電気工学、化学工学、
経済学、医学 等
- 概念指向型、横断的な学問
システムを扱う学問
- 抽象化することで、様々なシステムに
適用可能
- 広い意味での情報工学の一つ



自動化の意味（自動制御）

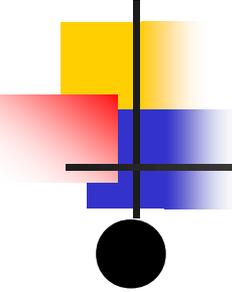
● **省人化**： 単調・危険な仕事から人間を解放。
ただし完全無人化は異常発生時のときに問題。

● **省エネルギー**：

例： 燃焼に必要な以上に燃焼用空気を流す。

➡ 空気を加熱するエネルギーがロス。

人の操作では完全に燃料/空気比を目標に一致させることができない。



自動化の意味(2)

● 省資源、低コスト化、高品質化:

例: 製紙工場

紙の厚さにばらつき

➡ 安全サイドに厚くする。

自動制御によりばらつきが小

➡ 規格ぎりぎりの厚さでよい。

1940年代 — 1950年代

第2次世界大戦、45年終戦

米、独、英： MIT 火砲の制御、

ベル研究所 電気通信

特徴： **周波数領域**での解析・設計

現在も広く用いられている。

1960年 —

- ポントリアギン(ソ連) 最適制御
- カルマン(米) Kalman Filter

アポロ計画に適用

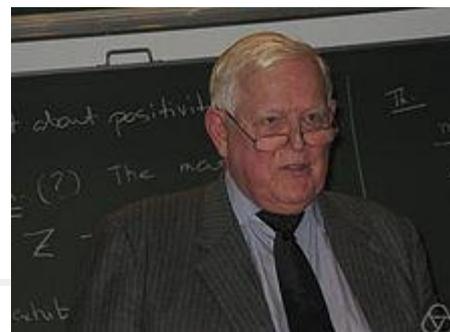
実際家からの反撃、数学的すぎる。

“現代制御理論は役に立つか”というシンポジウム

特徴: **時間領域**での解析・設計、微分方程式
行列、計算アルゴリズム、コンピュータの使用



R. E. Kalman



現代制御理論の創始者
カルマンフィルター等で著名
ハンガリー生まれで、米国で活躍

スタンフォード大学
フロリダ大学
スイス連邦工科大学

レフ・セミョーノヴィッチ・ポントリャーギン

Лев Семёнович Понтрягин 1908- 1988



ロシアの数学者

13才の時爆発事故で両眼失明。母の助力。

モスクワ大学でアレキサンドロフに師事

19才で位相幾何学の双対定理に関する論文を発表
次元論、位相群、位相体、リー群に関する研究

1935年モスクワ大学教授

1940年頃にはホモトピー論や多様体のホモロジー論を研究
位相幾何学の発展に大きく貢献。

1961年「最適過程の数学的方法」でレーニン賞受賞

最適制御理論、最大値原理

現代制御では「内部状態」を考える

古典制御のシステムのモデル

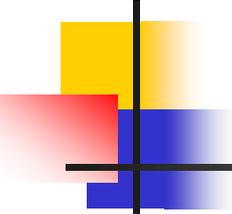


現代制御のシステムのモデル



状態方程式

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$



可観測性 Observability

- 時刻 t の内部状態 $x(t)$ が
時刻 $t \sim t+T$ 間の出力 $y(\cdot)$ から
知ることができる。

→ システムは**可観測**
できない。

→ システムは**不可観測**

観測 ↔ 計測

システムが可観測か不可観測か わかりやすい例

君らがバイトをして気のある女性にプレゼント

→ その女性は喜ぶ

なぜ喜んだのか（君に気があったからか、
単に物をもらったのでうれしかったのか）

その後のその女性の様子を見て

理由がわかった → 可観測

理由がわからない → 不可観測

（女心は複雑）



可制御性 Controllability

- 時刻 t の任意の内部状態 $x(t)$ を
時間 $t \sim t+T$ のある入力 $u(\cdot)$ により
原点にもっていくことが ($x(t+T) = 0$)

できる。



システムは**可制御**

できない。



システムは**不可制御**



「計測」と「制御」は双対の関係

「計測なくして制御なし」

計測技術と制御技術は表裏一体の関係

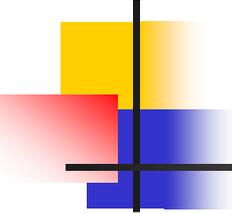
カルマンフィルタ(観測、計測)

最適制御(制御)

数式上双対の関係が示されている

“You can't control what you can't measure.”

(Tom DeMarco)



制御工学の歴史 **ポスト現代制御理論**

1980年 —

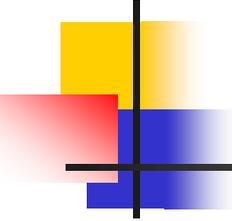
特徴： 古典と現代制御理論の融合

時間領域、周波数領域での解析・設計

制御対象の数式モデルに誤差があっても適用できる。

 **ロバスト制御理論** (Robust: 頑健な)

広く実用化されつつある。

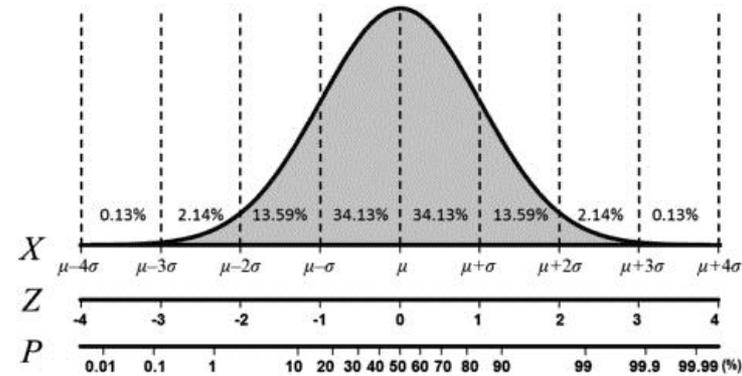


品質管理 (Quality Control)

- **Taguchi Method** (田口玄一氏、
群馬大工学部前身の桐生高専出身)
“アメリカの製造業をよみがえらせた男”
- General Electric 社
シックス・シグマ法

品質管理

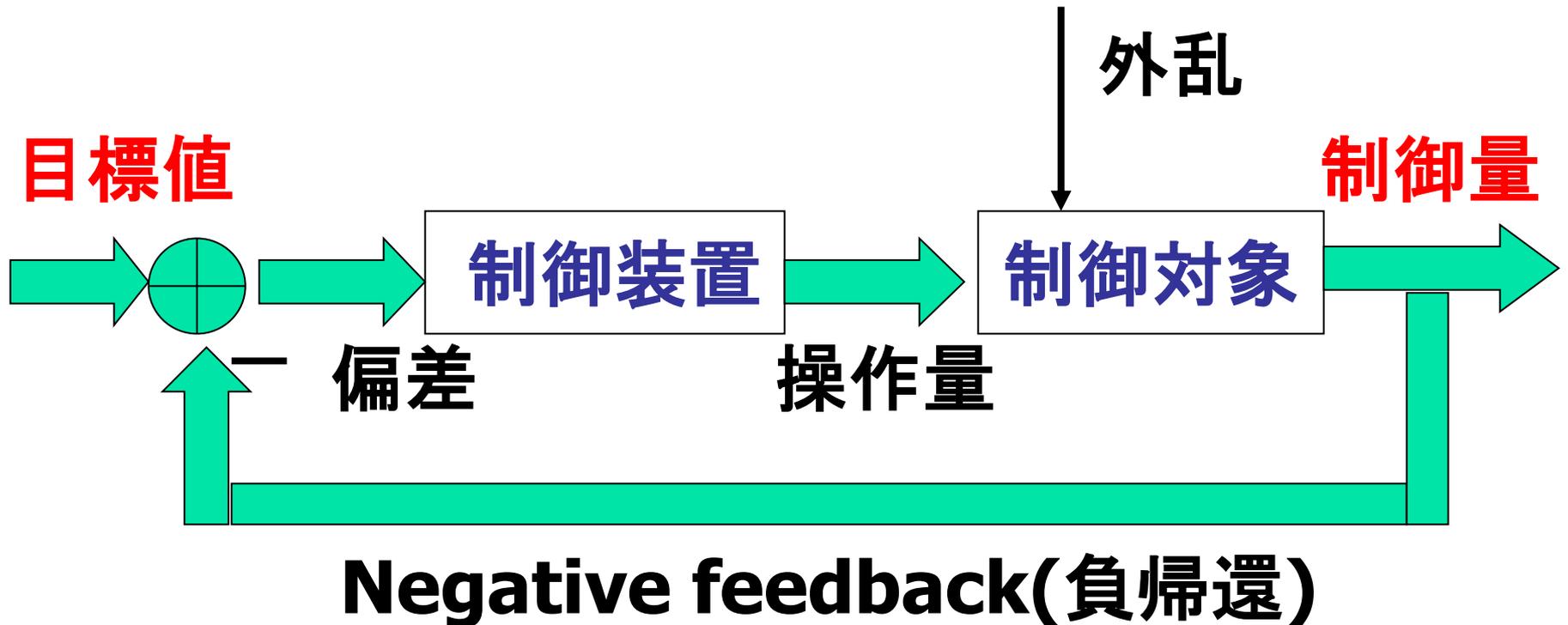
シックスシグマ(6 σ)



- **シックス・シグマ**: ある品質特性値が(平均値 μ , 標準偏差 σ)の正規分布に従う製品不良の発生状態で、「100万回の作業を実施しても不良品の発生率を3.4回に抑える」ことへのスローガン
- 適用範囲は製造業が中心であるが、それにとどまらない。
- 統計分析手法、品質管理手法を体系的に使用。
製品製造工程などの各種プロセスの分析。
原因の特定、対策を行なう。
- ➡ 不良率の引き下げ、顧客満足度の向上を図る。
- 米国企業で考案・普及、日本企業にも普及

制御工学 第2回 フィードバック制御

自動制御の基本



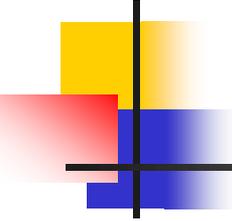


フィードバック制御の利点

- ① 外乱の影響の除去
- ② 制御対象の特性変動の除去
- ③ 不安定なシステムの安定化

example: 飛行機

- 悪天候の中を方向、高度、スピードを一定に保つ
- 制御しなければ墜落(不安定なシステム)



フィードバック制御の注意点

- フィードバック制御により安定なシステムが不安定になることがある。

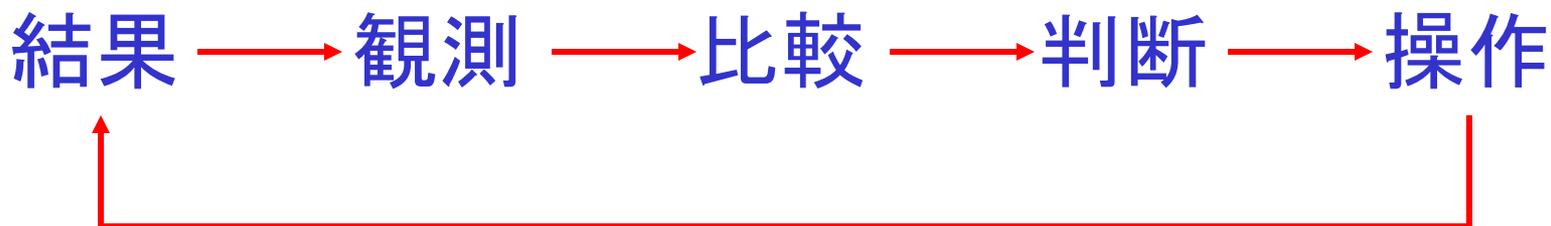
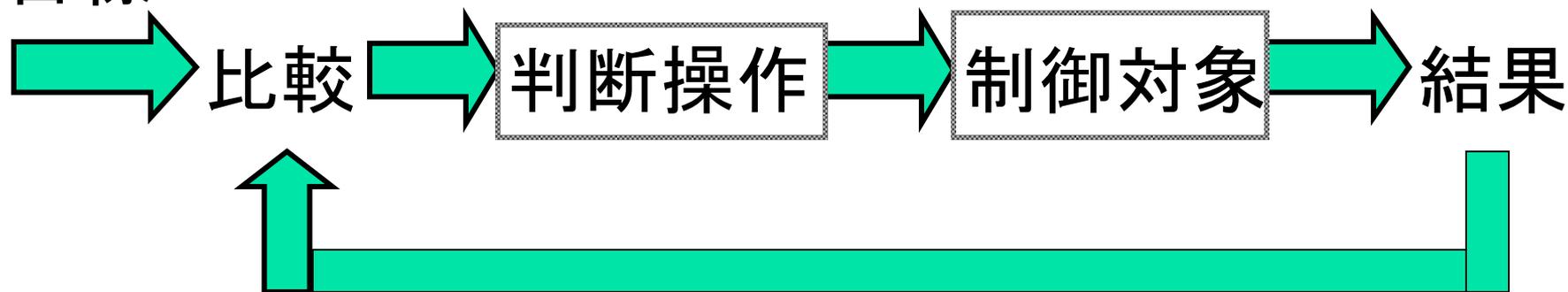


システムの**安定性**の理論が必要

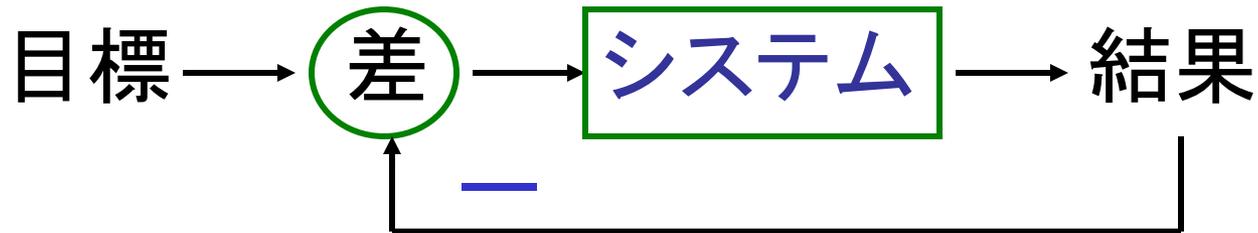
動作の流れ

■ (例) 車の運転

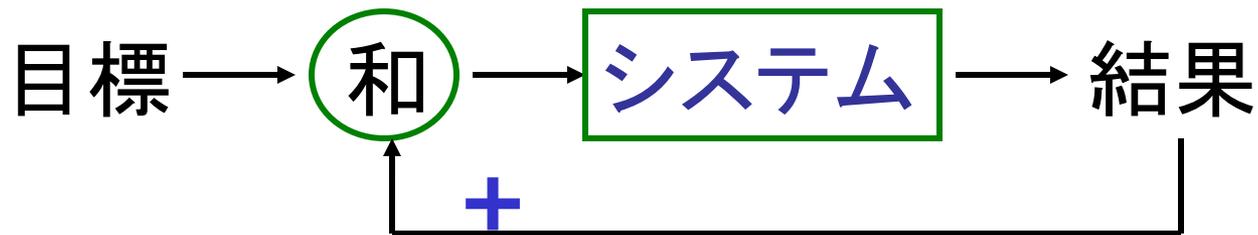
目標



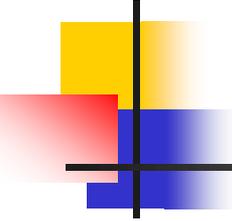
Feedbackの種類



Negative Feedback (負帰還)



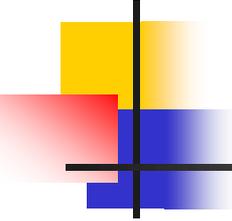
Positive Feedback (正帰還)



Positive Feedbackの例

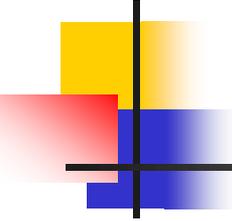
- 悪循環
- 好循環
- 口論
- 酒の注ぎあい

- 自動制御では「フィードバック」は Negative Feedbackのこと。
cf. 電子回路では Positive Feedbackも積極的に利用されている。



身近なフィードバック制御の例

- 電気こたつの温度制御
(サーモスタットでのON/OFF 制御)
- カメラのオートフォーカス(自動焦点)
- ゴキブリと殺虫剤
- ラジオの自動選局
- 自動車教習所での指導者と受講者
- 競馬、競輪のオッズ



社会システムにおけるフィードバックの例

- 為替、株価、通貨の発行
- 労働市場（就業率、賃金、ベースアップ）
- 商品の需要と供給、商品価格
- 国家予算
- 民主主義、代議政治、選挙
- 犯罪と法律
- 交通違反取り締まり
- ダムによる河川の水量

自然界における フィードバック制御の例

- 生態系、生物ピラミッドと食物連鎖
- 人体の体温、汗と毛穴
- 人とのコミュニケーション
- 地球の温度

生物におけるフィードバック



Nobert Wiener “Cybernetics” (サイバネテクス)

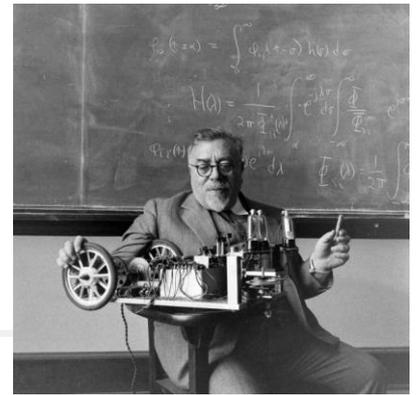
人間機械論

工学システムにおけるフィードバック制御の例

- 情報処理における誤り訂正符号

ノーバート・ウィーナー

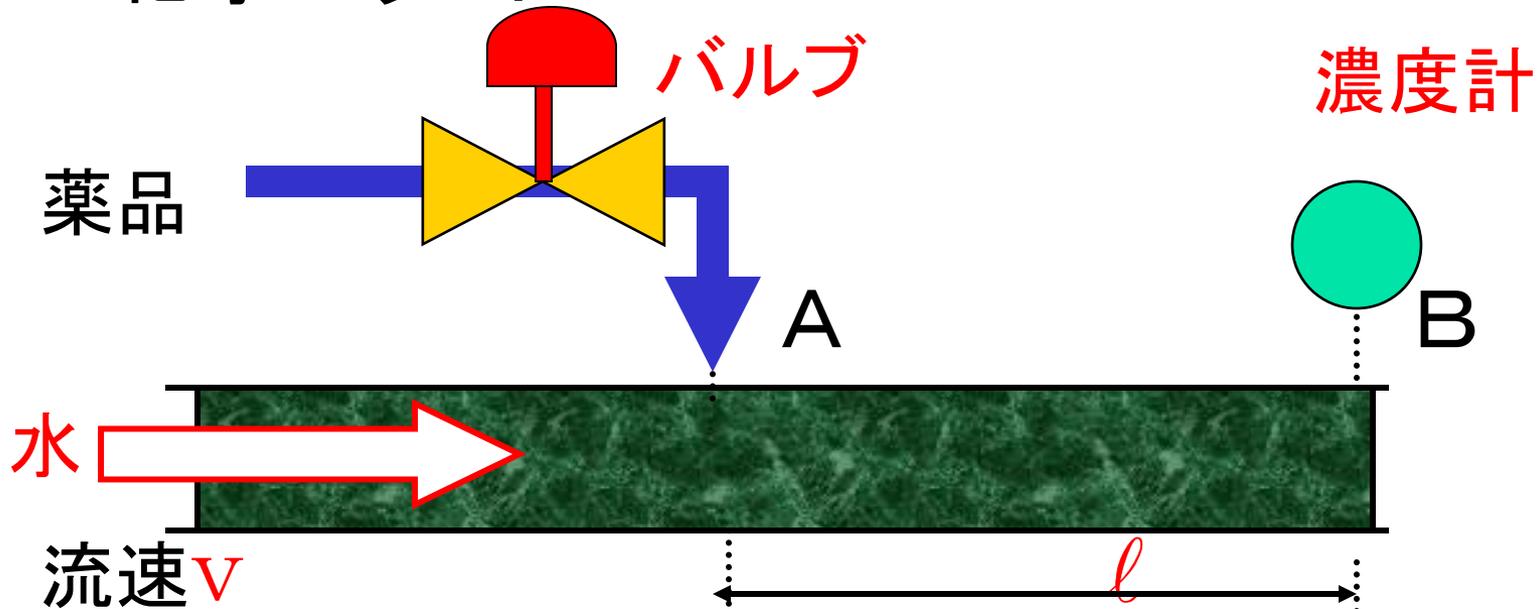
Norbert Wiener 1894 - 1964



- アメリカ合衆国の数学者、サイバネティックスの創設者
- ブラウン運動、フーリエ積分、調和解析
通信工学、制御理論、ロボテクス、オートメーション
- **サイバネティックス**: 通信工学と制御工学を融し、
生理学、機械工学、システム工学を統一的に扱う学問。
ギリシャ語で「船の舵を取る者」の意
フィードバックの考えが様々なところで応用・総合のために
使えると考えた。
- 「科学者は、宇宙の秩序と組織性を発見する仕事に
取り組み、無秩序化という敵を相手に
ゲームをやっている。」

フィードバック制御により不安定になる例

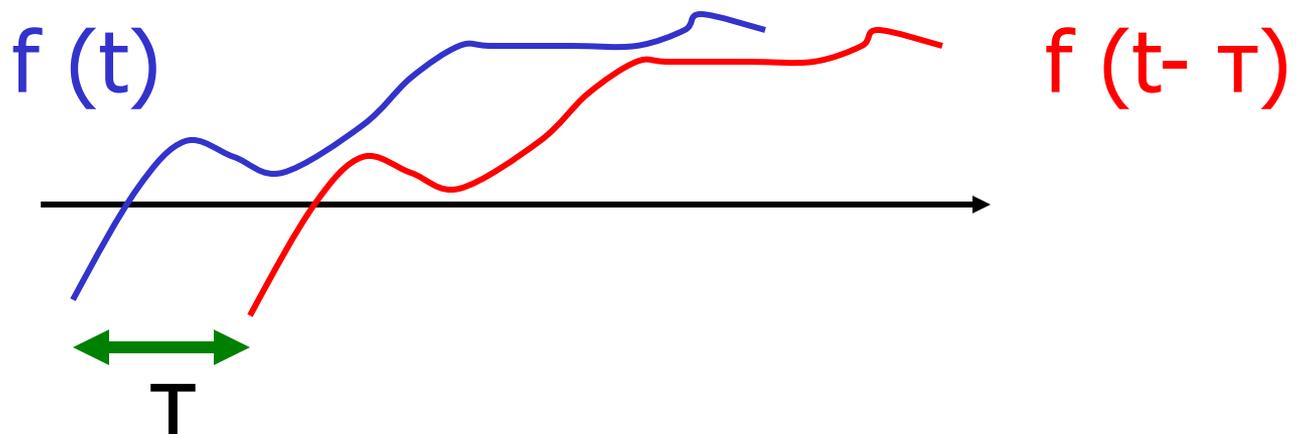
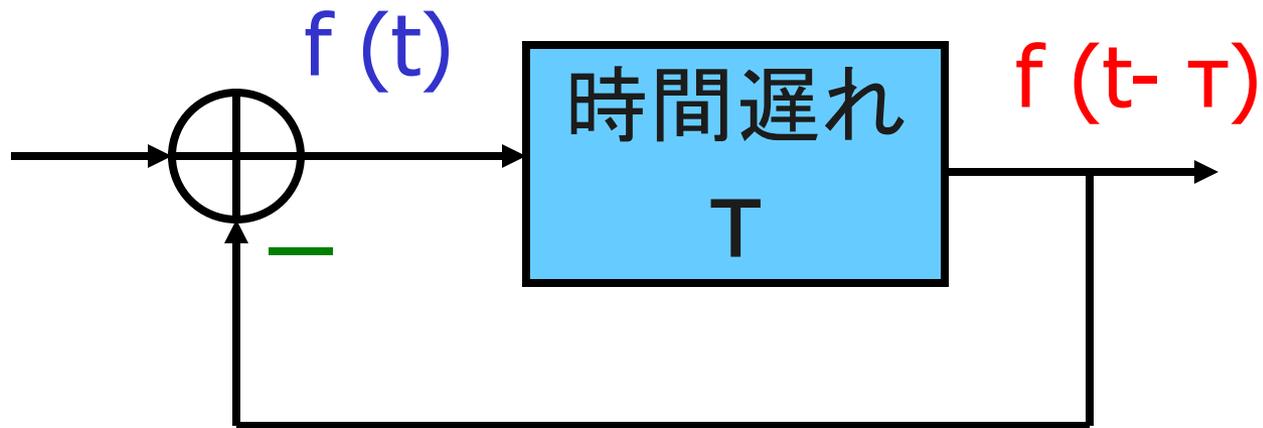
■ 化学プラント



バルブの開閉によって薬品濃度を一定

AB間の時間遅れ l/v

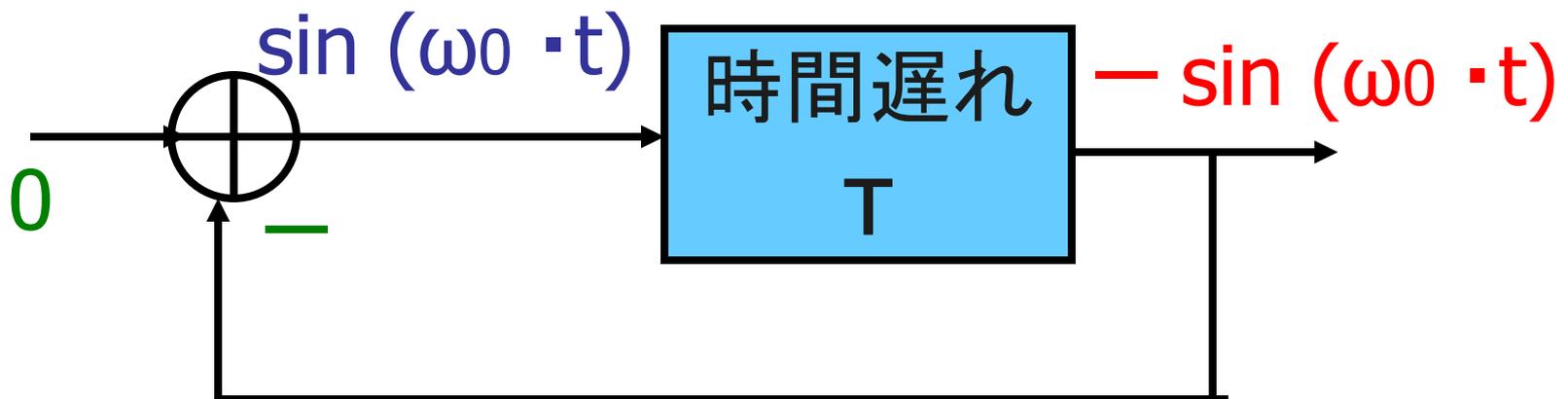
時間遅れが大きいフィードバック系 ほど不安定になりやすい



ゼロ入力で発振する

- $\omega_0 \cdot T = \pi$ のとき

$$\begin{aligned}\sin(\omega_0(t - T)) &= \sin(\omega_0 \cdot t - \pi) \\ &= -\sin(\omega_0 \cdot t)\end{aligned}$$

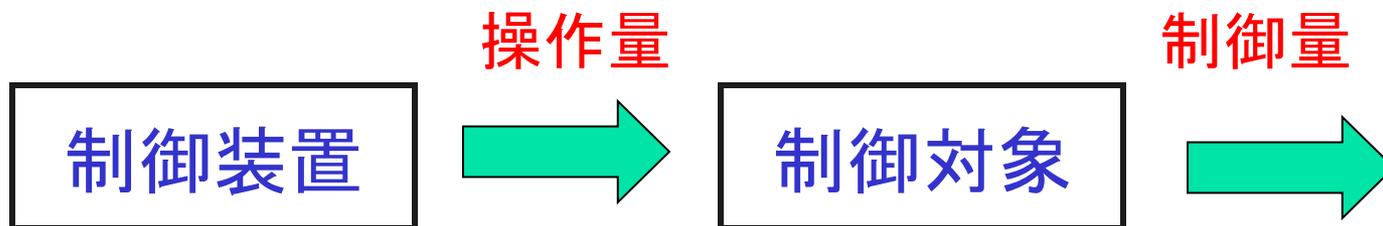


フィードフォワード制御

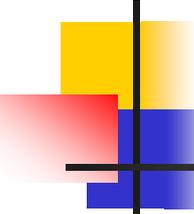
制御対象が完全に分かっている。

外乱がない。

制御特性への要求が厳しくないときに有効。



身近な例： 自動炊飯器 簡単のため計測しない。



家電製品におけるフィードフォワード制御 とフィードバック制御の例

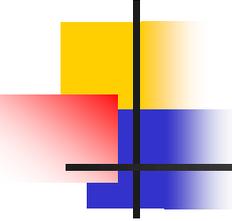
フィードフォワード制御： 自動炊飯器

簡単のため計測しない。

フィードバック制御：

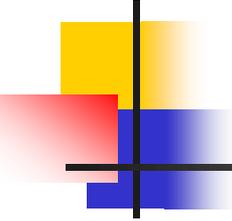
テープレコーダ、CDプレーヤーのモーター制御

高精度が要求される。



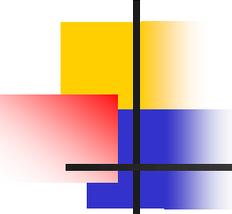
フィードフォワードとフィードバック(1)

- フィードバック制御(後手の制御)
偏差が生じてから対策を講じる。(遅い)
- フィードフォワード制御(先手の制御)
あらかじめ手を考えて対策を準備(早い)
高い制御性能が得られることあり。
- 両方を組み合わせた制御を用いることも多い。



フィードフォワードとフィードバック(2)

- 人間の熟練動作の獲得過程
 - ➡ フィードバック制御から
フィードフォワード制御への移行
- 日本的経営(フィードバック的)
根回し、多くの人との合意
- 欧米流経営(フィードフォワード的)
トップダウン、迅速



フィードフォワードとフィードバック(3)

- 帰納法 (フィードバック)
演繹法 (フィードフォワード)
- 失敗は成功のもと(フィードバック)
- 成功は失敗のもと(Silicon Valleyの格言)

過去の成功体験は次の新しい発想の妨げになる、大きな飛躍の妨げになる。

Silicon Valley でのジョーク:

IC は Integrated Circuit ではなく
India & Chinese の略語

制御工学 第3回

自動制御で用いる数学

厳密な定義よりも「何に役に立つか、なぜ便利なのか」「役に立つ道具」として数学を理解する必要あり。

周波数応答法： 強力な設計・解析手法

自動制御での数学とシステム表現

数学

フーリエ変換
ラプラス変換
安定判別
微分方程式
など

システムの表現

周波数応答
伝達関数
ボーデ線図、ベクトル線図
状態方程式
など

- 式によるシステム表現
- 図によるシステム表現

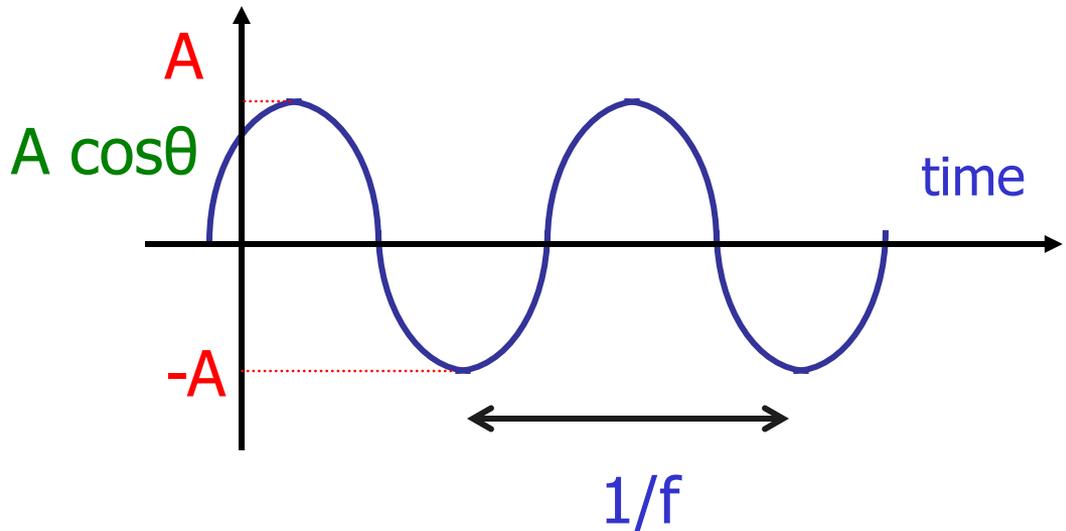
自動制御でよくでてくる信号

① 余弦波

$$c(t) = A \cos(2\pi f t + \theta)$$

3要素: **A**: 振幅
f: 周波数
 θ : 位相

$\omega = 2\pi f$: 角周波数



- **振幅**、**周波数**だけでなく**位相**も重要。
- 余弦波は電氣的・機械的に発生しやすい。

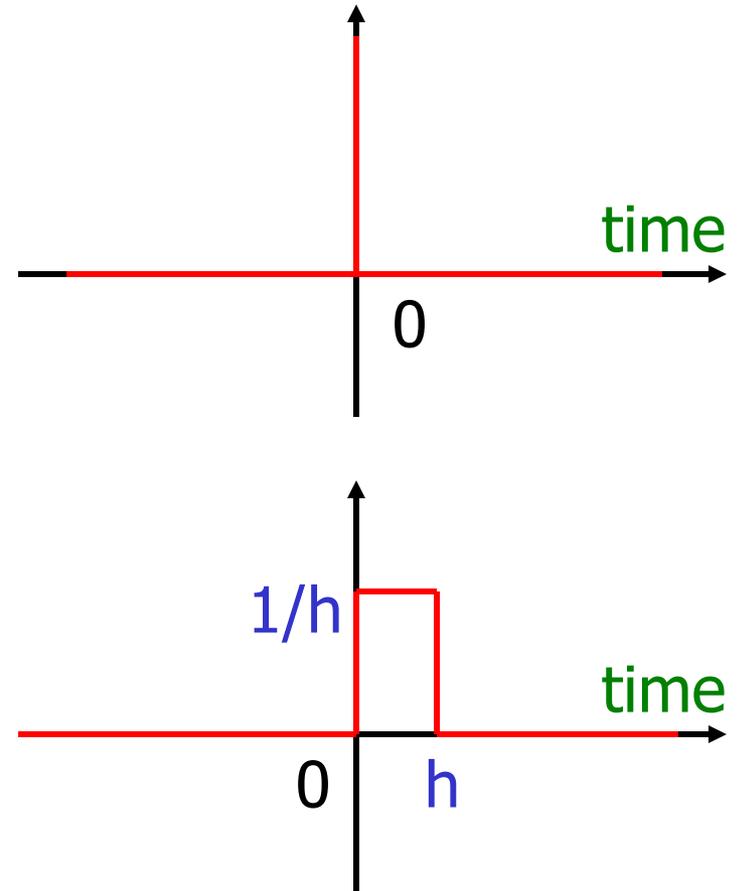
自動制御でよくでてくる信号

② インパルス信号(デルタ関数、 δ 関数)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \infty & (t = 0) \\ 0 & (t > 0) \end{cases}$$

$$= \lim_{h \rightarrow +0} \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1/h & (0 < t < h) \\ 0 & (t > h) \end{cases}$$

$$(\text{注}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



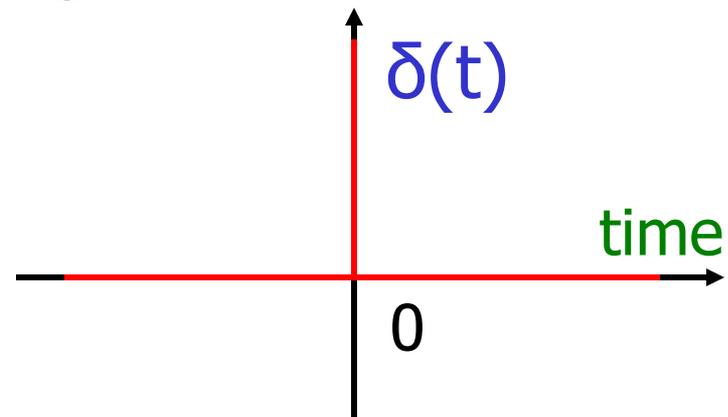
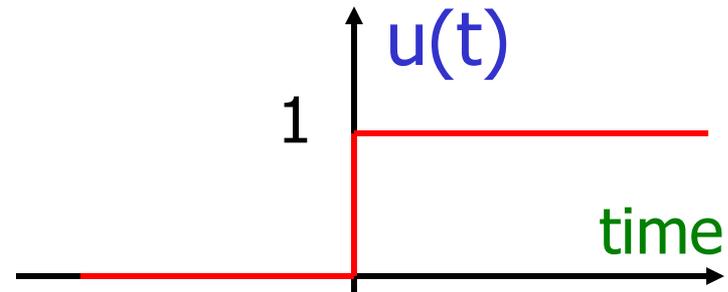
自動制御でよくでてくる信号

③ ステップ信号, ユニット関数

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

(注) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ に注意すると

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(p) dp$$



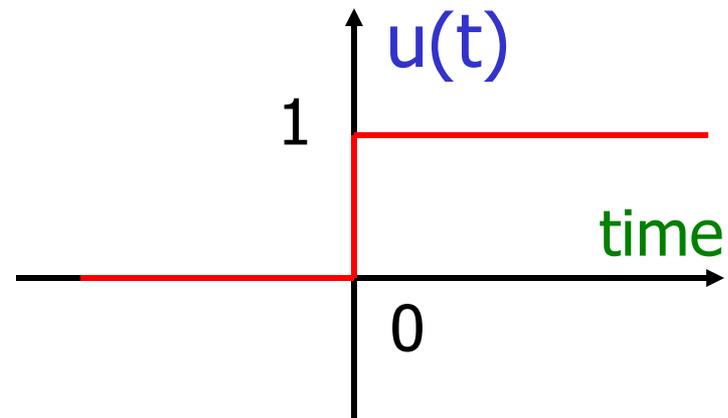
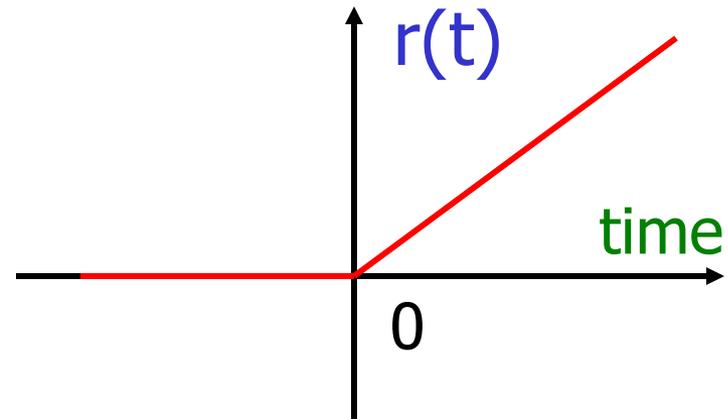
自動制御でよくでてくる信号

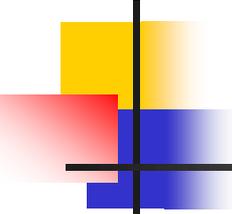
④ ランプ信号

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t > 0) \end{cases}$$

(注)

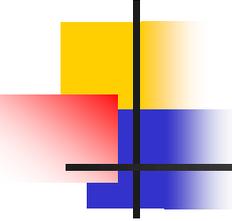
$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(p) dp$$





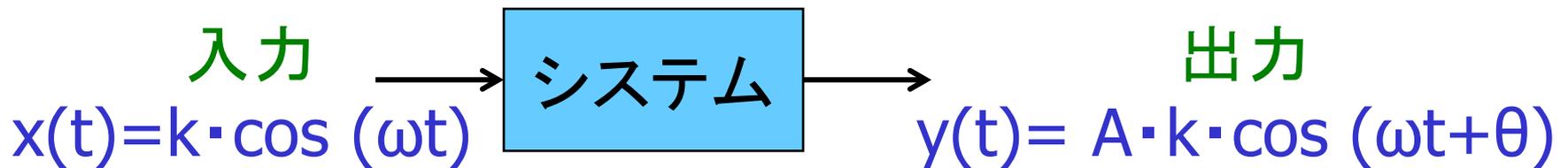
周波数応答法

- 安定な線形時不変システムの解析・設計に強力な手法。
- 制御だけでなく電子回路、通信分野等他分野でも広く用いられている。
- 周波数領域からのアプローチ。
- 数学的にはFourier変換と密接な関係。
- システム表現として、周波数伝達関数、ボード線図、ベクトル線図と密接な関係。

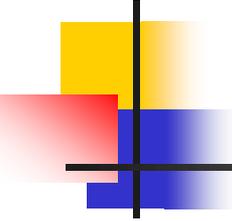


周波数応答法

安定な線形・時不変システム



余弦波を入力し十分時間が経つと、
出力 $y(t)$ は余弦波となる。



周波数応答法

入力: $x(t) = k \cdot \cos(\omega t)$

出力: $y(t) = A \cdot k \cdot \cos(\omega t + \theta)$

出力周波数 ω : 入力と同じ

出力振幅 $A \cdot k$: 一般に入力と異なる ($A \neq 1$),

また、 ω の関数 $A(\omega)$

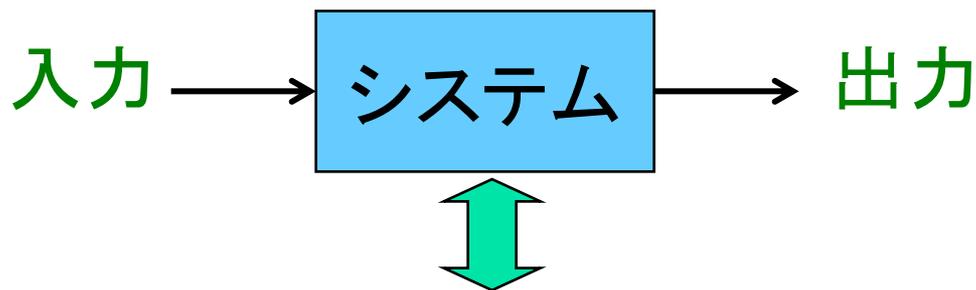
$$\frac{\text{出力振幅 } A \cdot k}{\text{入力振幅 } k} = \text{ゲイン } A$$

出力位相 θ : 一般に入力と異なる ($\theta \neq 0$)

また、 ω の関数 $\theta(\omega)$

システムの周波数応答表現

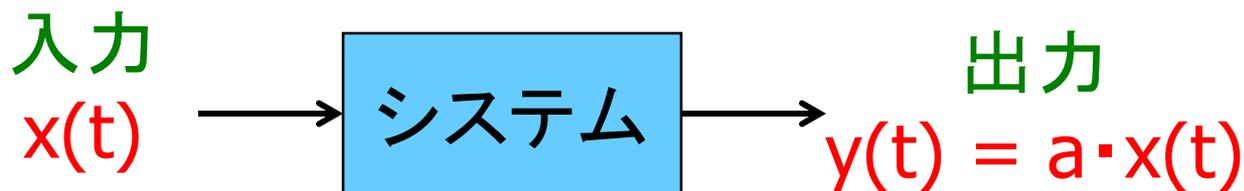
ある安定・線形・時不変システムの特徴を
そのシステムの 全ての ω ($0 < \omega < \infty$)に対する
 $A(\omega)$ 、 $\theta(\omega)$ で表す。 ➡ 周波数応答表現



全ての ω ($0 < \omega < \infty$)に対する $A(\omega)$ 、 $\theta(\omega)$ のデータ

(注) 余弦波、正弦波は電氣的・機械的に発生しやすいので便利。

例1 (比例)

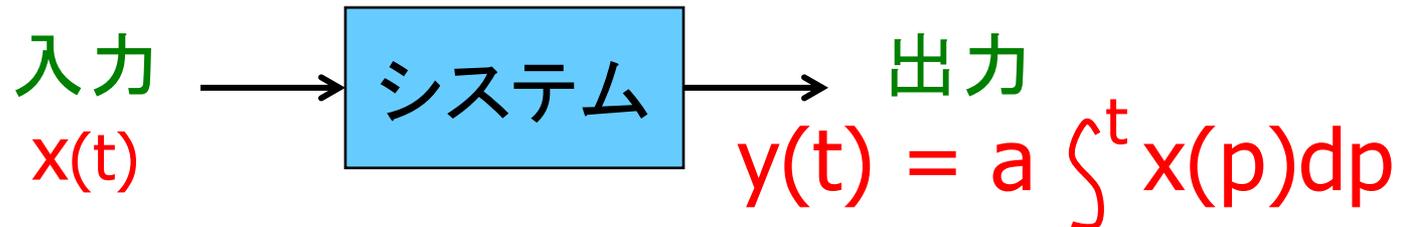


ここで a は定数。

$$x(t) = k \cdot \cos(\omega t) \text{ のとき、}$$
$$y(t) = a \cdot k \cdot \cos(\omega t)$$

$$\therefore \begin{cases} A(\omega) = a \\ \theta(\omega) = 0 \end{cases}$$

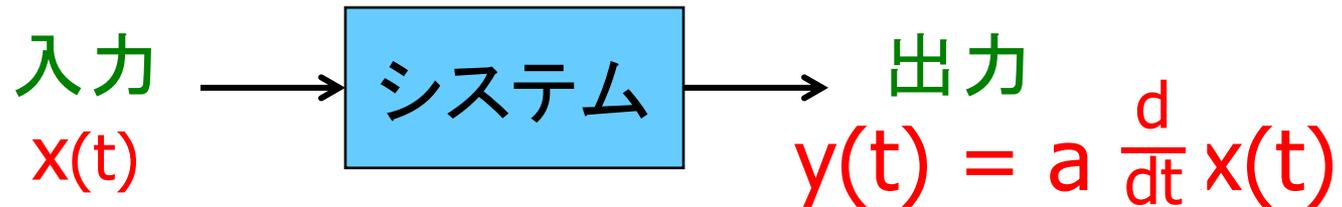
例2(積分)



$x(t) = k \cdot \cos(\omega t)$ のとき、
 $y(t) = (a/\omega) \cdot k \cdot \sin(\omega t) + \text{積分定数}(=0)$
 $= (a/\omega) \cdot k \cdot \cos(\omega t - (\pi/2))$

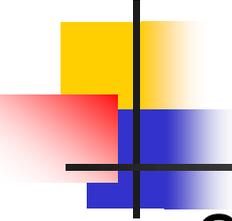
\therefore $A(\omega) = a/\omega$
 $\theta(\omega) = -\pi/2.$

例3 (微分)



$$\begin{aligned} x(t) &= k \cdot \cos(\omega t) \text{ のとき、} \\ y(t) &= -a \cdot \omega \cdot k \cdot \sin(\omega t) \\ &= a \cdot \omega \cdot k \cdot \cos(\omega t + (\pi/2)) \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} A(\omega) = a \cdot \omega \\ \theta(\omega) = \pi/2. \end{cases}$$



周波数伝達関数

2つの情報: ゲイン $A(\omega)$, 位相 $\theta(\omega)$

➡ 1つの複素数表現:

$$G(j\omega) = A(\omega) \exp(j\theta(\omega))$$

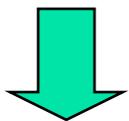
j : 虚数単位, $j^2 = -1$
(数学では虚数単位は i であるが、
「電気の分野」では i は電流に用いるので
虚数単位は j を用いる。

$G(j\omega)$: 周波数伝達関数とよぶ。

周波数伝達関数

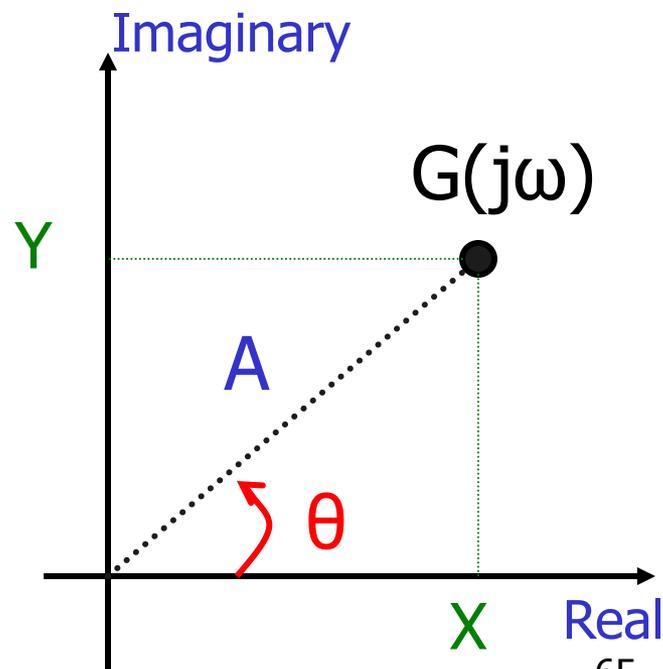
$$G(j\omega) = A(\omega) \exp(j\theta(\omega))$$
$$= |G(j\omega)| \cdot \exp(j \angle G(j\omega))$$

ある ω に対する $G(j\omega)$



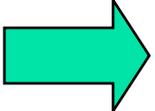
複素平面上の一点に対応

(A, θ) はその複素数の
極座標表示である。



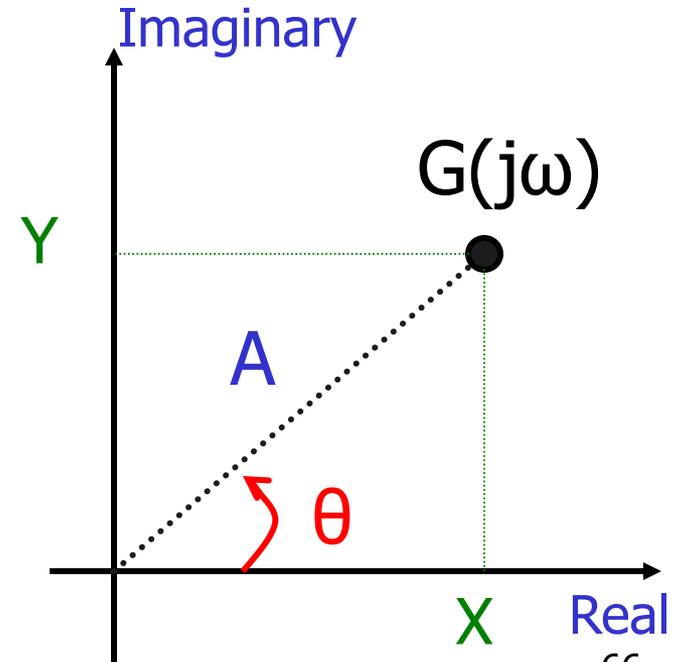
周波数伝達関数

$$G(j\omega) = A(\omega) \exp(j\theta(\omega)) \\ = X(\omega) + j Y(\omega)$$

極座標表示(A, θ) と
直交座標表示(X, Y) との
関係  オイラーの公式

$$A \exp(j\theta) = \\ A \cos(\theta) + j A \sin(\theta)$$

$$\therefore X = A \cos(\theta) \\ Y = A \sin(\theta)$$

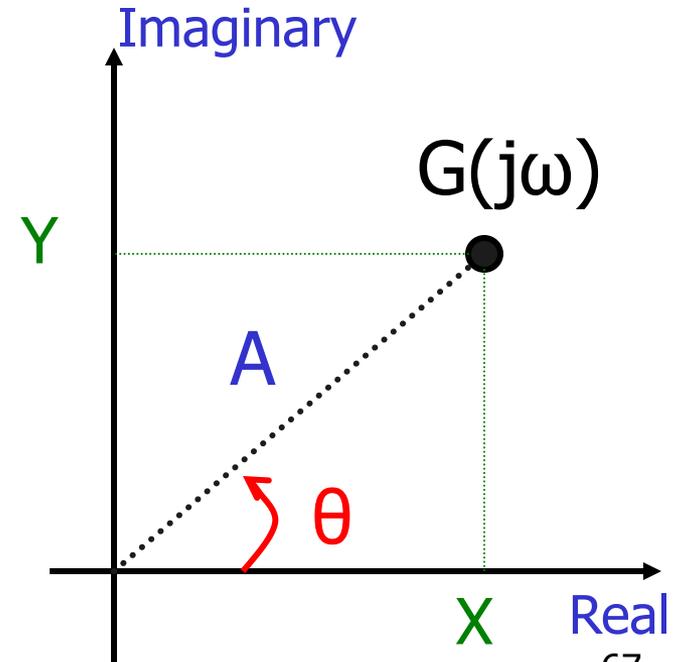


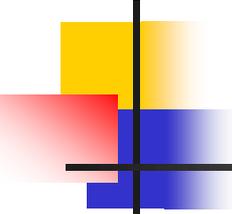
周波数伝達関数

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= A(\omega) \exp(j\theta(\omega)) \\ &= X(\omega) + j Y(\omega) \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{Y}{X}$$





オイラーの公式

- オイラーの公式

$$\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \quad \textcircled{1}$$

$$\exp(-j\theta) = \cos(\theta) - j\sin(\theta) \quad \textcircled{2}$$

- 群馬大学の数学者 齋藤三郎先生の
「数学で最も美しい公式」

$$\exp(j\pi) = -1$$

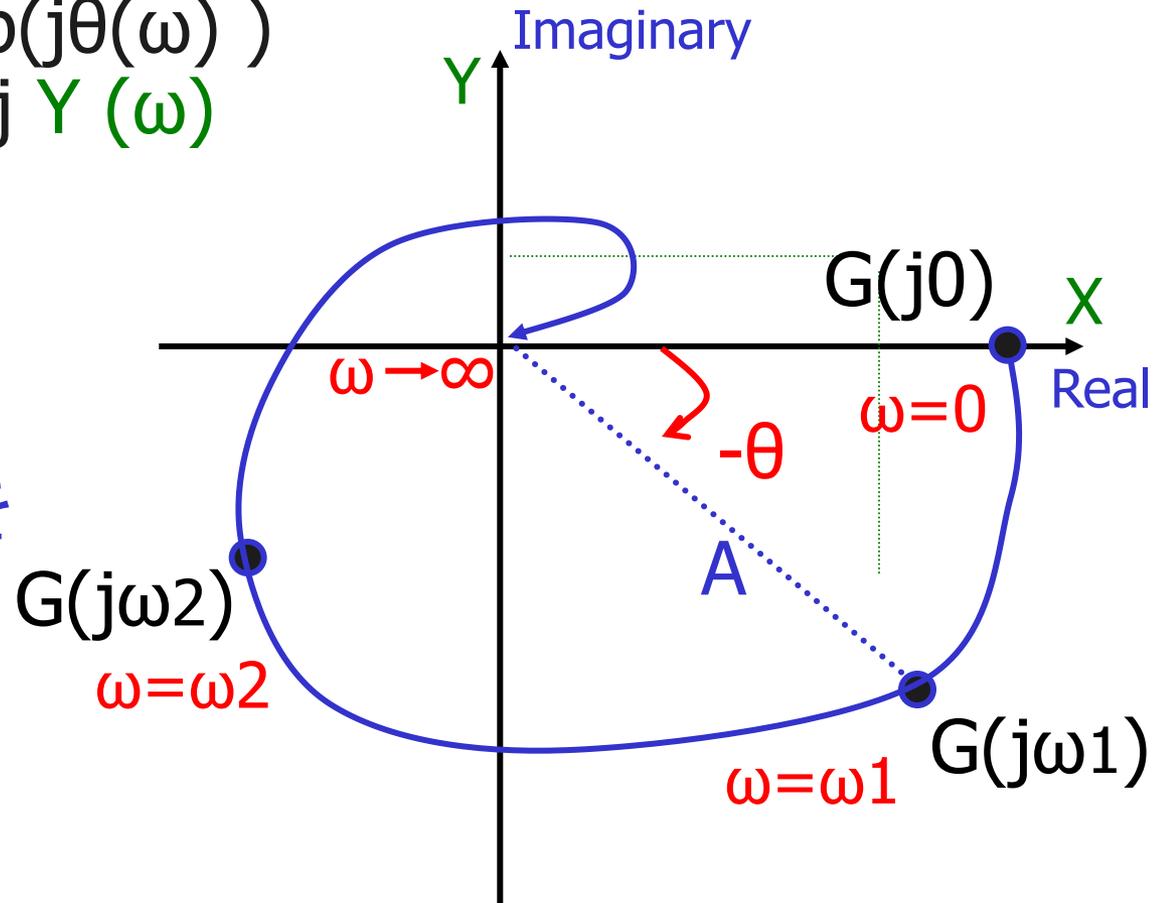
オイラーの公式①で $\theta = \pi$ の場合。

周波数伝達関数の図表現

① ベクトル線図

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= A(\omega) \exp(j\theta(\omega)) \\ &= X(\omega) + j Y(\omega) \end{aligned}$$

ベクトル線図:
 ω をパラメータとし
 $\omega=0$ から ∞ まで
変化させ、 $G(j\omega)$ を
複素平面上に
プロットしたもの



レオンハルト・オイラー

Leonhard Euler 1707-1783



スイス生まれの数学者・物理学者、天文学者。
ロシアのサンクト・ペテルブルクや
ドイツのベルリンで活躍。

18 世紀最高の数学者。

ガリレオ・ガリレイ、アイザック・ニュートン、
アルベルト・アインシュタインとも比較される。

物理学者ファインマン： オイラーの公式を
「宝石」かつ「数学においてもっとも特筆すべき公式」と評価。

オイラーを読め、オイラーを読め、オイラーは我々すべての師だ！

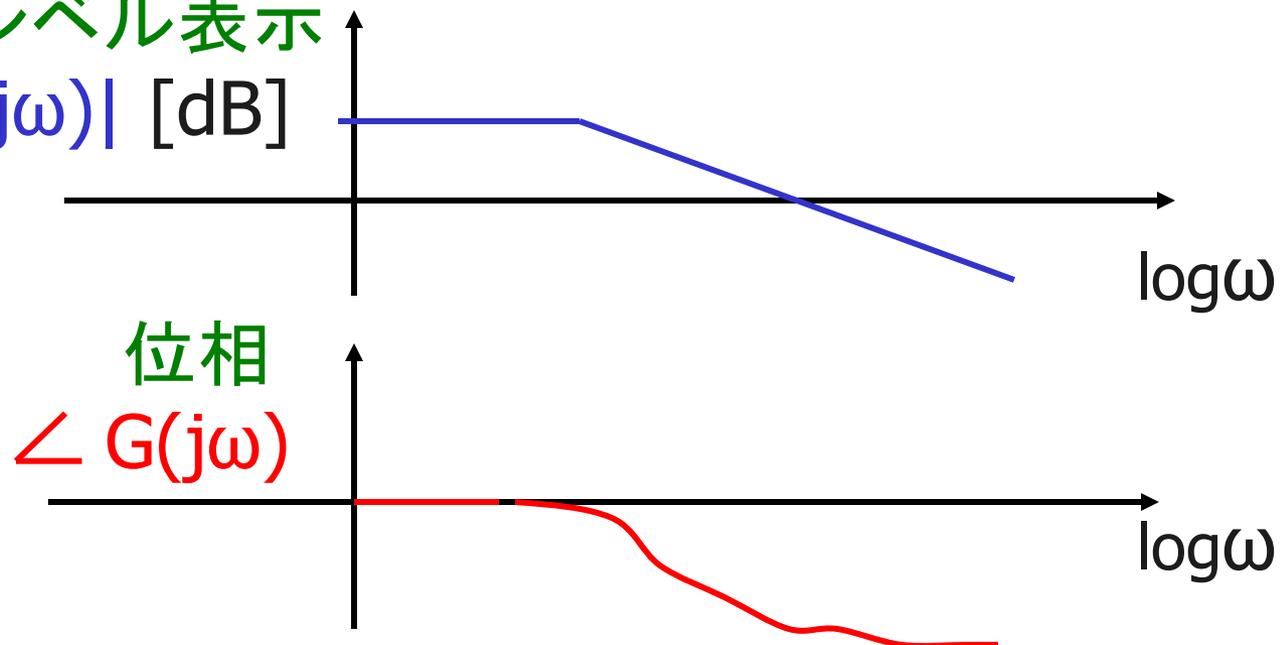
(ラプラス)

周波数伝達関数の図表現

② ボーデ線図 (Bode chart)

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= A(\omega) \exp(j\theta(\omega)) \\ &= |G(j\omega)| \cdot \exp(j \angle G(j\omega)) \end{aligned}$$

ゲインのデシベル表示
 $20 \log |G(j\omega)|$ [dB]



Hendrik Wade Bode

1905-1982



オハイオ州立大学

ベル研究所

ハーバード大学等で活躍

ボーデ線図

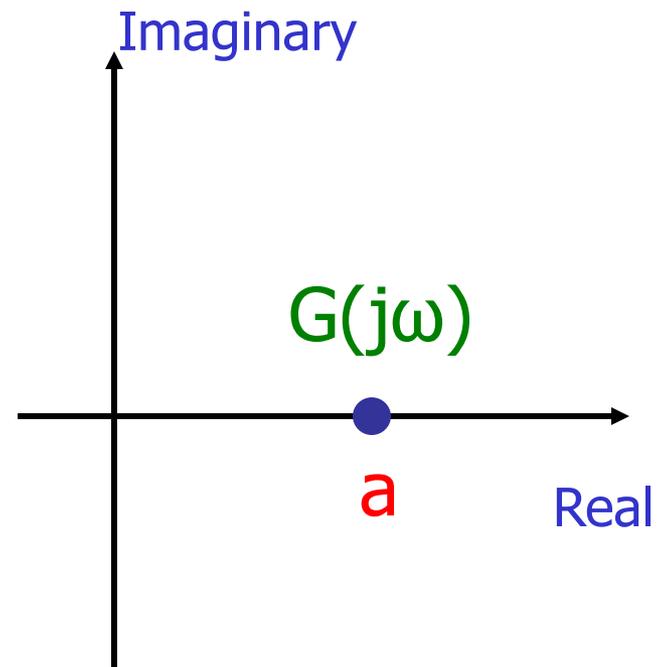
位相余裕、ゲイン余裕 を考案

例1 (比例) ① ベクトル線図

入力 $x(t)$ \longrightarrow 出力 $y(t) = a \cdot x(t)$

$$A(\omega) = a, \theta(\omega) = 0$$

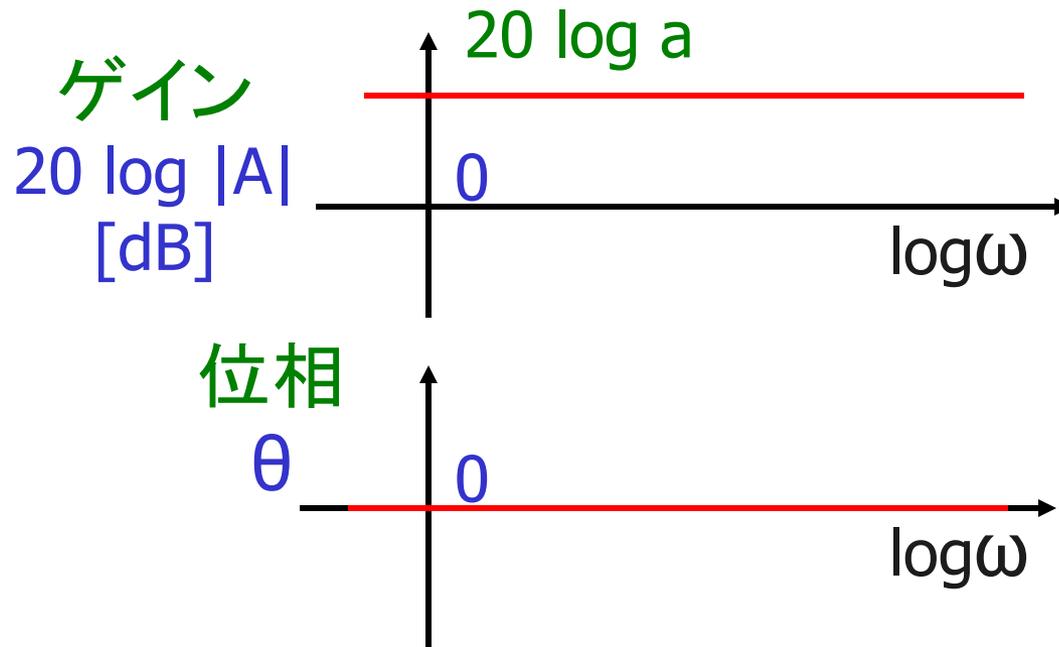
$$G(j\omega) = a \cdot \exp(j \cdot 0) = a$$



例1 (比例) ② ボーデ線図

入力 $x(t)$ \longrightarrow 出力 $y(t) = a \cdot x(t)$

$A(\omega) = a, \theta(\omega) = 0$ a : 正定数



例2(積分) ① ベクトル線図

入力 $x(t)$ \longrightarrow 出力 $y(t) = a \int^t x(p) dp$

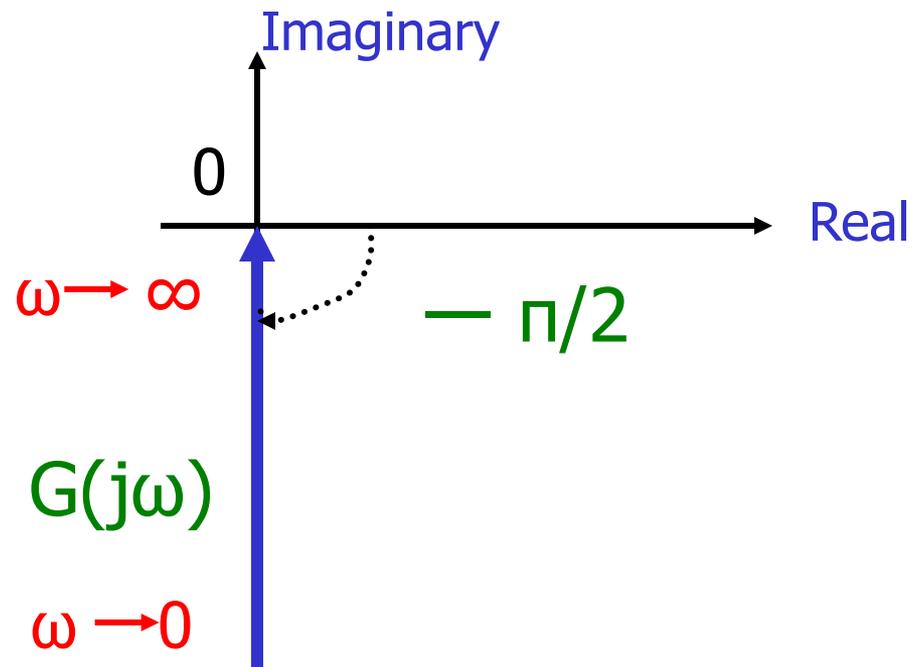
$$A(\omega) = a/\omega,$$

$$\theta(\omega) = -\pi/2$$

$$G(j\omega)$$

$$= (a/\omega) \cdot \exp(-j\pi/2)$$

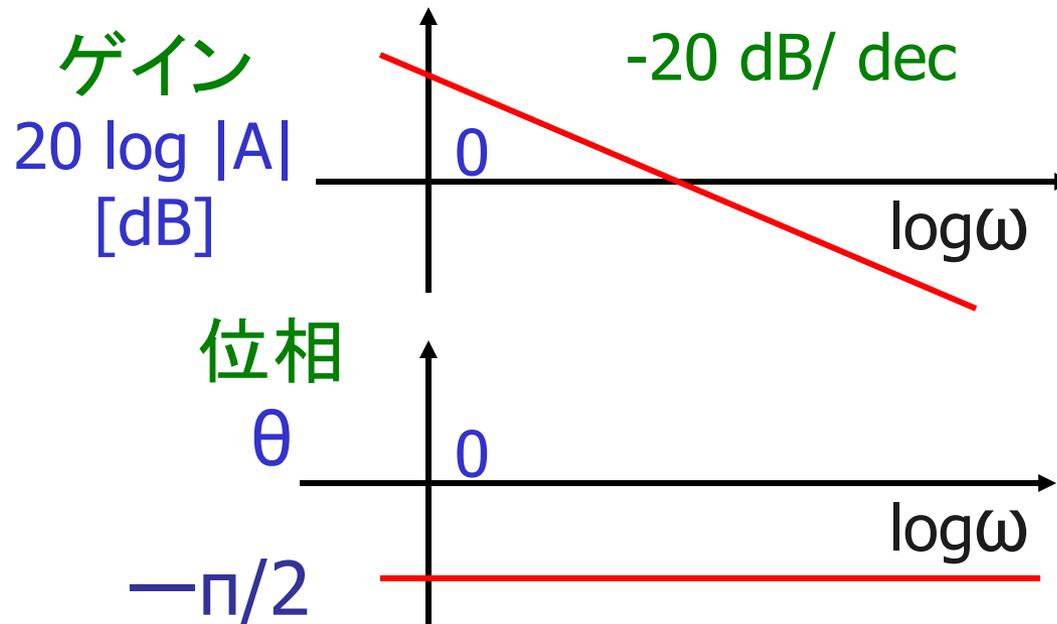
$$= -j(a/\omega)$$



例2(積分) ② ボーデ線図

入力 $x(t)$ \longrightarrow 出力 $y(t) = a \int^t x(p) dp$

$$A(\omega) = a/\omega, \theta(\omega) = -\pi/2 \quad a: \text{正定数}$$



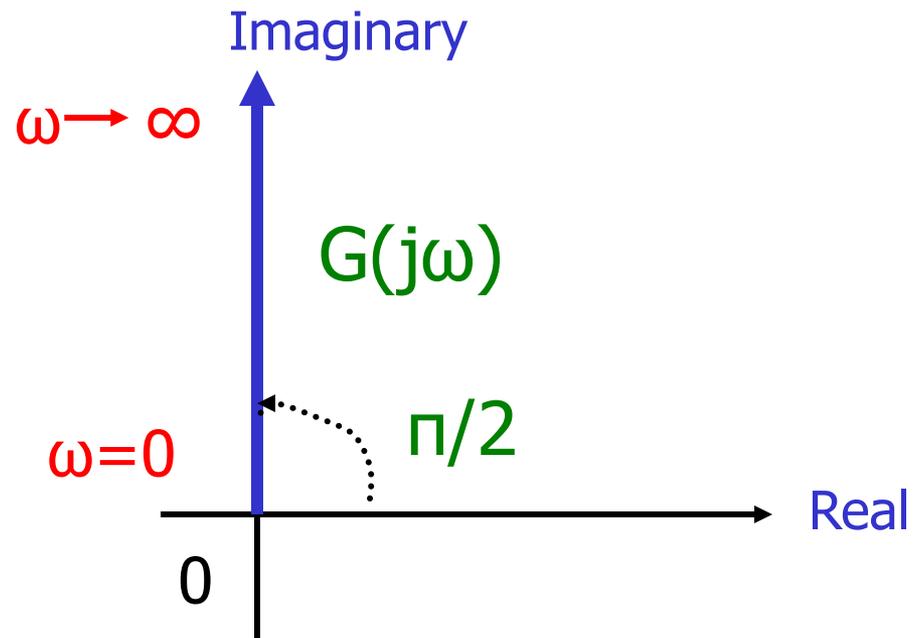
例3 (微分) ① ベクトル線図

入力 $x(t)$ \rightarrow 出力 $y(t) = a \frac{d}{dt} x(t)$

$$A(\omega) = a \cdot \omega,$$

$$\theta(\omega) = \pi/2$$

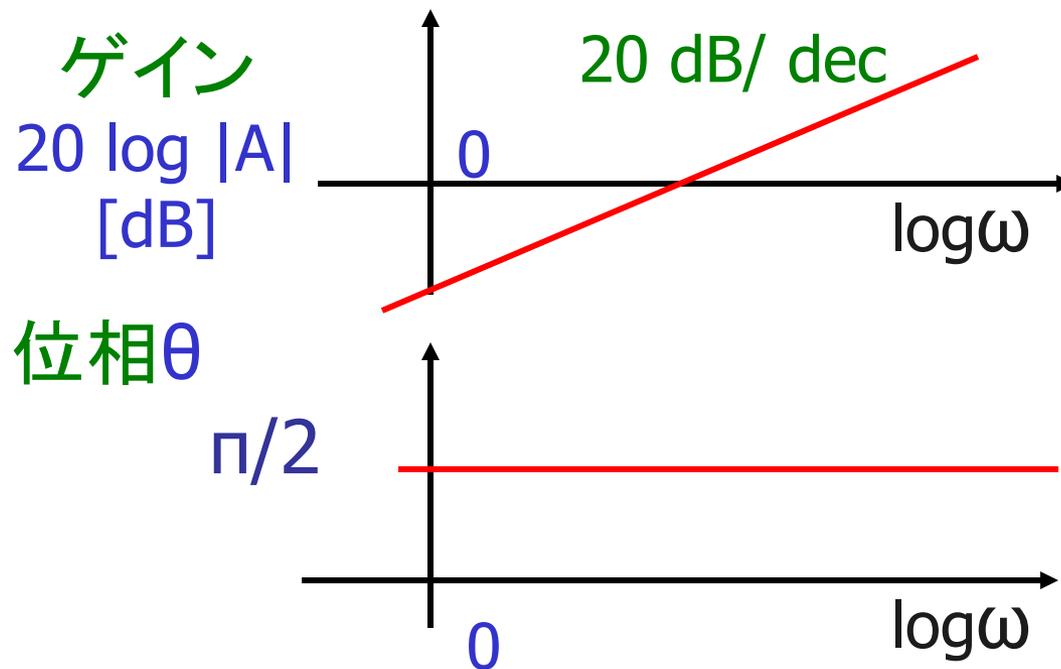
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= (a \cdot \omega) \cdot \exp(j\pi/2) \\ &= j \cdot a \cdot \omega \end{aligned}$$



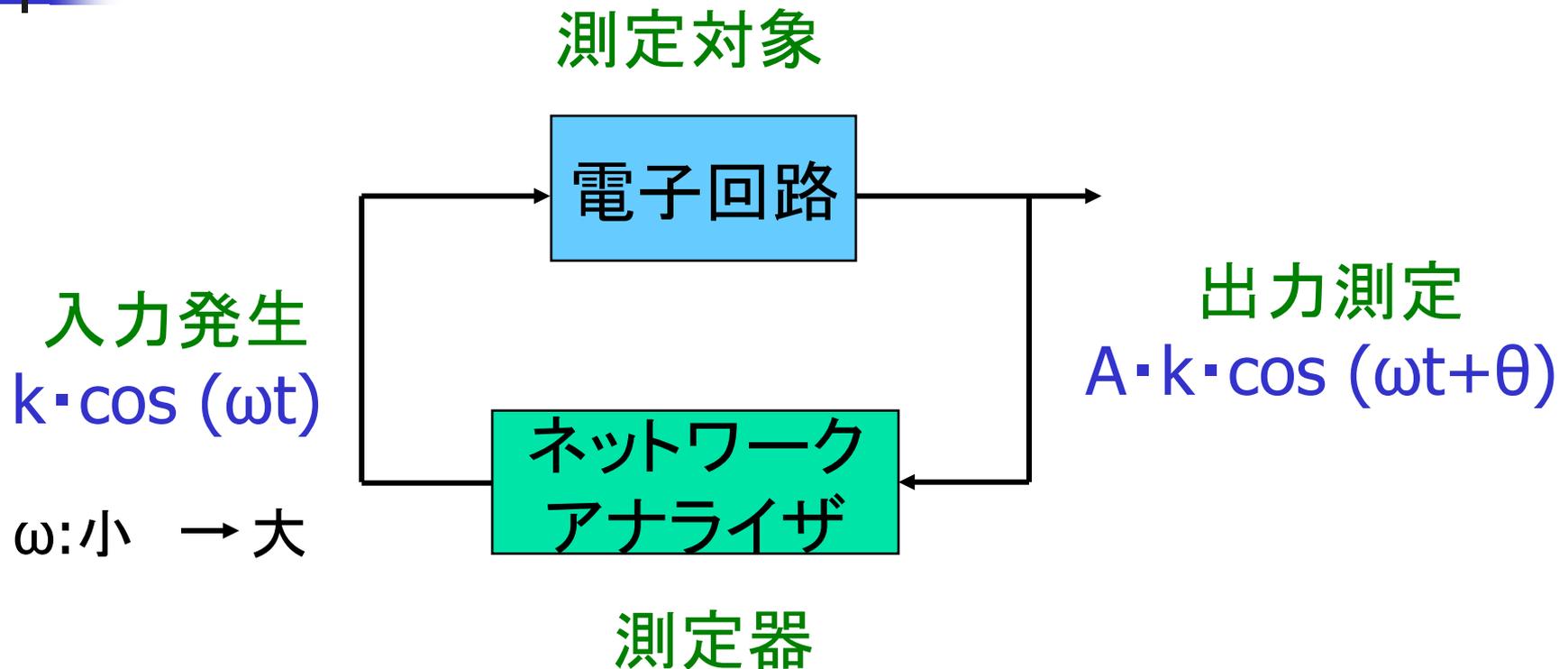
例3(微分) ② ボーデ線図

入力 $x(t)$ \longrightarrow 出力 $y(t) = a \frac{d}{dt} x(t)$

$A(\omega) = a \cdot \omega, \theta(\omega) = \pi/2$ a: 正定数

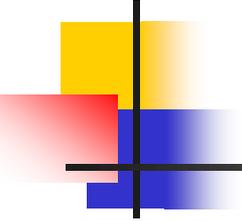


ネットワーク・アナライザによる 電子回路の周波数伝達関数測定



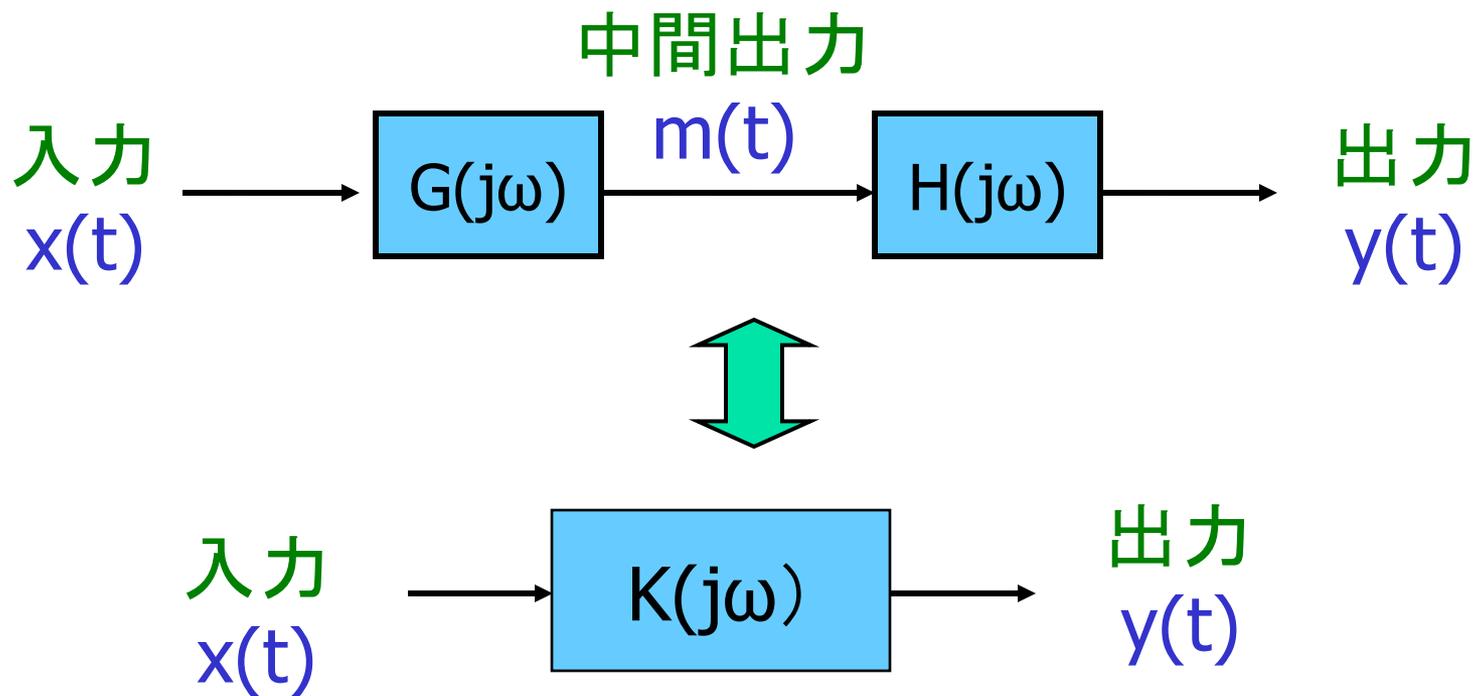
測定対象の周波数伝達関数の
ベクトル線図、ボード線図を描画

制御工学 第4回目



周波数応答法： 強力な設計・解析手法

システムの直列結合

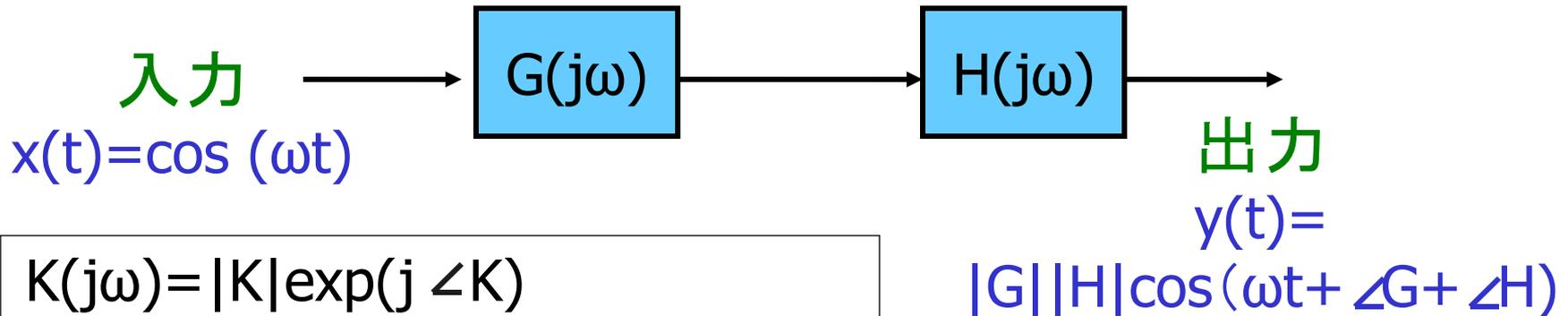


$$K(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega)$$

システムの直列結合

$$m(t) = |G| \cos(\omega t + \angle G)$$

中間出力



$$K(j\omega) = |K| \exp(j \angle K)$$

$$G(j\omega) H(j\omega)$$

$$= |G| \exp(j \angle G) |H| \exp(j \angle H)$$

$$= |G||H| \exp(j(\angle G + \angle H))$$

$$\therefore K(j\omega) = G(j\omega) H(j\omega)$$

$$|K| = |G| \cdot |H|$$

$$\angle K = \angle G + \angle H$$

システムの直列結合と ボード線図は相性がよい

ゲイン $|K| = |G| \cdot |H|$ **位相** $\angle K = \angle G + \angle H$
 $\therefore 20 \log|K| = 20 \log|G| + 20 \log|H|$

K のゲイン線図
= G のゲイン線図 + H のゲイン線図

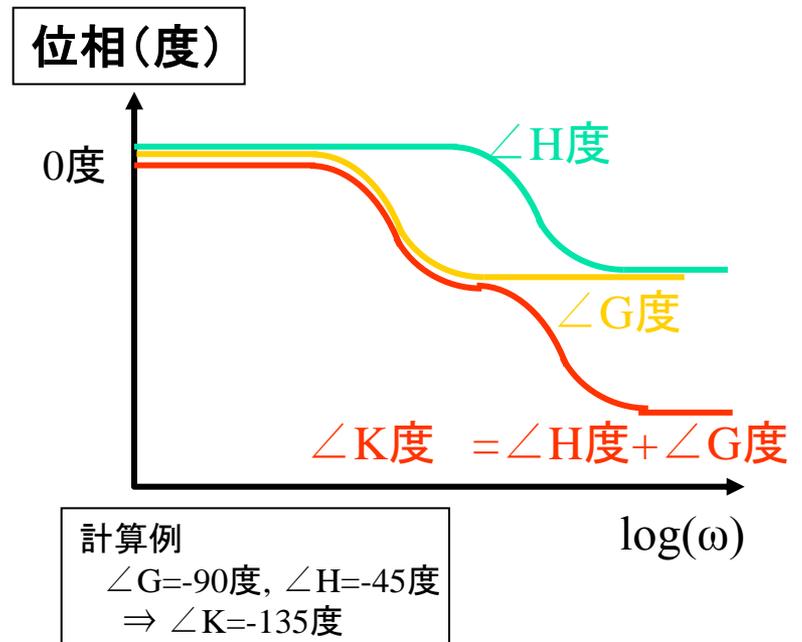
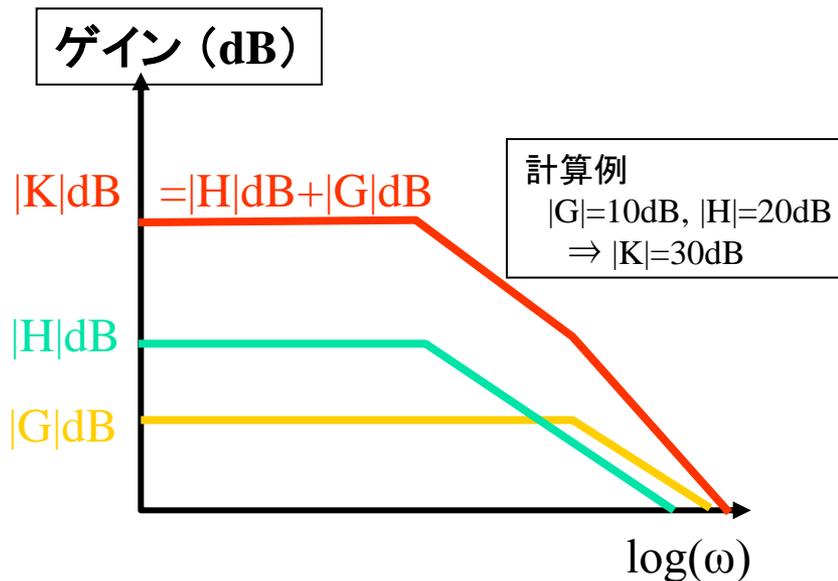
K の位相線図
= G の位相線図 + H の位相線図

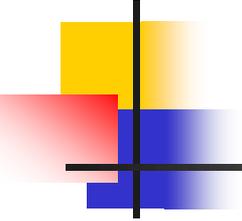
縦続システムの伝達関数

ゲイン: $|K| = |G| \cdot |H|$

$$\therefore 20 \log|K| = 20 \log|G| + 20 \log|H|$$

位相 : $\angle K = \angle G + \angle H$





制御工学I 第5回

インパルス応答法：強力な設計・解析手法

インパルス応答と畳み込み積分

インパルス応答と周波数応答は

フーリエ変換の関係

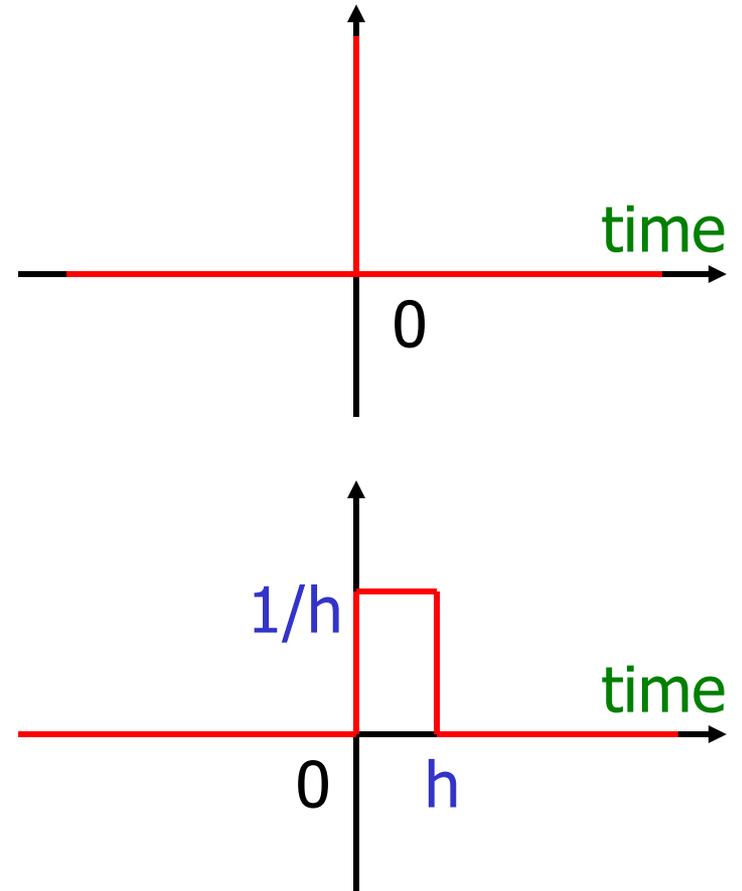
インパルス応答による安定性の定義

インパルス信号 (デルタ関数、 δ 関数)

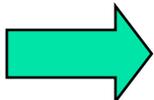
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \infty & (t = 0) \\ 0 & (t > 0) \end{cases}$$

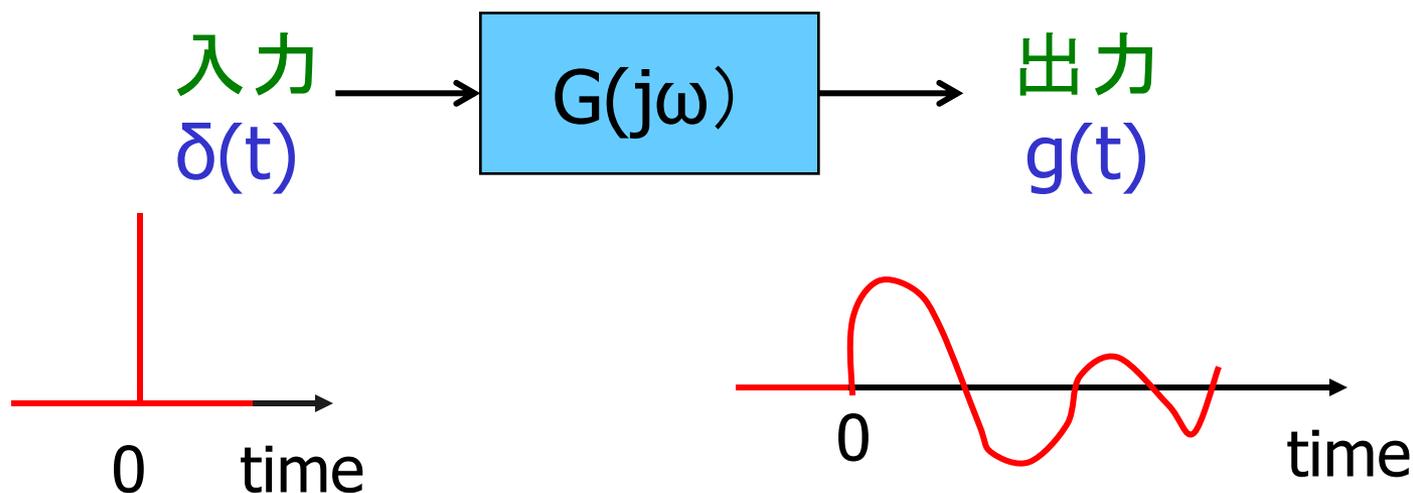
$$= \lim_{h \rightarrow +0} \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1/h & (0 < t < h) \\ 0 & (t > h) \end{cases}$$

$$(\text{注}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



インパルス応答

線形時不変動的システムに
インパルス信号 $\delta(t)$ を入力した
ときの出力 $g(t)$  インパルス応答



なぜインパルス応答を考えるか。

— 実用上の観点から —

- 厳密なインパルス信号は物理的に実現不可能。
- 近似的なインパルス信号
 - スイカをコツンとたたく。
 - 鉄筋の建物をハンマーでたたく。
 - ヨーイドンのピストルの音
 - コンサートホールの残響音特性測定に利用。
- 注： 上記は現実のシステム・アナログでの話。
人工的なシステムであるデジタル信号処理では
厳密なインパルス応答が物理的に実現可能。

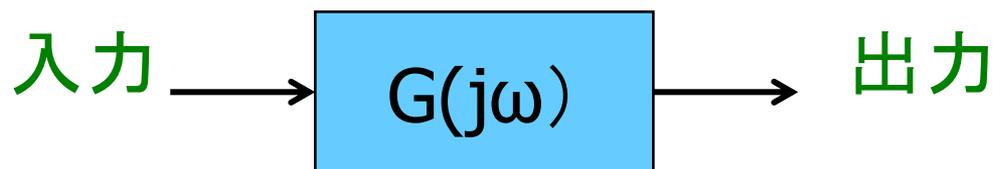
なぜインパルス応答を考えるか。

— 理論上の観点から ① —

安定な線形時不変動的システムでは

インパルス応答 $g(t)$ が求めれば

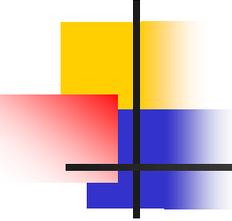
任意の入力 $u(t)$ に対する出力 $y(t)$ が計算できる。



インパルス入力 $\delta(t)$ \longrightarrow インパルス応答 $g(t)$

任意入力 $u(t)$ \longrightarrow 出力 $y(t)$

(ただし $u(t)=0$ when $t<0$)



畳み込み積分 (Convolution)

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau\end{aligned}$$

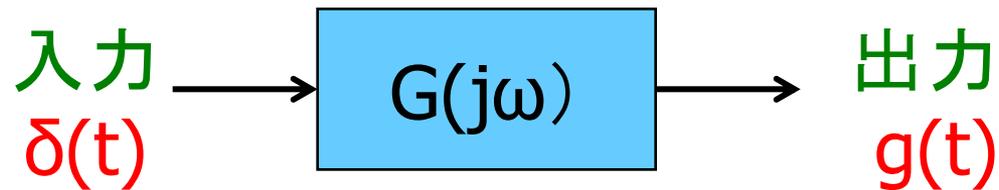
$g(t)$: インパルス応答、重み関数

$y(t)$ は $g(t)$ と $u(t)$ の
畳み込み積分、Convolution

なぜインパルス応答を考えるか。

— 理論上の観点から ② —

安定な線形時不変動的システムの
周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は
インパルス応答 $g(t)$ のFourier変換



$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

なぜインパルス応答を考えるか。

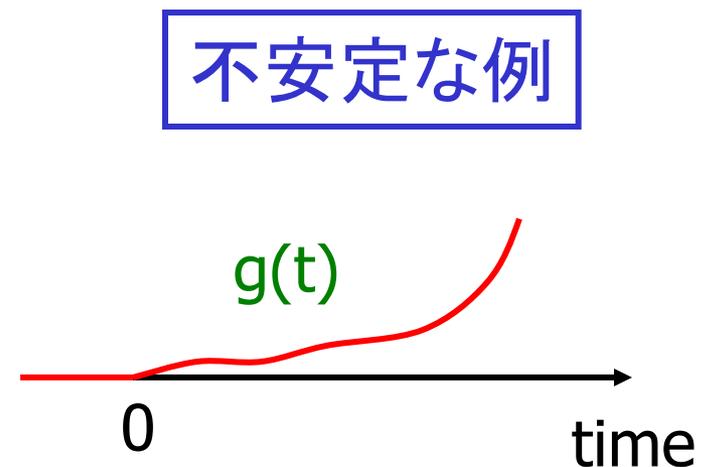
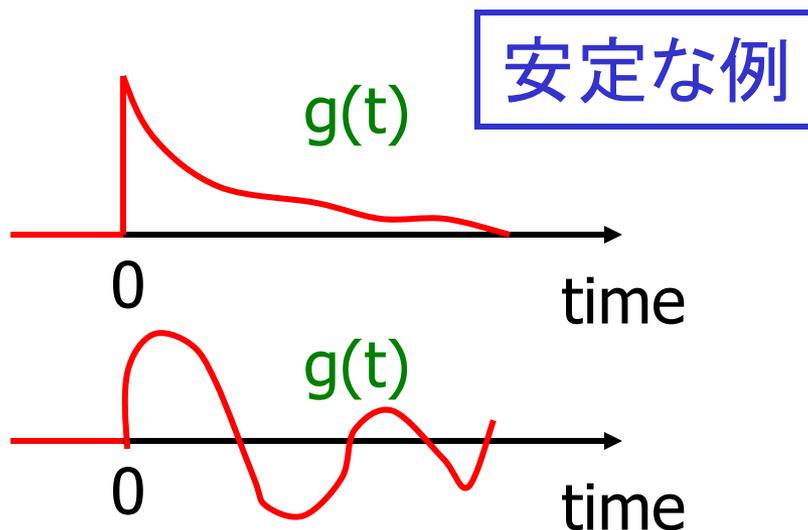
— 理論上の観点から ③ —

安定な線形時不変動的システム

⇕ 定義

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

$g(t)$: インパルス応答



Joseph Fourier

1768-1830



ナポレオン時代のフランス人
エジプト遠征につきそう。
エジプト学の研究者でもある。
政治的にも活躍。

Laplace の後を継いで大学教授になる。

Fourier 級数展開の理論は最初はフランス科学界
に受け入れられなかった。

Joseph Fourier upset the French Academy in 1807.

フーリエ変換

Fourier Transform

フーリエ変換

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ なる $f(t)$ に対し、

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

逆フーリエ変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

デルタ関数

- デルタ関数:

- 全ての周波数成分 ω を等パワーで含む。

- 位相が揃っている。

時刻ゼロで各周波数成分 ω の位相はゼロ。

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) d\omega$$

近似

$$\tilde{\delta}(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_n t)$$

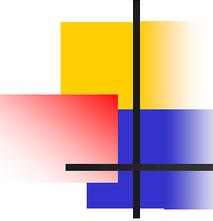
- 太陽光(白色光):

- 全ての周波数成分 ω を等パワーで含む。

- 位相が揃っていない。

$$\omega_n := n\omega_0$$

周波数応答はインパルス応答のフーリエ変換


$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt \quad \text{の証明}$$

インパルス応答は周波数応答の逆フーリエ変換

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

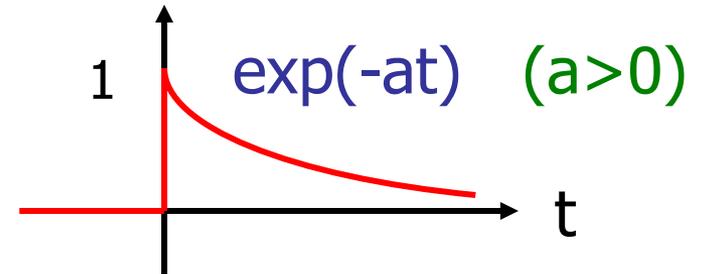
なので

フーリエ変換、逆フーリエ変換の関係より
周波数応答はインパルス応答のフーリエ変換

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

フーリエ変換 例

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0, a > 0) \end{cases}$$

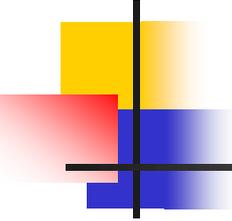


$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-at)\exp(-j\omega t)dt = \int_0^{\infty} \exp(-(a + j\omega)t)dt$$

$$= \frac{-1}{j\omega + a} [\exp(-(a + j\omega)t)]_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega + a}$$

(注) $|\exp(-(a + j\omega)t)| = |\exp(-at)| \|\exp(-j\omega t)\|$
 $= |\exp(-at)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$\therefore |\exp(-j\omega t)| = 1$



フーリエ変換 例

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) \cos(bt) & (t > 0, a > 0) \end{cases}$$

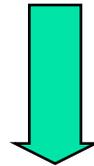
$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-at) \cos(bt) \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp(-(a + j\omega)t) [\exp(-jbt) + \exp(jbt)] dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a + j(b + \omega)} + \frac{1}{a + j(-b + \omega)} \right] = \frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + b^2}$$

フーリエ変換性質： $f(t)$ の時間 微分は $F(j\omega)$ に $j\omega$ をかける

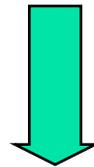
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$



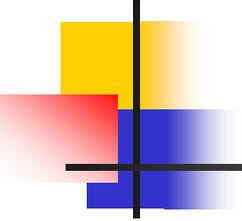
$$j\omega F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \exp(-j\omega t) dt$$

フーリエ変換性質： $f(t)$ の時間積分は $F(j\omega)$ に $(1/j\omega)$ をかける

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

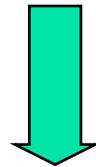


$$\frac{1}{j\omega} F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] \exp(-j\omega t) dt$$



フーリエ変換性質： 畳み込み積分は積

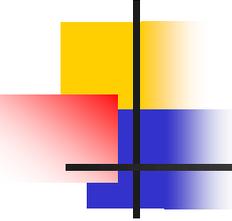
$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$



$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

ここで $Y(j\omega)$, $G(j\omega)$, $U(j\omega)$ は
各々 $y(t)$, $g(t)$, $u(t)$ のフーリエ変換

制御工学I 第5回



フーリエ変換： 安定なシステムにのみ適用化

ラプラス変換： 安定、不安定両方のシステムに
適用可能

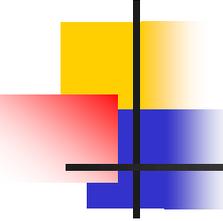
微分方程式と周波数伝達関数



$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t)$$

$$y(t) \xrightarrow{\text{Fourier 変換}} Y(j\omega), \quad \frac{d^n}{dt^n} y(t) \xrightarrow{\text{Fourier 変換}} (j\omega)^n Y(j\omega)$$

$$u(t) \xrightarrow{\text{Fourier 変換}} U(j\omega), \quad \frac{d^m}{dt^m} u(t) \xrightarrow{\text{Fourier 変換}} (j\omega)^m U(j\omega)$$

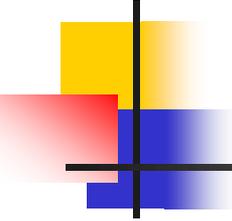


微分方程式と周波数伝達関数

$$(j\omega)^n Y(j\omega) + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} Y(j\omega) + \dots + a_1 (j\omega)Y(j\omega) + a_0 Y(j\omega) =$$
$$b_m(j\omega)^m U(j\omega) + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} U(j\omega) + \dots + b_1 (j\omega)U(j\omega) + b_0 U(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega)$$

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}$$



Fourier 変換の限界

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

は安定なシステム、すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

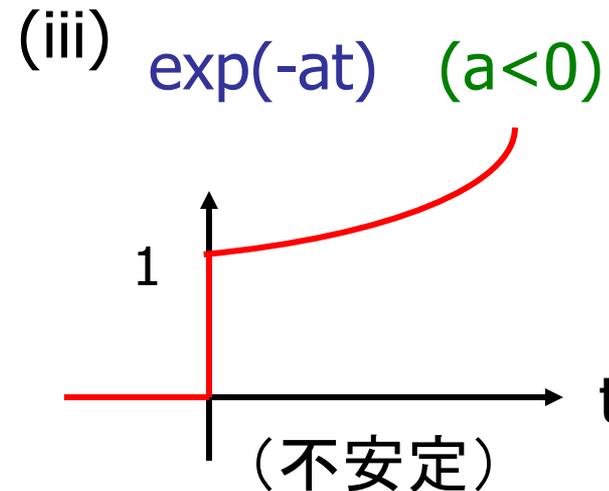
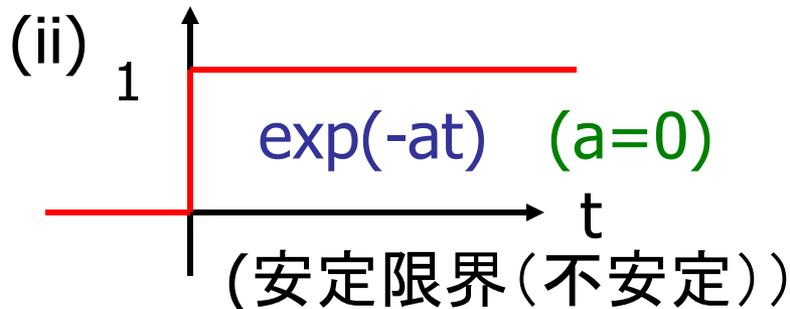
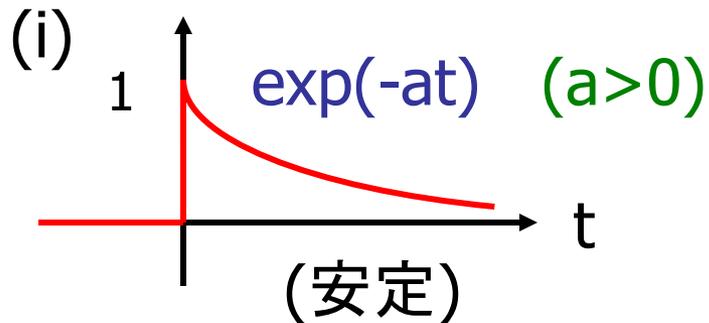
の場合にのみ適用できる。

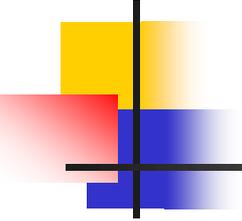
上記条件を満たさないときはFourier 積分の値が存在しない。

線形システムのインパルス応答

$\exp(-at)$ は重要な関数

インパルス応答 $g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0) \end{cases}$





$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0) \end{cases}$$

のフーリエ積分

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-at) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} \exp(-(a + j\omega)t) dt$$

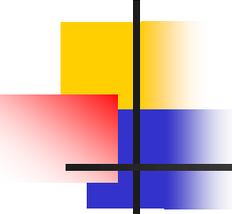
$$= \frac{-1}{j\omega + a} [\exp(-(a + j\omega)t)]_0^{\infty} = \frac{1}{a + j\omega} [1 - \exp(-(a + j\omega)\infty)]$$

(注) $|\exp(-(a + j\omega)t)| = |\exp(-at)| \cdot |\exp(-j\omega t)|$

$$0 \quad (a > 0)$$

$$= |\exp(-at)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 \quad (a = 0)$$

$$\infty \quad (a < 0)$$


$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0) \end{cases}$$

のフーリエ積分

- (i) $a > 0$ のとき $G(j\omega) = 1/(a + j\omega)$
- (ii) $a = 0$ のとき $G(j\omega)$ の値は存在しない。
- (iii) $a < 0$ のとき $G(j\omega)$ の値は存在しない。

(ii)の補足: $a = 0$ のとき

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt$$

$$= \frac{1}{\omega} [\sin(\omega t) + j \cos(\omega t)]_0^{\infty}$$

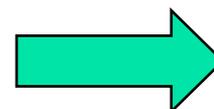


有限確定の値が
存在しない。

“定積分の値が存在する”の意味

- 歌手の吉幾三氏が

「オラが村には電気がない」



電気が物理的にない、電気がゼロだの意味。

- 数学者の高木貞治先生が

「この定積分には値がない」



積分に有限確定な値が存在しないとの意味。

- おなじ「ない」でも意味が異なる。

- 定積分の値が存在する。



その定積分に有限確定な値が存在する。

高木貞治 (たかぎ ていじ)

1875 - 1960

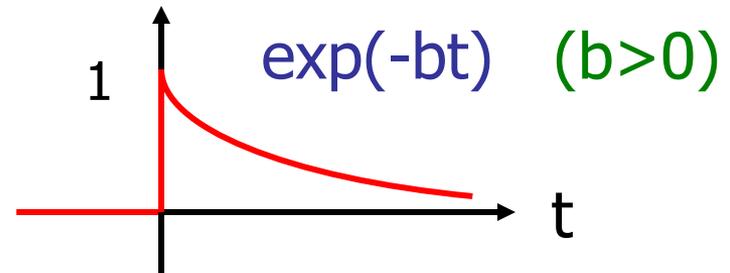
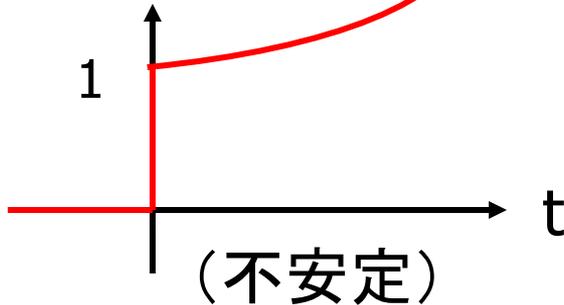


日本の数学者、東京帝国大学教授。
帝国大学理科大学(現在の東京大学理学部)数学科へ。
卒業後にドイツへ3年間留学, ヒルベルトに師事。
代数的整数論の研究では類体論を確立。
クロネッカーの青春の夢を解決。
ヒルベルトの23の問題のうち、第9問題と第12問題を解決。
『解析概論』『初等整数論講義』『代数的整数論』など
多くの数学教科書。

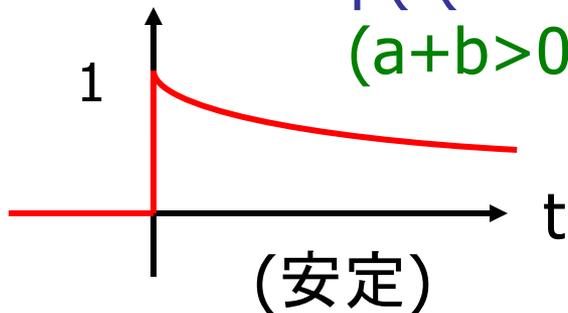
『解析概論』は私も学生時代に読みました。

Laplace変換の導入

$$g(t) = \exp(-at) \quad (a < 0)$$



$$g(t) \exp(-bt) = \exp(-(a+b)t) \quad (a+b > 0)$$

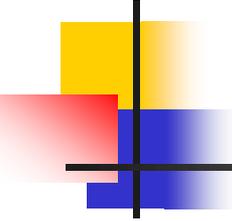


$g(t)$: 不安定

$g(t) \exp(-bt)$: 安定

$g(t) \exp(-bt)$ に
Fourier 変換を行う。

↓
Laplace変換



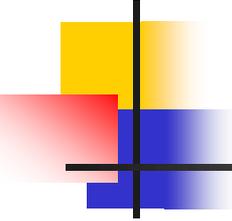
ラプラス変換の定義

$$G(b + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-bt) \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-(b + j\omega)t) dt$$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-st) dt$$

ここで
 $s = b + j\omega$



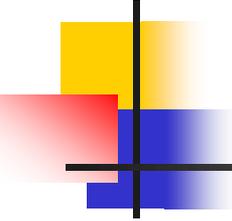
逆ラプラス変換の定義

$$g(t)\exp(-bt) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(b + j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(b + j\omega) \exp((b + j\omega)t) d\omega$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} G(s) \exp(st) ds$$

ここで
 $s=b+j\omega$



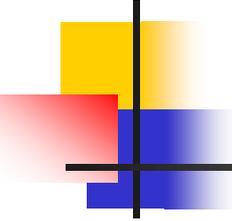
周波数伝達関数と伝達関数(1)

安定なシステムのインパルス応答 $g(t)$

周波数伝達関数 $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

周波数伝達関数 $G(j\omega)$ の $|G(j\omega)|$, $\angle G(j\omega)$ は
物理的な意味(周波数応答)をもつ。



周波数伝達関数と伝達関数(2)

安定または不安定なシステムの

インパルス応答 $g(t)$

伝達関数 $G(s)$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-st) dt$$

$G(s)$ は周波数伝達関数 $G(j\omega)$ のような物理的意味はもたない。
ではなぜ $G(s)$ を考えるのか。

ピエールシモン・ラプラス

Pierre-Simon Laplace 1749-1827

フランスの数学者

「天体力学」「確率論の解析理論」の名著

ラプラス変換の考案者



決定論者。これから起きるすべての現象は、
これまでに起きたことに起因する。

ある特定の時間の宇宙のすべての粒子の運動状態
が分かれば、これから起きる現象は計算できる。



後に量子力学により否定される。

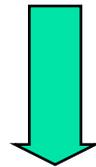
制御工学 第6回

- フーリエ変換： 安定なシステムにのみ適用化
- ラプラス変換： 安定、不安定両方のシステムに適用可能

ラプラス変換(フーリエ変換)を用いると
代数演算(+, -, \times , \div)のみで微分方程式、
積分方程式が解ける。

ラプラス変換性質(1) $f(t)$ の時間 微分は $F(s)$ に s をかける

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

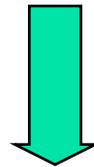


$$sF(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \exp(-st) dt$$

(注) 初期値 ($t=0$ での値) は全てゼロとする。

ラプラス変換性質(2) $f(t)$ の時間積分は $F(s)$ に $(1/s)$ をかける

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$



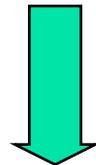
$$\frac{1}{s} F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] \exp(-st) dt$$

(注) 初期値 ($t=0$ での値) は全てゼロとする。

ラプラス変換性質(3)

畳み込み積分は積

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$



$$Y(s) = G(s)U(s)$$

ここで $Y(s)$, $G(s)$, $U(s)$ は
各々 $y(t)$, $g(t)$, $u(t)$ のラプラス変換

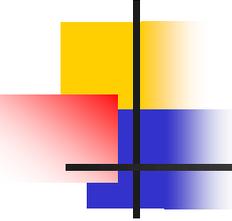
微分方程式と伝達関数(1)



$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_m \frac{d^m}{dt^m}u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt}u(t) + b_0 u(t)$$

$$y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} Y(s), \quad \frac{d^n}{dt^n}y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s^n Y(s)$$

$$u(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} U(s), \quad \frac{d^m}{dt^m}u(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s^m U(s)$$



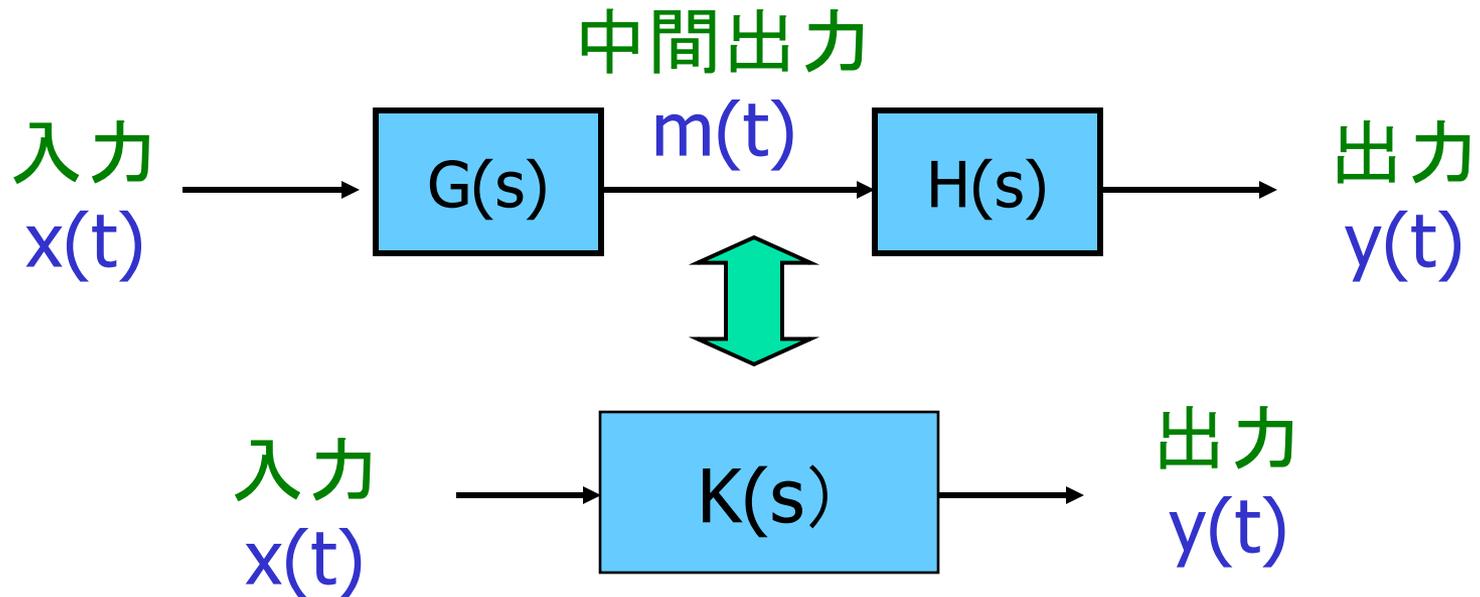
微分方程式と伝達関数(2)

$$S^n Y(s) + a_{n-1} S^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 S Y(s) + a_0 Y(s) =$$
$$b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \dots + b_1 S U(s) + b_0 U(s)$$

$$Y(s) = G(s) U(s)$$

$$G(s) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}$$

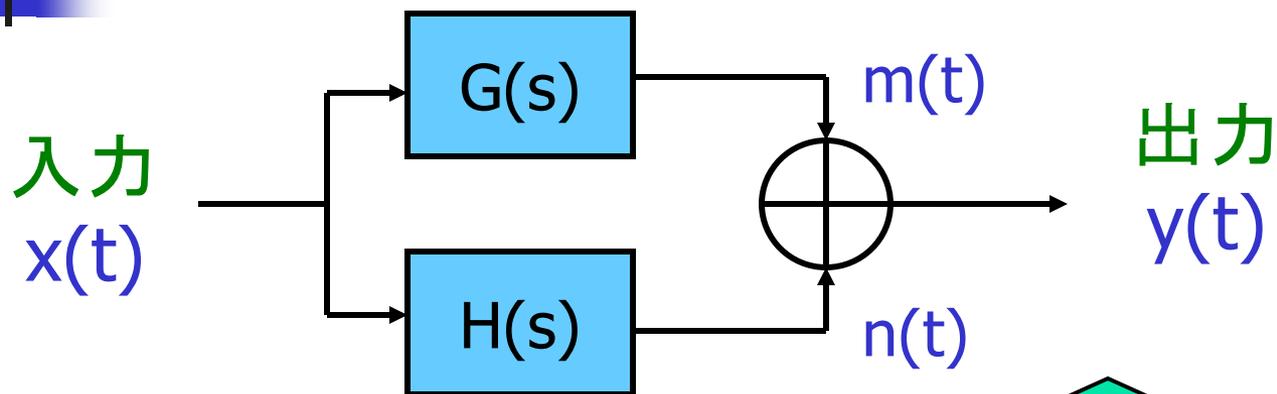
システムの直列結合



$$M(s) = G(s) X(s), \quad Y(s) = H(s) M(s)$$
$$\therefore Y(s) = H(s) G(s) X(s)$$

$$K(s) = H(s) G(s)$$

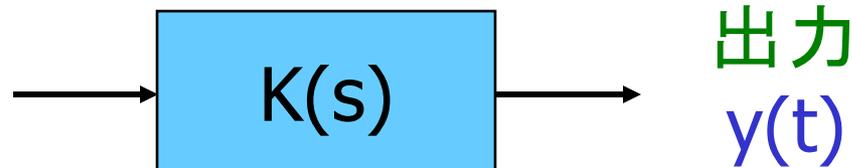
システムの並列結合



$$M(s) = G(s) X(s)$$

$$N(s) = H(s) X(s)$$

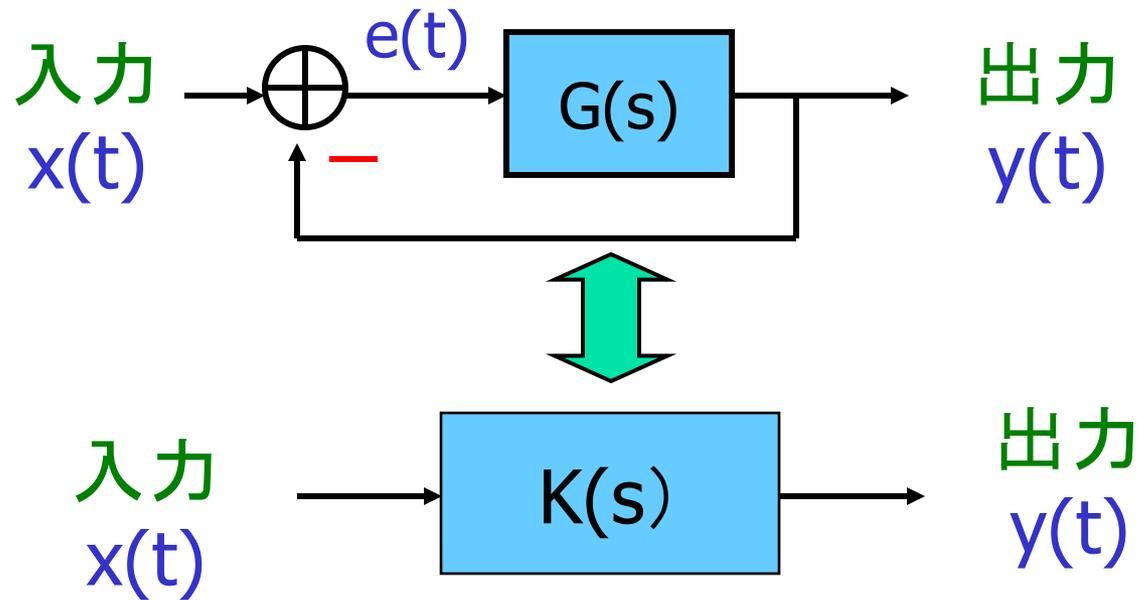
入力
 $x(t)$



$$\begin{aligned} \therefore Y(s) &= M(s) + N(s) \\ &= (G(s) + H(s)) X(s) \end{aligned}$$

$$K(s) = G(s) + H(s)$$

システムのフィードバック結合



$$E(s) = X(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G(s) E(s)$$

$$\therefore Y(s) = G(s) (X(s) - Y(s))$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} X(s)$$

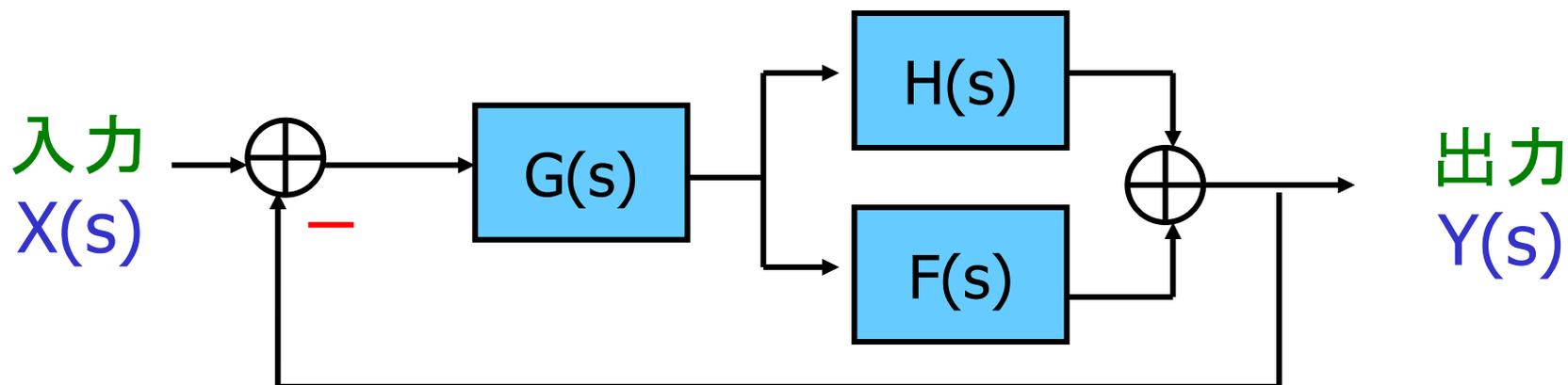
$$\therefore K(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

システムの結合の例題

下記のシステム全体の

$$\text{伝達関数 } K(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

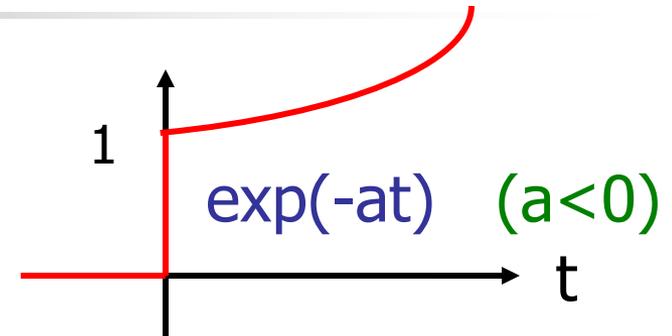
を求めよ。



伝達関数により 複合システムの設計・解析が容易になる

ラプラス変換 例1 (指数関数)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp(-at) & (t > 0) \end{cases}$$



$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-at)\exp(-st)dt = \int_0^{\infty} \exp(-(a+s)t)dt$$

$$= \frac{-1}{s+a} [\exp(-(a+s)t)]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

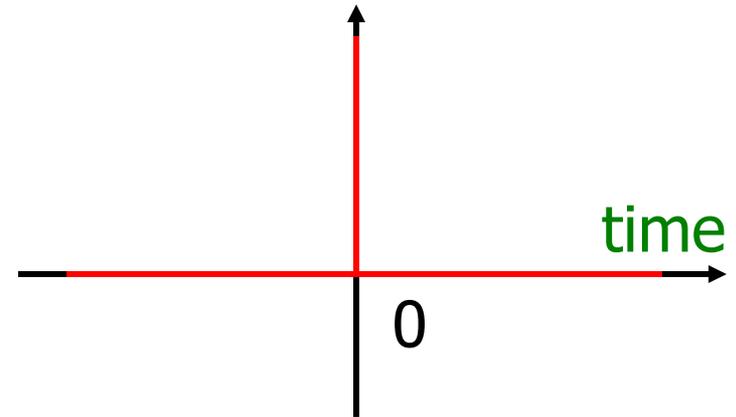
(注) $|\exp(-(a+s)t)| = |\exp(-(a+b)t)| \|\exp(-j\omega t)\|$
 $= |\exp(-(a+b)t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$\therefore |\exp(-j\omega t)| = 1, a+b > 0$

ラプラス変換 例2 (デルタ関数)

$f(t) = \delta(t)$ のとき

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-st) dt = 1$$



(注) 一般に δ 関数の性質より

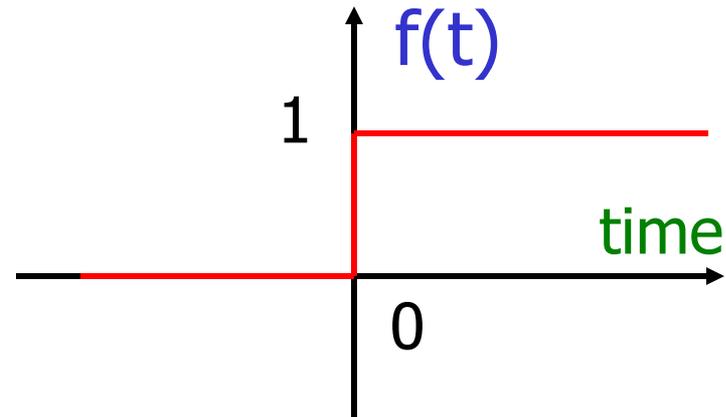
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) h(t) dt = h(0)$$

ラプラス変換 例3 (ステップ関数)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) dt$$

$$= \frac{-1}{s} [\exp(-st)]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$



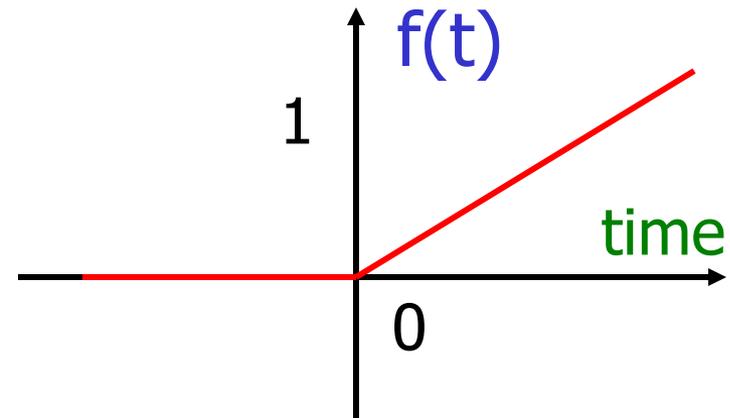
(注) ステップ関数はδ関数の積分



δ関数のラプラス変換が1なので
ステップ関数のラプラス変換は $1/s$

ラプラス変換 例4 (ランプ関数)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t > 0) \end{cases}$$



演習：下記を証明せよ。

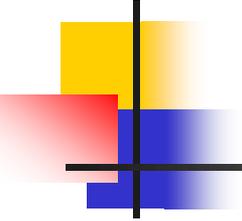
$$F(s) = \int_0^{\infty} t \cdot \exp(-st) dt = \frac{1}{s^2}$$

(注) ランプ関数はステップ関数の積分



ステップ関数のラプラス変換が $1/s$ なので
ランプ関数のラプラス変換は $(1/s)^2$

制御工学I 第7回



1 ラプラス変換(フーリエ変換)を用いると
代数演算(+, -, \times , \div)のみで微分方程式、
積分方程式が解ける。

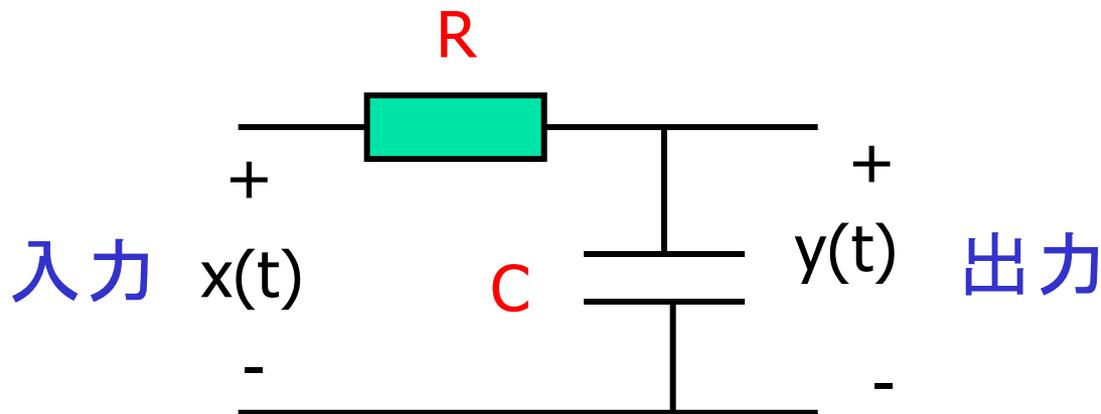
2 線形システムの安定判別
Routh, Hurwitz の安定判別

ラプラス変換の使用法 例題

問1. 次のシステムの伝達関数を求めよ。

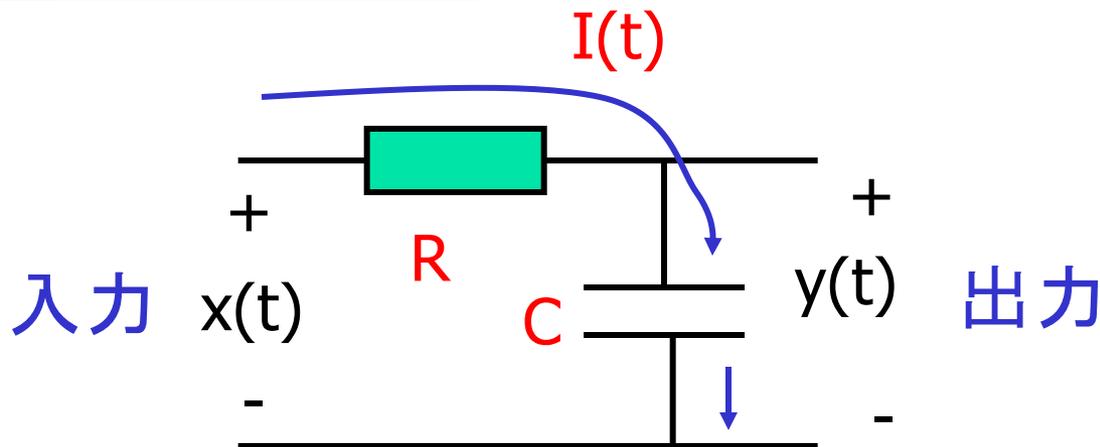
問2. インパルス応答を求めよ。

問3. ステップ応答を求めよ。



初期値 $y(0) = 0$

伝達関数の求め方



$$I(t) = \frac{x(t) - y(t)}{R}$$

$$y(t) + CR \frac{d}{dt} y(t) = x(t)$$

$$Q(t) = C y(t)$$

$$Y(s) + CR s Y(s) = X(s)$$

$$Q(t) = \int^t I(p) dp$$

$$\therefore G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+s CR}$$

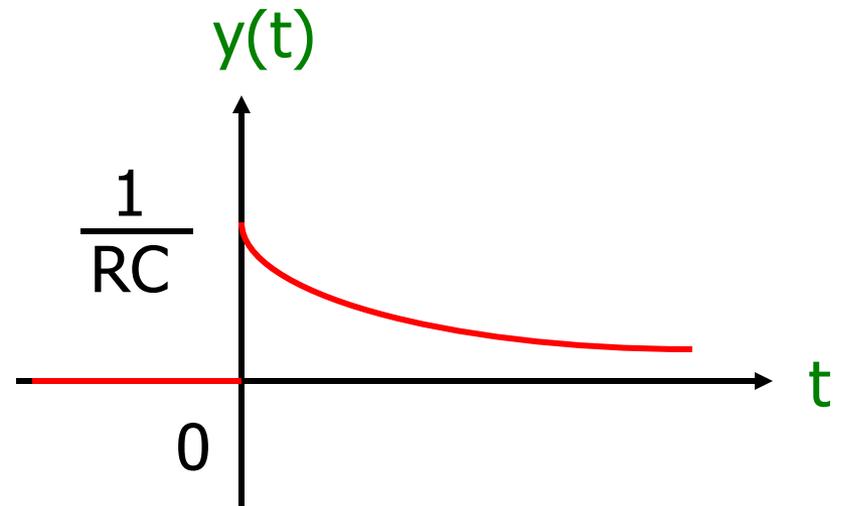
インパルス応答の求め方

$$G(s) = \frac{1}{1+s RC}$$

$$x(t) = \delta(t) \text{ のとき}$$
$$X(s) = 1$$

$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{1}{RC} \exp(-t/(RC)) & (t > 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore Y(s) &= G(s) X(s) \\ &= \frac{1}{1+s RC} \\ &= \frac{(1/RC)}{(1/RC) + s} \end{aligned}$$



ステップ応答の求め方

$$G(s) = \frac{1}{1+s RC}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases} \text{ のとき}$$

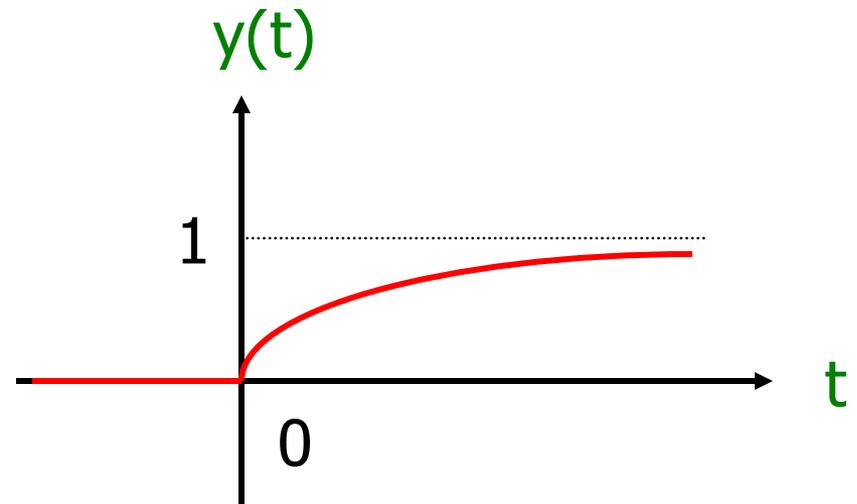
$$\therefore y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 - \exp(-t/(RC)) & (t > 0) \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

$$\therefore Y(s) = G(s) X(s)$$

$$= \frac{1}{1+s RC} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{(1/RC) + s}$$



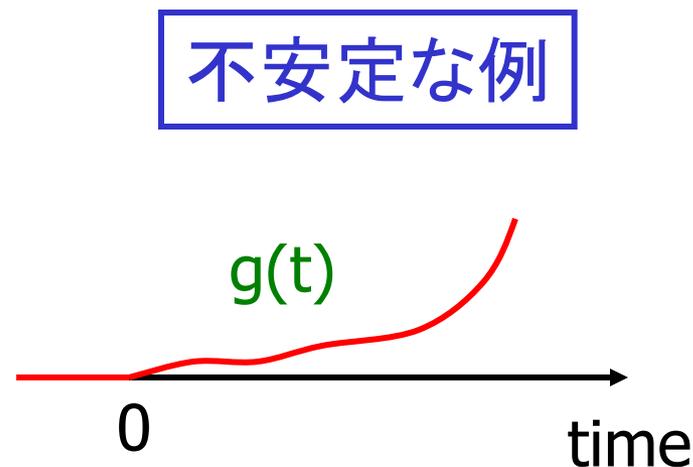
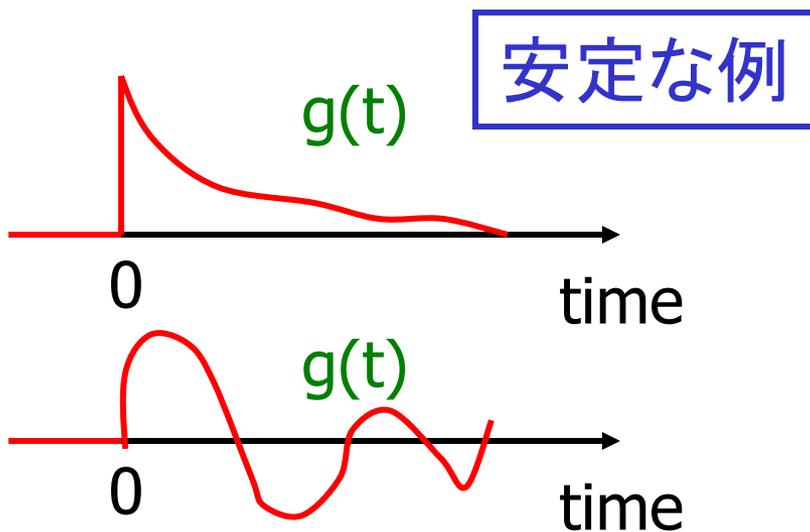
線形時不変動的システムの 安定性の定義

安定な線形時不変動的システム

⇕ 定義

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

$g(t)$: インパルス応答



2階微分方程式で表されるシステムの の伝達関数(1)



$$b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t)$$

$$x(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} X(s)$$

$$y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} Y(s)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s X(s)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s Y(s)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s^2 X(s)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} s^2 Y(s)$$

2階微分方程式で表されるシステムの伝達関数(2)



$$b_1 s X(s) + b_0 X(s) = s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s)$$

$$(b_1 s + b_0) X(s) = (s^2 + a_1 s + a_0) Y(s)$$

$$G(s) = Y(s)/X(s) \\ = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

2階微分方程式で表されるシステム のインパルス応答



$$X(s) = 1$$

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\therefore Y(s) = G(s) X(s)$$

$$= \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$= \frac{b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

p_1, p_2 は特性方程式
(伝達関数の分母=0)
 $s^2 + a_1 s + a_0 = 0$
の根

特性方程式が異なる実根をもつ場合 (p_1, p_2 が異なる実根の場合)

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)}$$
$$= \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2}$$

K_1, K_2 は定数。
演習問題: K_1, K_2 の値を
 b_1, b_0, p_1, p_2 で表せ。



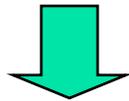
$$y(t) = K_1 \exp(p_1 \cdot t) + K_2 \exp(p_2 \cdot t)$$

安定性の必要十分条件
 $p_1 < 0$ かつ $p_2 < 0$

特性方程式が重根をもつ場合 ($p_1=p_2$, 実根の場合)

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-p_1)^2}$$
$$= \frac{L_1}{s-p_1} + \frac{L_2}{(s-p_2)^2}$$

L_1, L_2 は定数。
演習問題: L_1, L_2 の値を
 b_1, b_0, p_1, p_2 で表せ。



$$y(t) = L_1 \exp(p_1 \cdot t) + L_2 \cdot t \cdot \exp(p_1 \cdot t)$$

安定性の必要十分条件
 $p_1 (=p_2) < 0$

特性方程式が複素共役根をもつ場合 (p_1, p_2 が複素共役根の場合)

$$Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-a)^2 + b^2}$$
$$= \frac{M_1 (s - a)}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{M_2 b}{(s-a)^2 + b^2}$$



$$y(t) = M_1 \exp(a \cdot t) \cos(b t)$$
$$+ M_2 \exp(a \cdot t) \sin(b t)$$
$$= M \exp(a \cdot t) \cos(b t + \theta)$$

安定性の必要十分条件

$$a < 0$$

$$p_1 = a + j b$$

$$p_2 = a - j b$$

M_1, M_2 は定数。

演習問題: M_1, M_2 の値を b_1, b_0, a, b で表せ。

2階微分方程式で表されるシステムの の安定性の必要十分条件

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

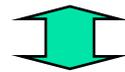
p_1, p_2 を特性方程式 (伝達関数の分母=0)

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

の根とすると、

「 p_1, p_2 の実数部が負であること」
が安定性の必要十分条件。

演習問題: 「 p_1, p_2 の実数部が負であること」



「 $a_1 > 0$ かつ $a_0 > 0$ 」
であることを示せ。

一般に n階微分方程式で表される システムの安定性の必要十分条件

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

特性方程式 (伝達関数の分母=0)

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

の根の全ての根 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ の実数部が負であることが安定性の必要十分条件。

(注) 伝達関数の分子は安定性には無関係

一般に n階微分方程式で表される システムの安定性の補足

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ が特性方程式の異なる実根のとき

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3) \dots (s-p_n)}$$
$$= \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_3}{s-p_3} + \dots + \frac{K_n}{s-p_n}$$



インパルス応答 $g(t) =$
 $K_1 \exp(p_1 \cdot t) + K_2 \exp(p_2 \cdot t) + K_3 \exp(p_3 \cdot t) + \dots + K_n \exp(p_n \cdot t)$

一般に n階微分方程式で表されるシステムの安定性の必要十分条件

特性方程式 (伝達関数の分母=0)

$$S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0 = 0$$

の根の全ての根 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ の実数部が負であることが安定性の必要十分条件。

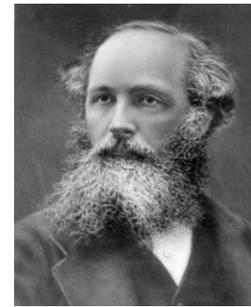
このための $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ の必要十分条件は何か。



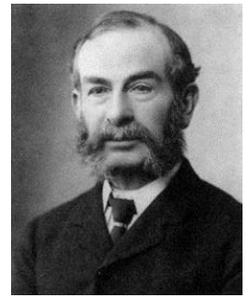
Routh - Hurwitz の安定判別

(注) 5次以上の代数方程式の一般解は存在しない。
数学者ガロアによって証明された。

Maxwell と Routh



Maxwell



Routh

Maxwell (電磁気学のMaxwell の方程式で著名)とRouthはイギリスのCambridge 大学の同級生で首席を争ったライバル。19世紀後半に活躍。

Maxwell は制御の安定性の問題 (一般の n 階微分方程式の特性方程式の全ての根の実数部が負になる条件)が解けなかった。

懸賞問題(アダム賞)として出題した。



Routh がこの問題を解き、その内容を懸賞論文に応募した。

Stodola と Hurwitz



Stodola



Hurwitz

スイスの制御の研究者 **Stodola** は制御の安定性の条件が「特性方程式の全ての根の実数部が負になること」と見いだしたが この問題が解けなかった。

同じ大学(スイス連邦工科大学 ETH の前身)の数学者 **Hurwitz** に相談し、Hurwitz はこの問題を解いた。

Routh がこの問題を解いてから10数年後のことである。
両者ともRouth の結果を知らなかった。
後にRouth, Hurwitz の結果は同等であることが証明された。

Routh, Hurwitz の計算アルゴリズムは制御工学のテキストを見てください

早熟/悲運の天才 ガロア



エヴァリスト・ガロア(1811-1832, フランス)

論文をフランス学士院に提出、コーシーが紛失。
再提出するも預かったフーリエが急死し紛失。



一人の女性をめぐる決闘で敗れて死す(19才)



死後、その数学上の業績が認められる。

5次以上の方程式には

一般的な代数的解の公式は存在しない

ジェロラモ・カルダーノ

Gerolamo Cardano 1501 - 1576



16世紀イタリアの数学者、医者、占星術師、賭博師、哲学者

1545年「偉大なる術(アルス・マグナ)」の著書で
3次方程式の解の公式、4次方程式の解法を示す。

タルタリアに3次方程式の解法を聞く（公開しないとの約束で）

4次方程式の解はカルダーノの弟子ルドヴィコ・フェラーリが解いたもの

3次方程式の解を示す際にはじめて虚数の概念を導入したのはカルダーノ

ニコロ・フォンタナ・”タルタリア”

Niccolò Fontana "Tartaglia"

1499-1557



- イタリアの数学者、工学者、測量士。
- ヴェネツィア共和国の簿記係でもあった。
- アルキメデスやユークリッドのイタリア語訳を含む多くの著書を著し、数学関係編集の分野で高く評価。
- 史上初めて数学による大砲の弾道計算を行った弾道学の祖。
- 彼の研究は、後にガリレオ・ガリレイによる落体の実験により検証された。
- 「タルタリア」は生後につけられた渾名。

制御工学 第8回

- 線形システムの安定判別

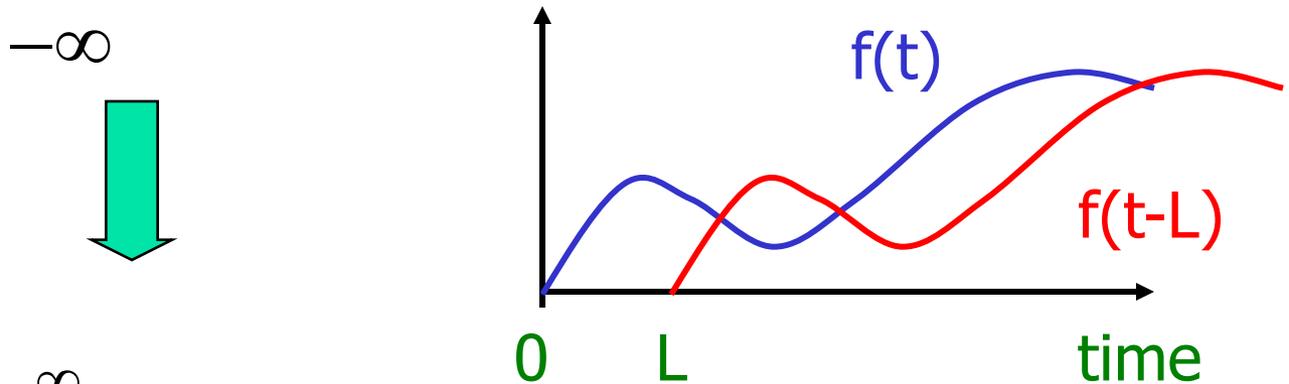
Nyquist の安定判別

安定なシステムをフィードバックをかけたとき、安定になるか不安定になるかを判別する。

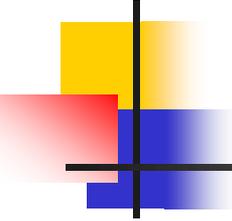
ベクトル線図、ボーデ線図を使用

ラプラス変換の性質(補足) $f(t)$ の L 時間遅れは $F(s)$ に e^{-sL} をかける

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$



$$e^{-sL} F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-L) \exp(-st) dt$$



周波数伝達関数 $G(j\omega)$ と 伝達関数 $G(s)$

安定なシステム:

$G(j\omega)$, $G(s)$ の両方が存在

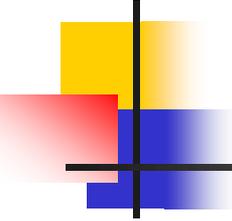
$G(j\omega)$ は周波数応答法と結びつき
物理的な意味がある。

$G(s)$ には物理的な意味はない。

$G(s)$ で $s=j\omega$ とおけば $G(j\omega)$ が求まる。

不安定なシステム:

$G(s)$ は存在する。 $G(j\omega)$ は存在しない。



Harry Nyquist (AT&T, 1889-1976)

1927年 米国ベル研究所 Harold Black により、
Negative Feedback による電子管増幅器が考案される。

出力から入力へのフィードバック量により増幅器が
安定、不安定になることが経験される。

1932年 Nyquist によりこの問題が理論的に検討され、
安定になるための条件が明らかになる。

電気通信の技術課題を解決するためのもの
 制御工学に取り入れられる。

Harry Nyquist

名前が残る多くの研究業績

Nyquist plot

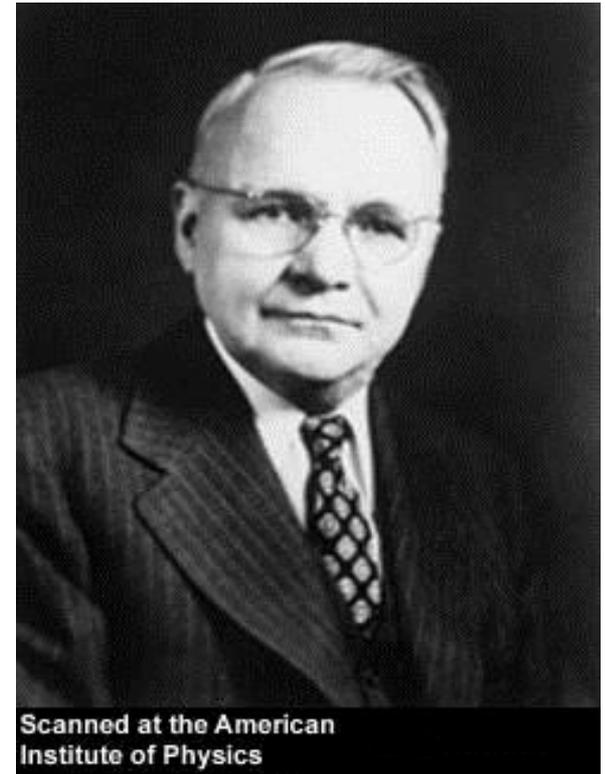
Nyquist–Shannon sampling theorem

Nyquist frequency

Nyquist stability criterion

Nyquist ISI criterion

Johnson–Nyquist noise



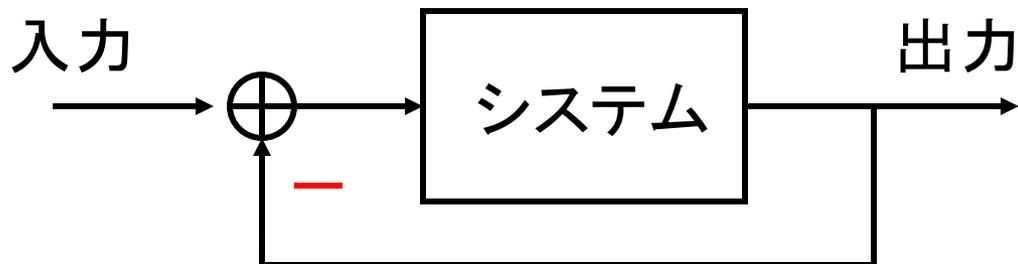
フィードバックと安定性

安定なシステムにフィードバックをかける。

➡ 安定にも不安定にもなりうる。

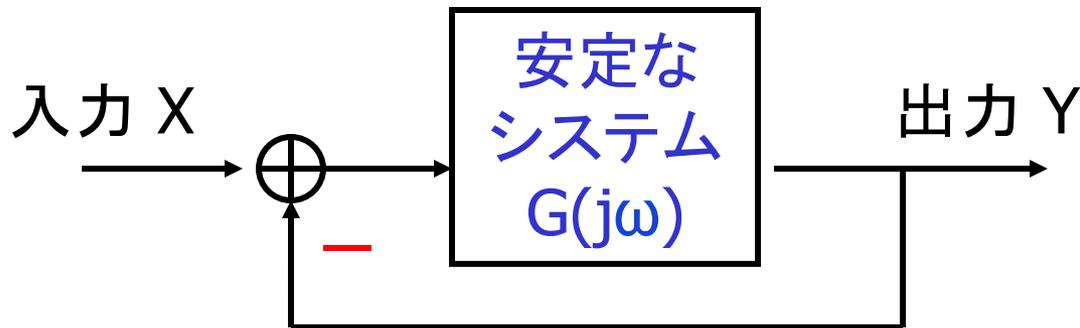
不安定なシステムにフィードバックをかける。

➡ 安定にも不安定にもなりうる。



ナイキストの安定判別の 問題設定(1)

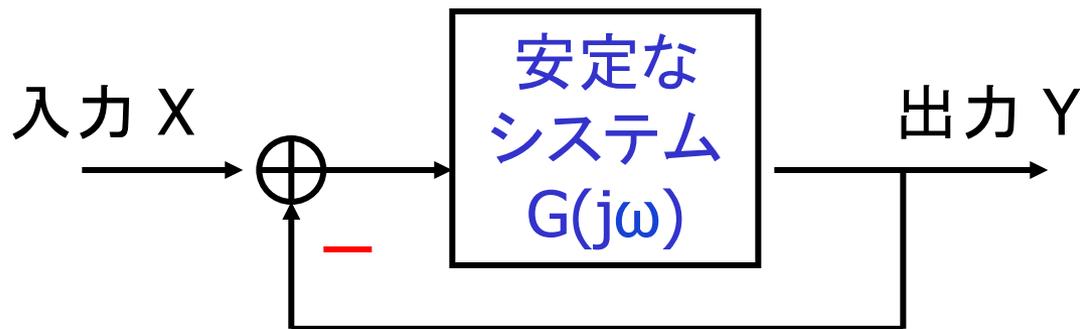
安定なシステム $G(j\omega)$ にフィードバックをかける
周波数伝達関数 $G(j\omega)$ から、
フィードバックをかけた
システム全体の安定性を判定する。



システム全体は安定 ？

ナイキストの安定判別の 問題設定(2)

周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は測定データ
(ボーデ線図、またはベクトル線図)
で与えられる。



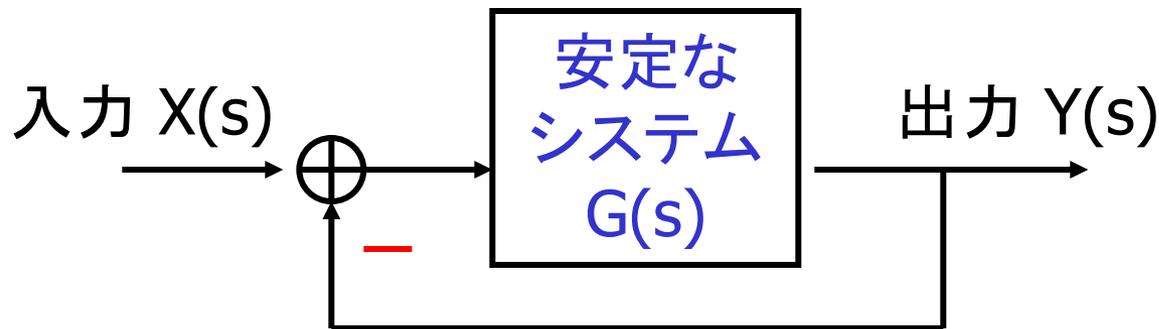
システム全体は安定 ？

Routh-Hurwitz 安定判別 との関係

$G(j\omega)$ が式 ($j\omega$ の有理多項式) で与えられたとき
 $s=j\omega$ とおき $G(s)$ を得て、

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

に対してRouth-Hurwitz の安定判別を適用。



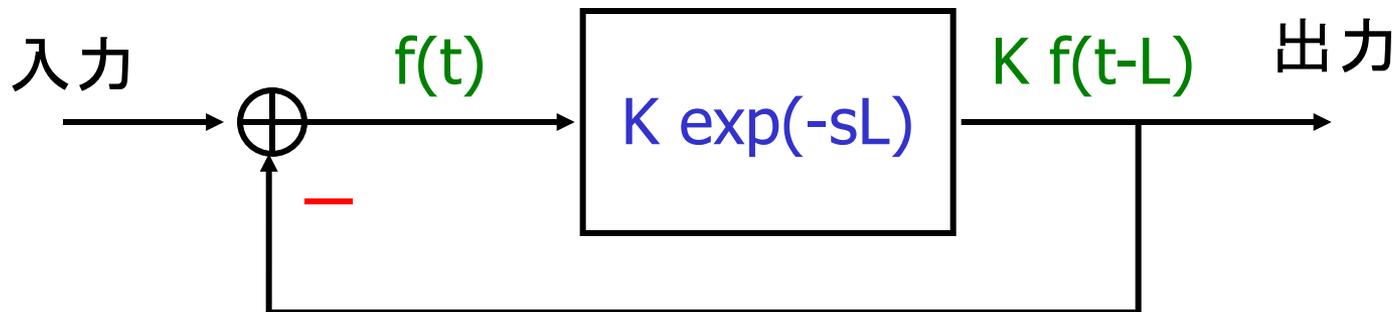
システム全体は安定 ？

Routh-Hurwitz 安定判別 の問題点(1)

$G(s)$ が s の有理多項式でない場合R-H法は適用不可

例: $G(s) = K \exp(-sL)$, $K > 0$, $L > 0$ のとき

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K \exp(-sL)}{1+K \exp(-sL)}$$



(注) 安定のための必要十分条件は $K < 1$ (後述)

Routh-Hurwitz 安定判別 の問題点(2)

$G(j\omega)$ が測定データのみで式で表されていない場合
R-H法は**適用不可**

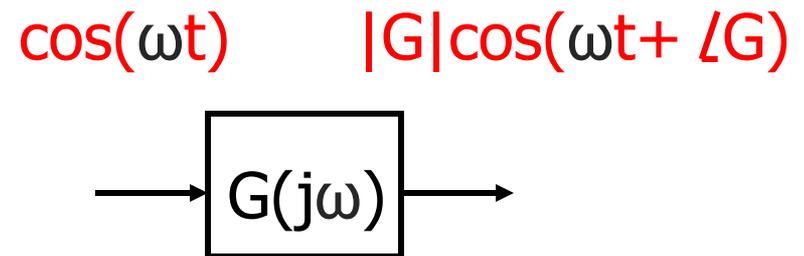
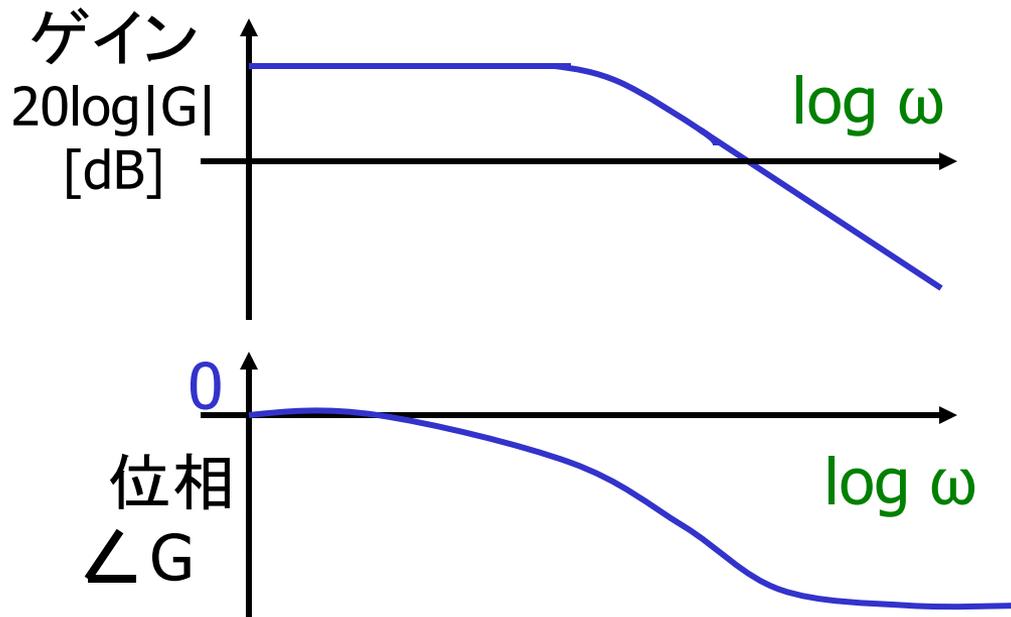
例: $G(j\omega)$ のボーデ線図またはベクトル線図の
測定データとして与えられている場合



システム全体は安定？

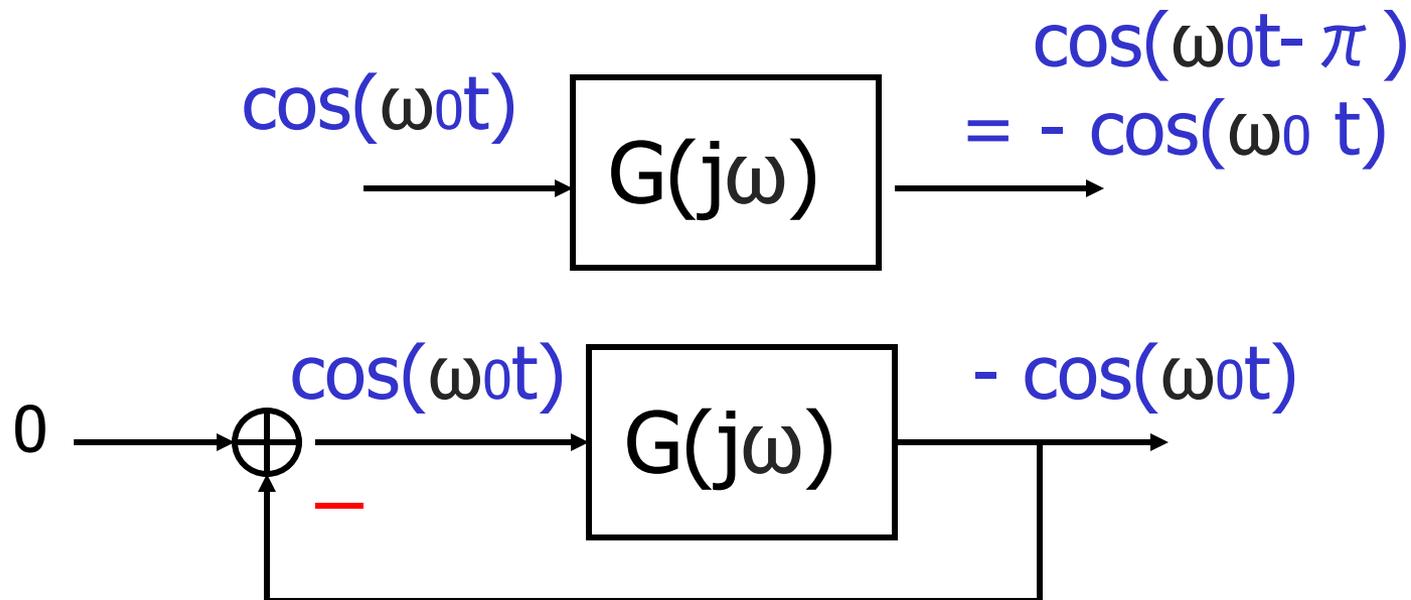
典型的システムの周波数特性 (ゲイン特性、位相特性)

多くの(安定な)システムでは周波数 ω が大きくなると
ゲイン $|G(j\omega)|$ が小さくなる、
位相 $\angle G(j\omega)$ がマイナスの値で大きくなる。



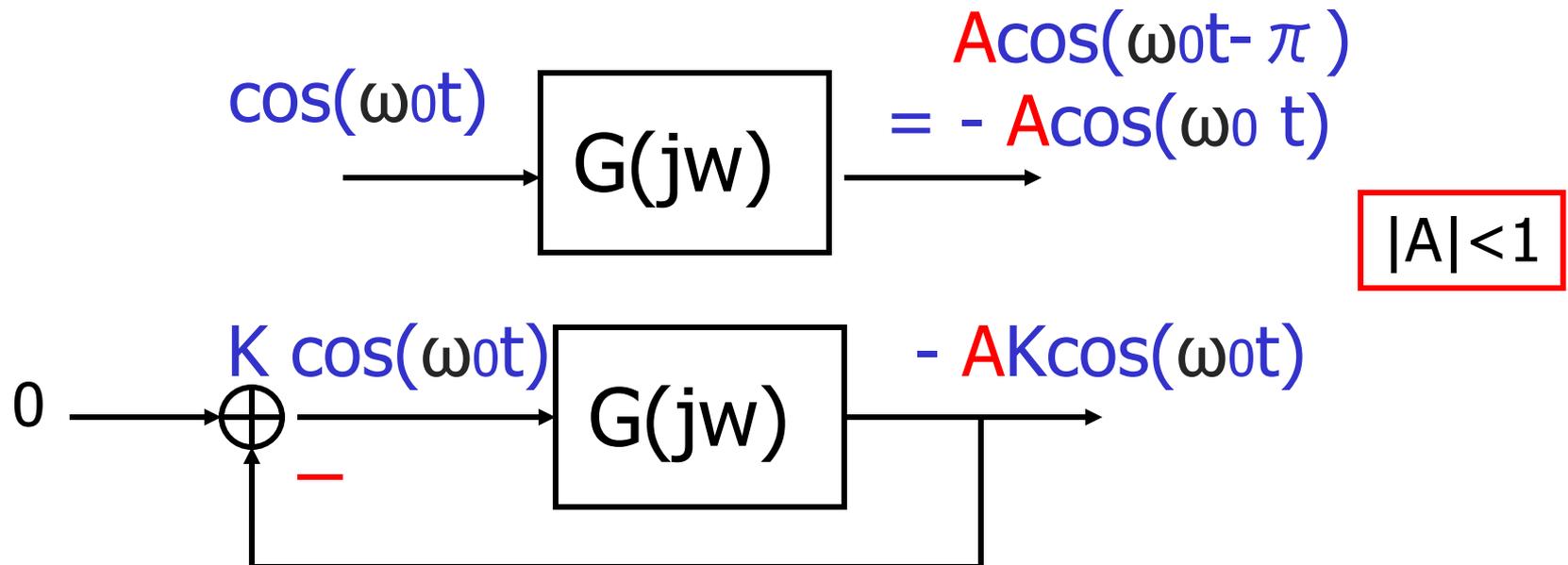
位相遅れ π の周波数で ゲインが1の場合

ある周波数 $\omega = \omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| = 1$ の場合、
フィードバックシステムは周波数 ω_0 で発振する。



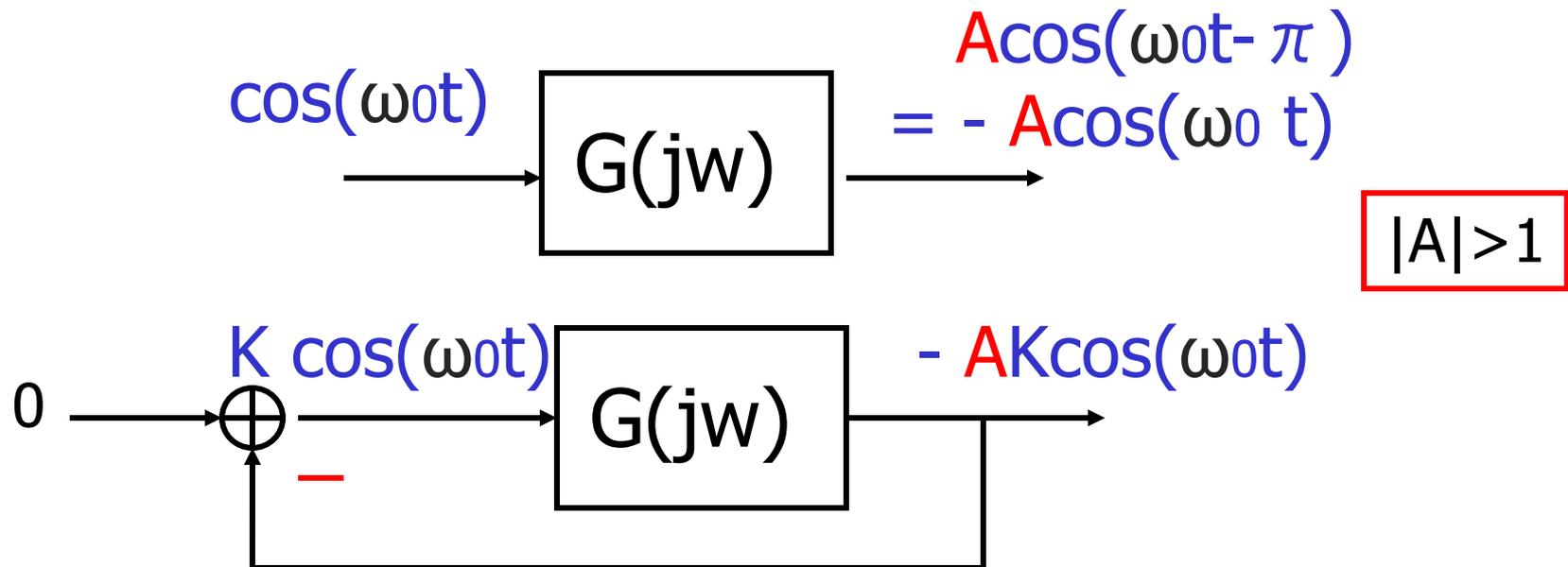
位相遅れ π の周波数で ゲインが1より小さい場合

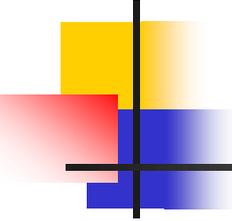
ある周波数 $\omega = \omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| < 1$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。



位相遅れ π の周波数で ゲインが1より大きい場合

ある周波数 $\omega = \omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| > 1$ の場合、
フィードバックシステムは不安定である。





ゲインの線形表記の場合の 安定判別

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき

(I) $|G(j\omega_0)| < 1$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。

(II) $|G(j\omega_0)| = 1$ の場合、
.. 安定限界である。

(III) $|G(j\omega_0)| > 1$ の場合、
.. 不安定である。

ゲインのdB表記の場合の 安定判別

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき

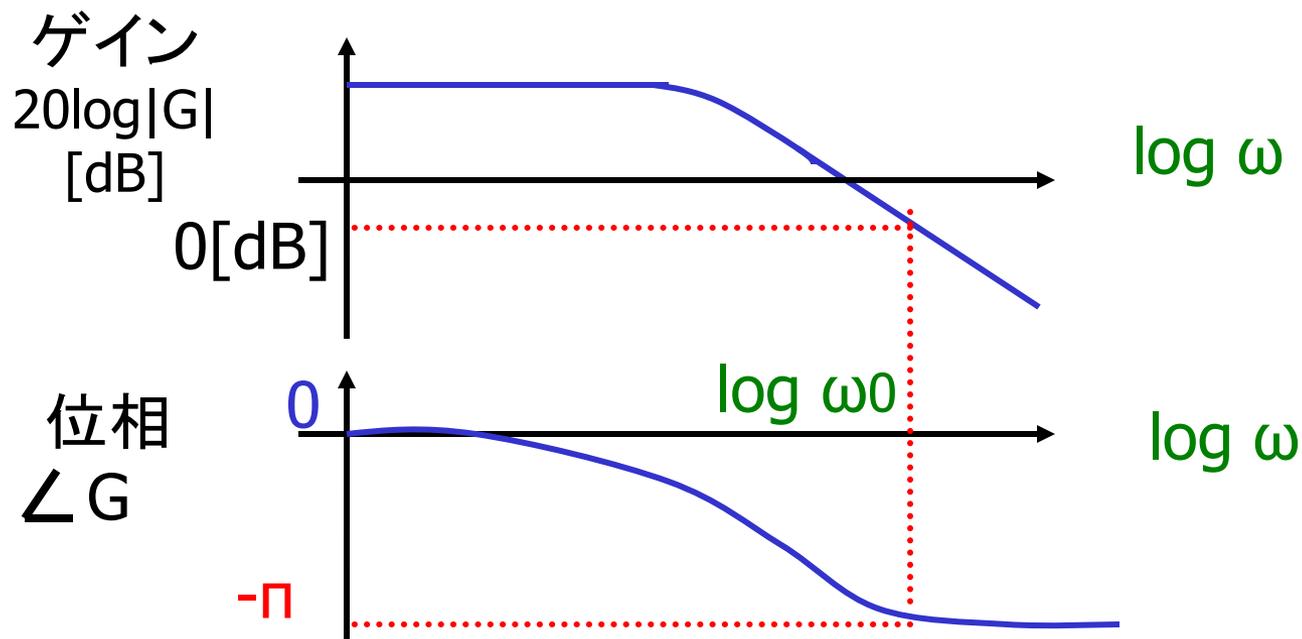
(I) $20 \log |G(j\omega_0)| < 0 \text{ dB}$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。

(II) $20 \log |G(j\omega_0)| = 0 \text{ dB}$ の場合、
..
安定限界である。

(III) $20 \log |G(j\omega_0)| > 0 \text{ dB}$ の場合、
..
不安定である。

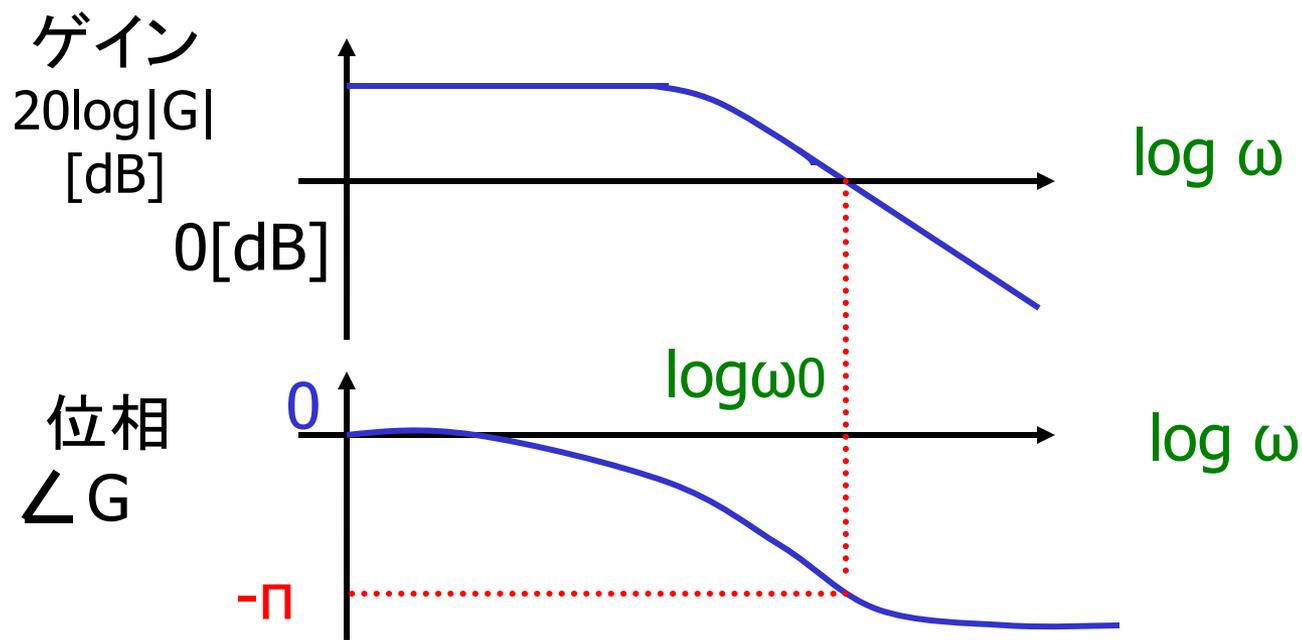
ボーデ線図による安定判別(1)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $20 \log |G(j\omega_0)| < 0 \text{ dB}$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。



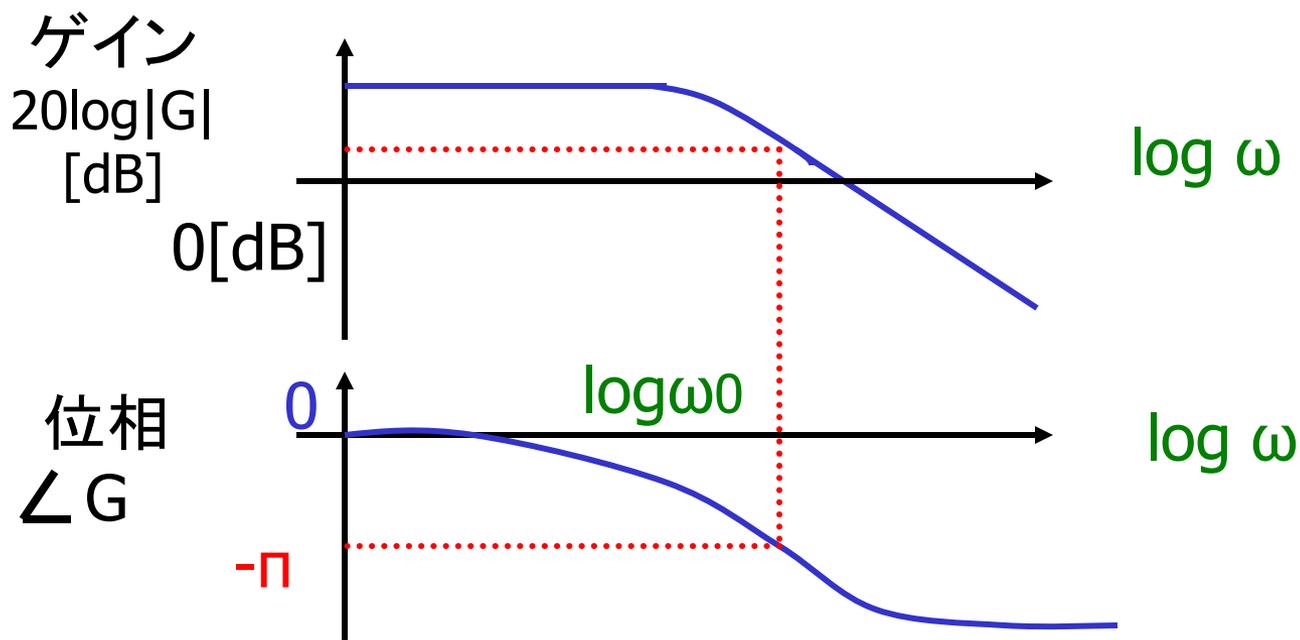
ボーデ線図による安定判別(2)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $20 \log |G(j\omega_0)| = 0 \text{ dB}$ の場合、
フィードバックシステムは安定限界である。



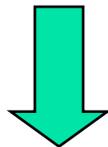
ボート線図による安定判別(3)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $20 \log |G(j\omega_0)| > 0 \text{ dB}$ の場合、
フィードバックシステムは不安定である。

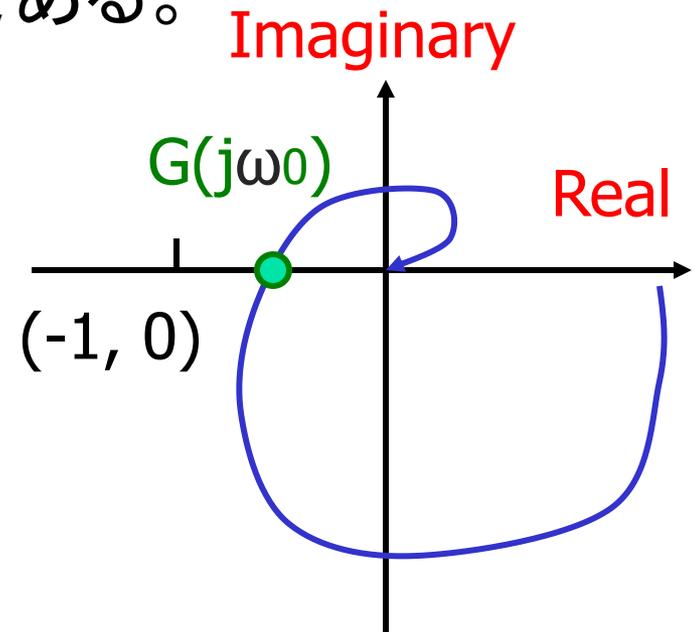


ベクトル線図による安定判別(1)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| < 1$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。

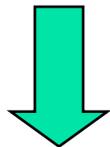


$G(j\omega)$ のベクトル線図が
 $(-1, 0)$ の内側を通るとき
フィードバックシステムは安定。

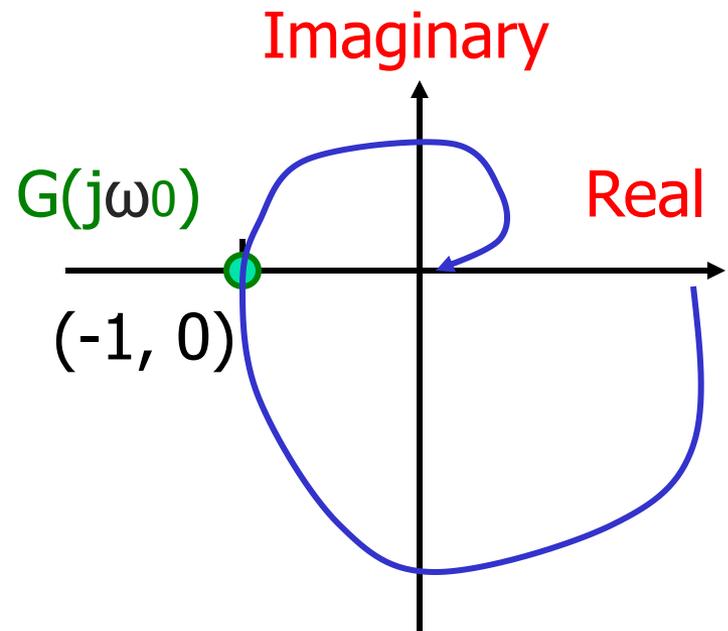


ベクトル線図による安定判別(2)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| = 1$ の場合、
フィードバックシステムは安定限界である。

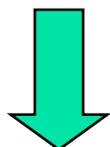


$G(j\omega)$ のベクトル線図が
 $(-1, 0)$ 上を通るとき
フィードバックシステムは
安定限界。

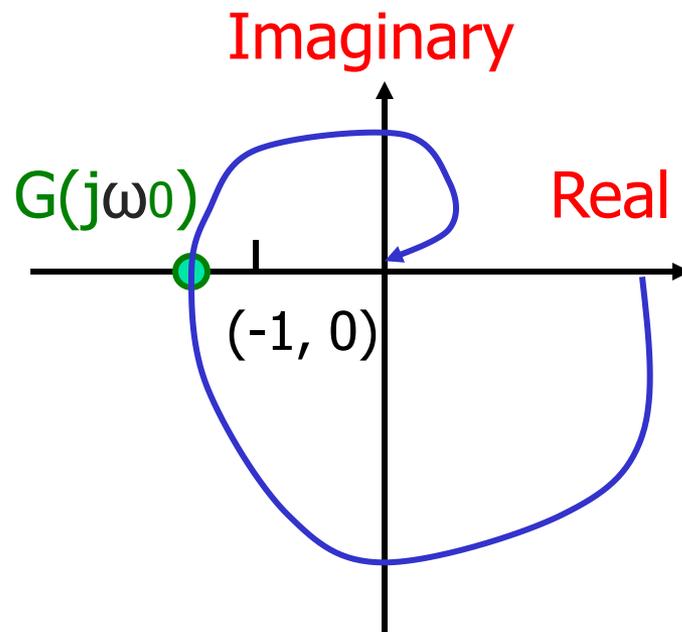


ベクトル線図による安定判別(3)

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $|G(j\omega_0)| > 1$ の場合、
フィードバックシステムは不安定である。



$G(j\omega)$ のベクトル線図が
 $(-1, 0)$ の外側を通るとき
フィードバックシステムは
不安定。

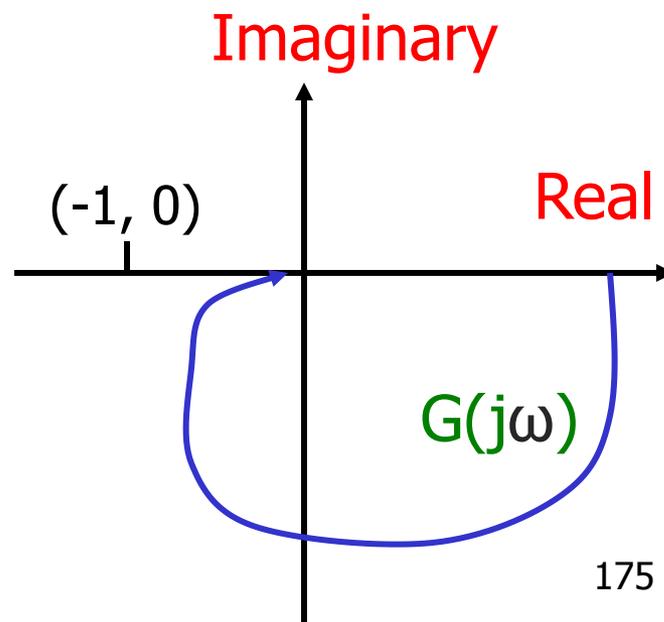
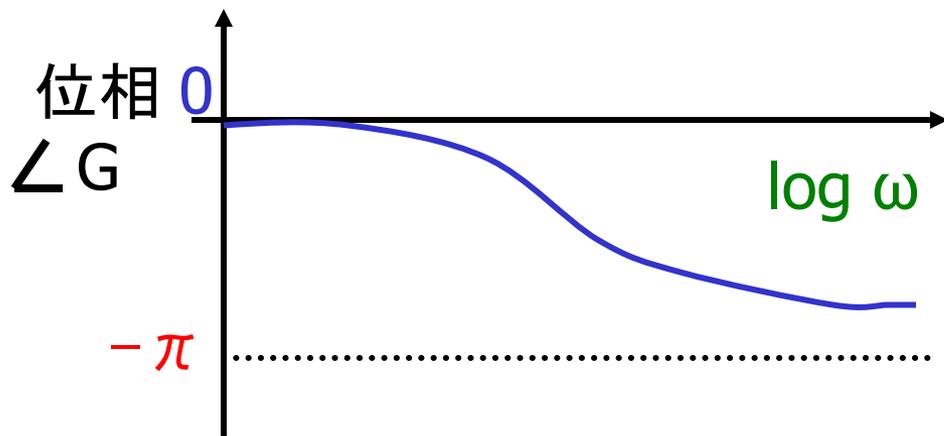


位相遅れが π までにならないとき

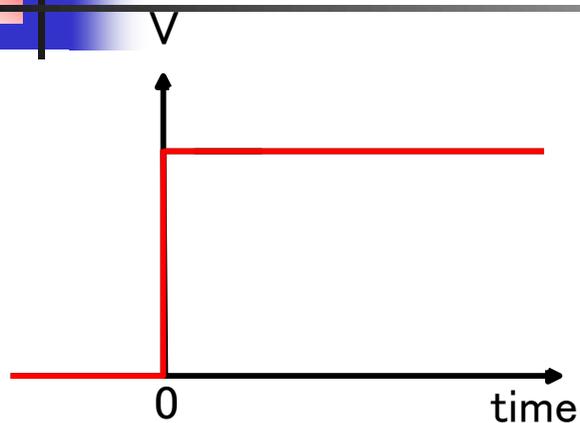
$\angle G(j\omega_0) = -\pi$ なる ω_0 が存在しないとき
フィードバックシステムは安定である。

例: $G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$ のとき

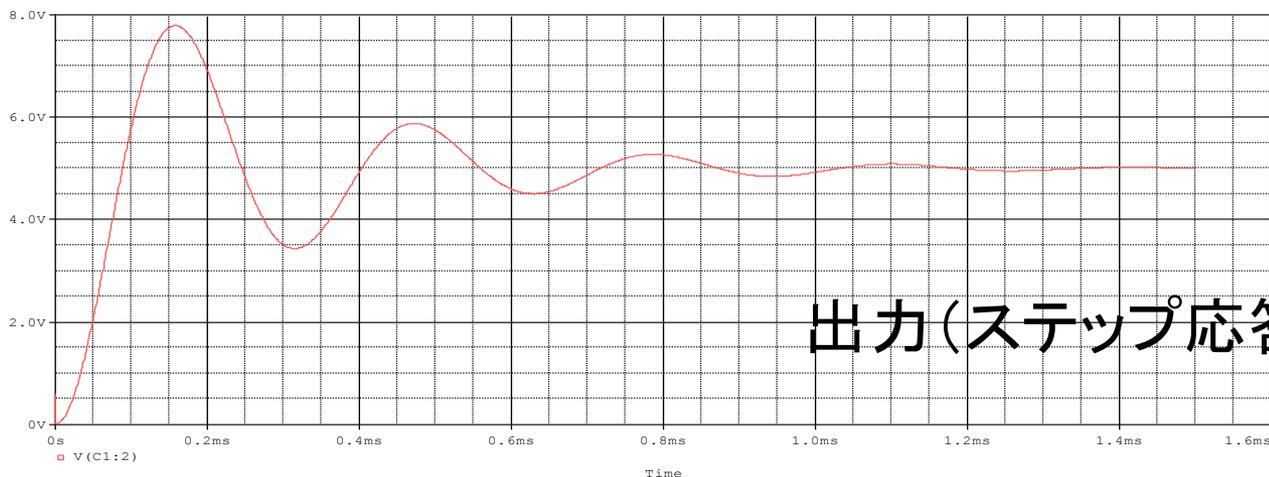
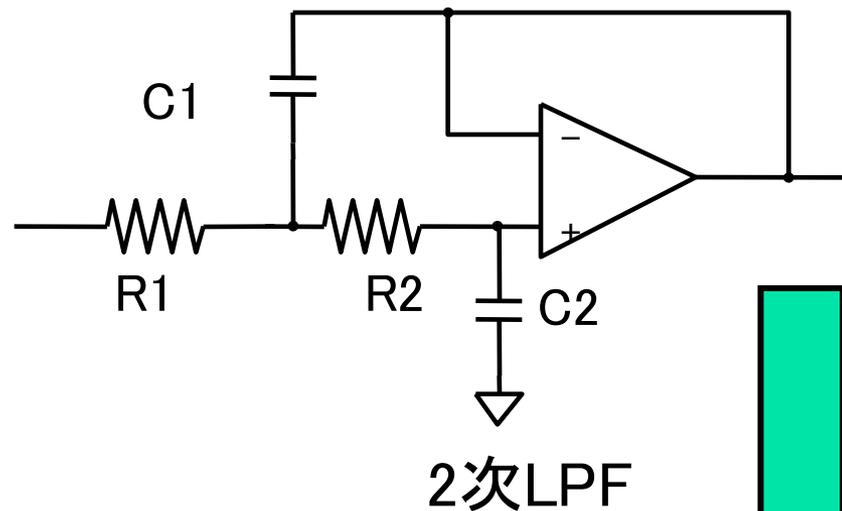
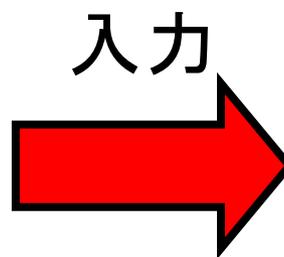
例: 位相線図、ベクトル線図が
次のような形をしているとき



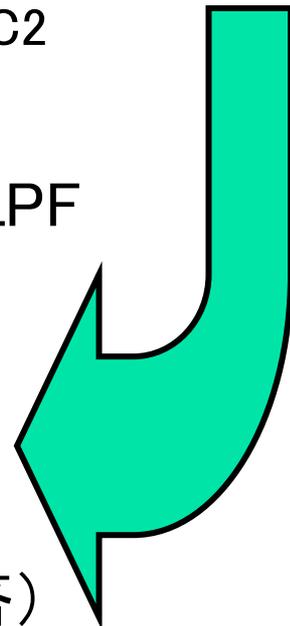
2次システムのステップ応答



ステップ入力



出力(ステップ応答)



2次系システムのステップ応答

伝達関数 $G(s) = \frac{a_2}{s^2 + a_1s + a_2} \left(a_1 = \frac{1}{Q\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}, a_2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} \right)$

ステップ応答Y(s)は $Y(s) = G(s) \times \frac{1}{s} = \frac{a_2}{s(s^2 + a_1s + a_2)}$

ステップ応答y(t)を求めるには分母の根を求めて

因数分解し、この式を部分分数分解する。

$$s^2 + a_1s + a_2 = 0 \text{ の根 } s_1, s_2$$

$$s_1, s_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

① 複素共役根の場合

$s_1, s_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$ において、 $a_1^2 < 4a_2$ のとき

$\sigma = \frac{-a_1}{2}, \alpha = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$ とおくと、共役複素根は $\sigma \pm j\alpha$ である。

このときのステップ応答

$$Y(s) = \frac{a_2}{s \{s - (\sigma + j\alpha)\} \{s - (\sigma - j\alpha)\}}$$

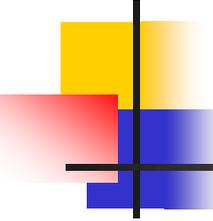
この式をラプラス逆変換する

$$y(t) = \frac{a_2}{\sigma^2 + \alpha^2} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2}}{\alpha} e^{\sigma t} \sin(\alpha t + \phi) \right\}, \tan \phi = -\frac{\alpha}{\sigma}$$

$\sigma < 0$ ならば振動収束

$\sigma = 0$ ならば振動

$\sigma > 0$ ならば振動発散



② 重根の場合

$$s_1, s_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \text{ において、} \boxed{a_1^2 = 4a_2} \text{ のとき}$$

このとき重根 s_n をもつので

$$Y(s) = \frac{a_2}{s(s - s_n)^2} \quad \text{この式をラプラス逆変換する}$$

$$y(t) = \frac{a_2}{s_n^2} \left\{ 1 - e^{s_n t} (1 - s_n t) \right\}$$

安定であるには $s_n < 0$ であればよい。

③ 異なる実根をもつ場合

$$s_1, s_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \text{ において、 } a_1^2 > 4a_2 \text{ のとき}$$

異なる実根 s_1, s_2 をもつとすると、

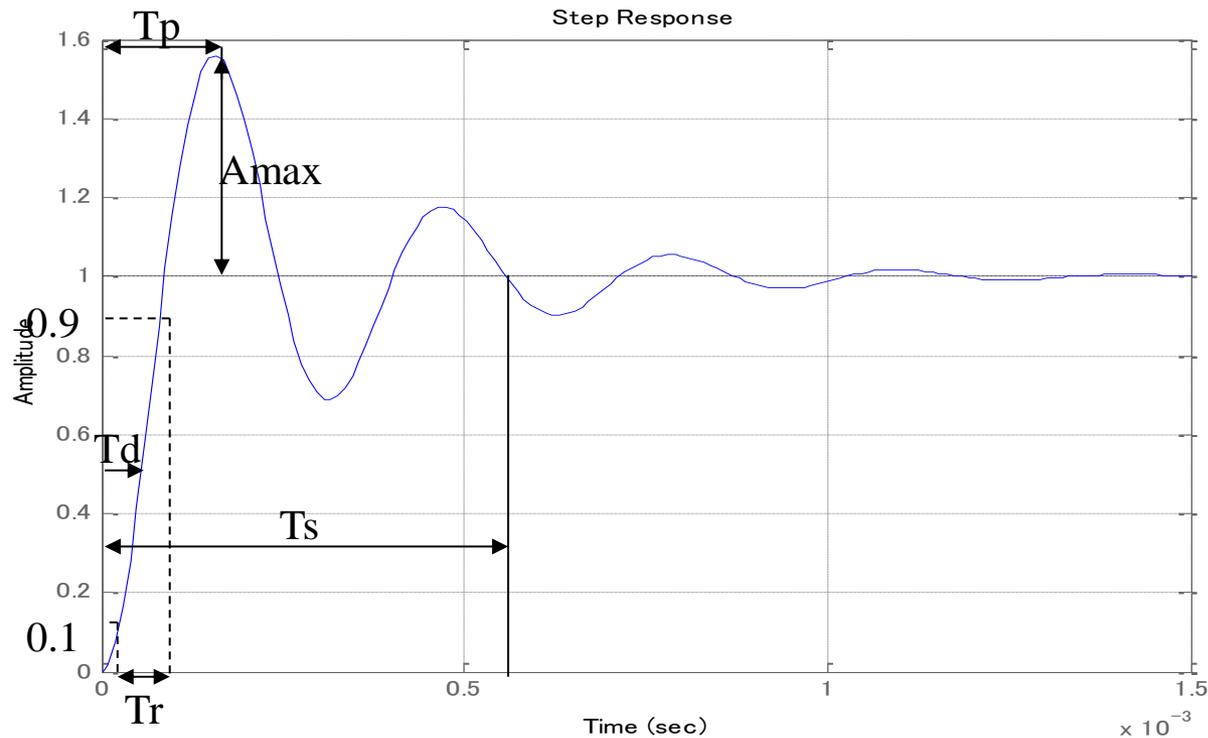
$$Y(s) = \frac{a_2}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{a_2}{s_1-s_2} \left\{ \frac{1}{s(s-s_1)} - \frac{1}{s(s-s_2)} \right\}$$

この式をラプラス逆変換する

$$y(t) = \frac{a_2}{s_1-s_2} \left\{ \frac{1}{s_2} (1 - e^{s_2 t}) - \frac{1}{s_1} (1 - e^{s_1 t}) \right\}$$

安定であるには $s_1, s_2 < 0$

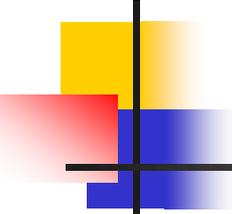
ステップ応答の諸特性



立ち上がり時間: T_r 行き過ぎ時間: T_p

遅れ時間: T_d オーバーシュート: A_{max}

整定時間: T_s

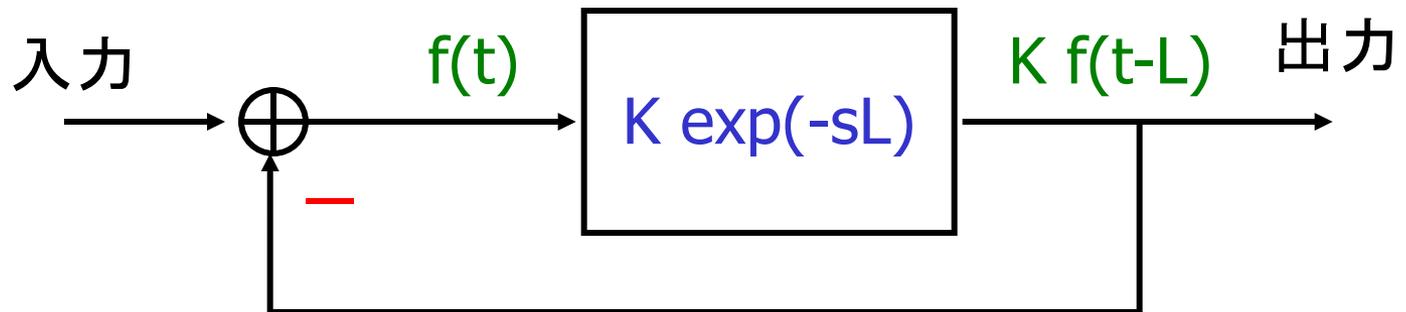


制御工学 第9回

- 安定度： 安定なシステムをフィードバックをかけて安定になった場合、
「どの程度安定性の余裕があるか」
ゲイン余裕・位相余裕
ベクトル線図、ボーデ線図を用いる。

Nyquist の安定判別 例題

$G(s) = K \exp(-sL)$, $L > 0$ のとき、下図のフィードバックシステムが安定になるための $K (> 0)$ の条件を求めよ。



注: $G(s)$ が s の有理多項式でない場合
R-H法は適用不可

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K \exp(-sL)}{1+K \exp(-sL)}$$

$K \exp(-j\omega L)$ のボーデ線図

ゲイン
 $20\log|G|$
[dB]

0[dB]



ω

$K < 1$
(安定)

0[dB]



ω

$K = 1$
(安定限界)

0[dB]

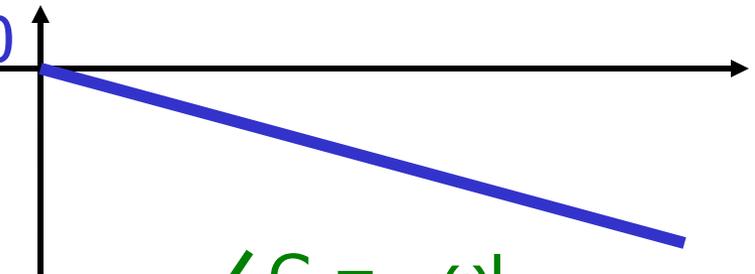


ω

$K > 1$
(不安定)

位相
 $\angle G$

0



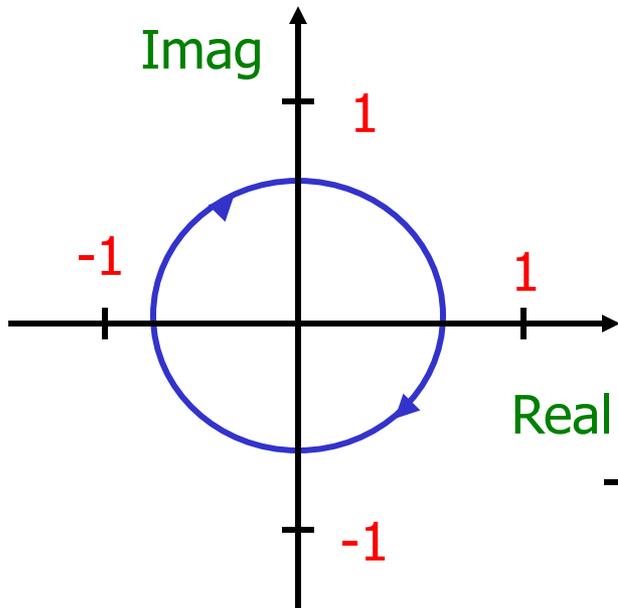
ω

$$\angle G = -\omega L$$

線形位相
Linear Phase

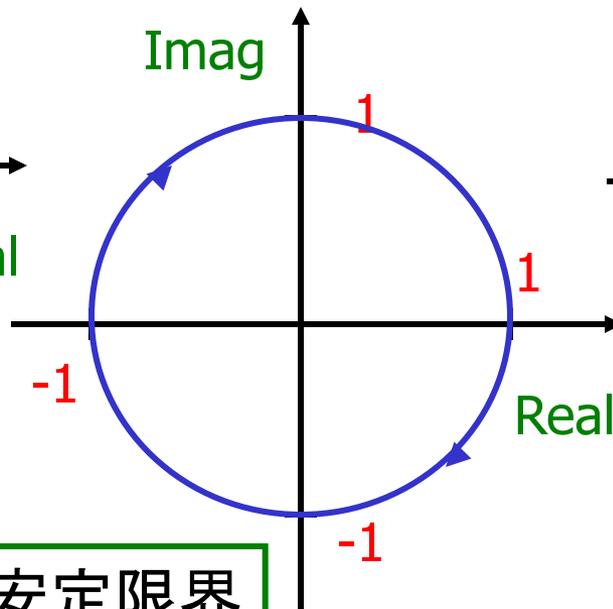
$K \exp(-j\omega L)$ のベクトル線図

$K < 1$



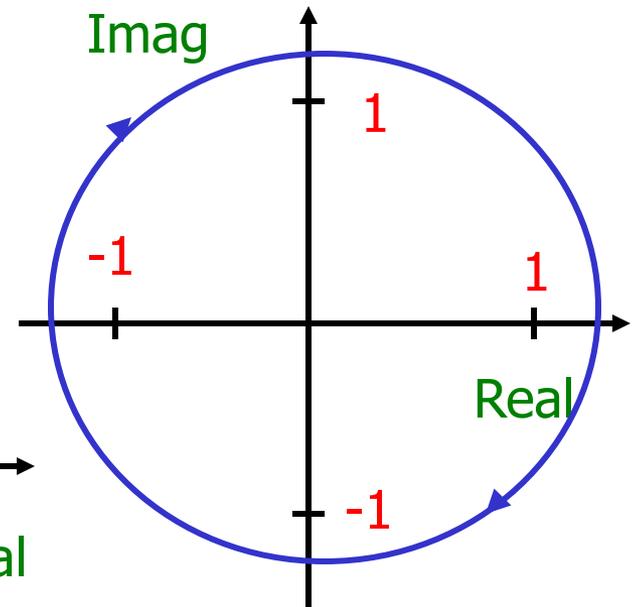
安定

$K = 1$



安定限界

$K > 1$



不安定

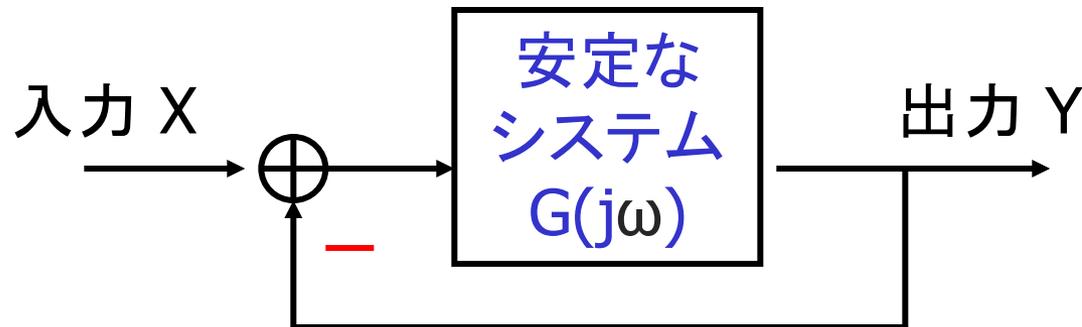
フィードバック・システムの安定度 (ゲイン余裕、位相余裕)

安定なシステム $G(j\omega)$ にフィードバックをかける。

ある周波数 $\omega = \omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき

$|G(j\omega_0)| < 1$ の場合、

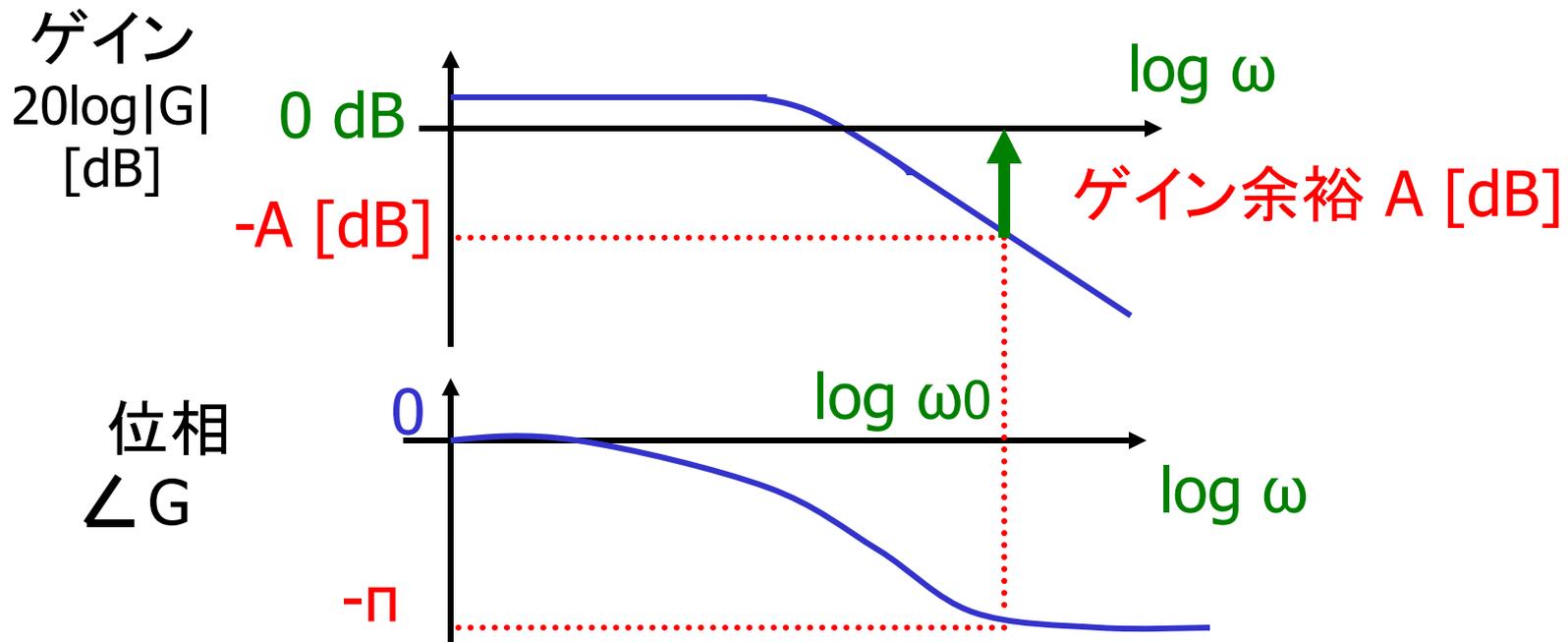
フィードバックシステムは安定である。



システム全体は安定の場合、「どの程度」安定か？

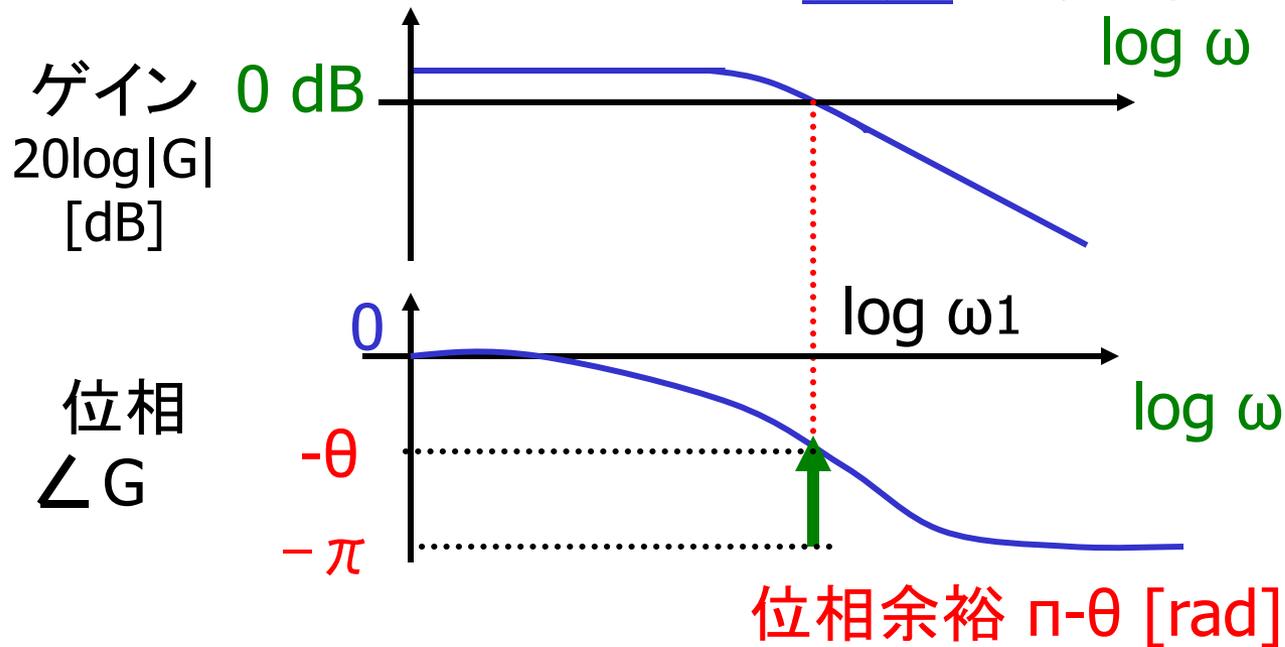
ゲイン余裕 (Gain Margin) とボデー線図

ある周波数 $\omega=\omega_0$ で $\angle G(j\omega_0) = -\pi$ のとき
 $20 \log |G(j\omega_0)| < 0 \text{ dB}$ の場合、
フィードバックシステムは安定である。



位相余裕 (Phase Margin) とボーデ線図

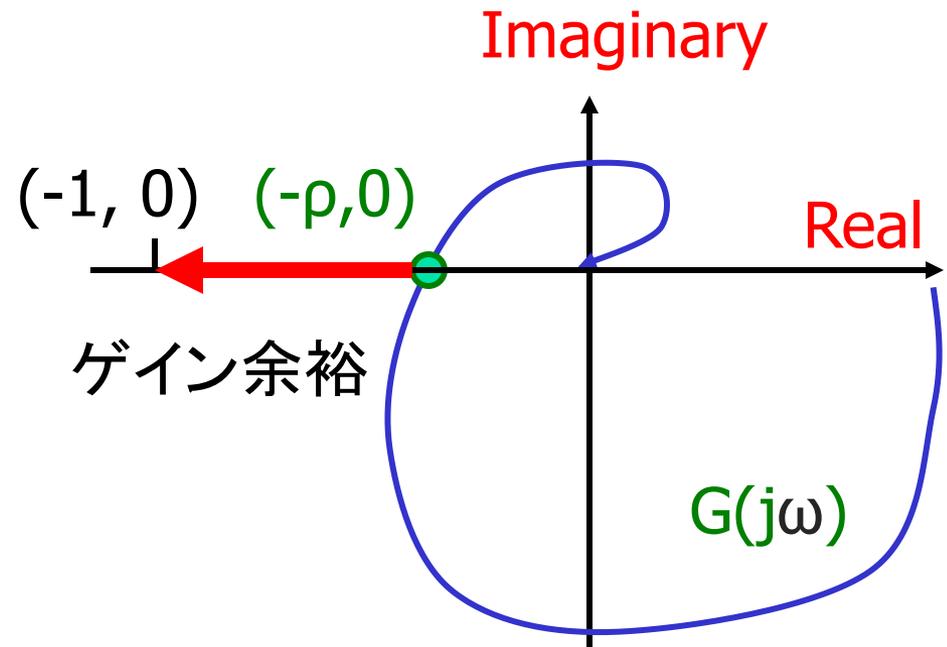
ある周波数 $\omega = \omega_1$ で $20 \log |G(j\omega_1)| = 0 \text{ dB}$
 $\angle G(j\omega_1) > -\pi$ のとき
フィードバックシステムは安定である。



ゲイン余裕 (Gain Margin) と ベクトル線図

$G(j\omega)$ のベクトル線図が $(-1, 0)$ の内側を通るとき
フィードバックシステムは安定。

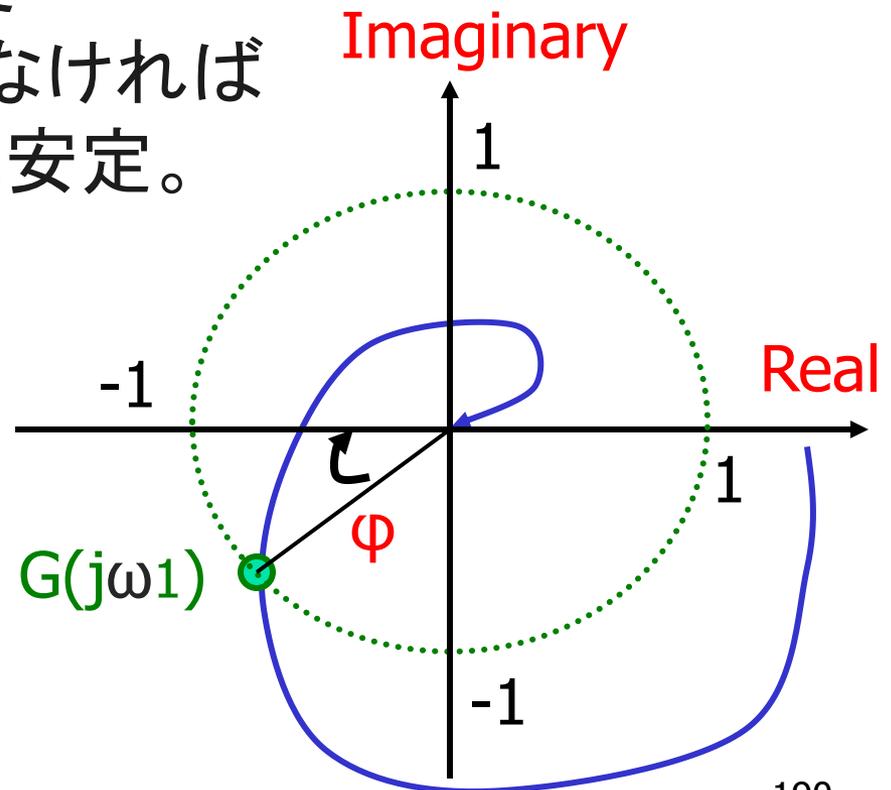
$$\text{ゲイン余裕} = -20 \log \rho \text{ [dB]}$$



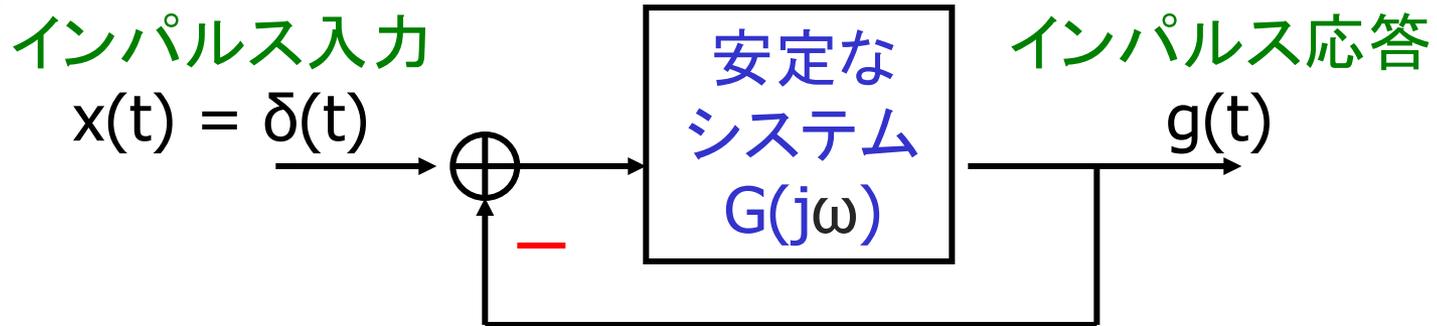
位相余裕 (Phase Margin) と ベクトル線図

$G(j\omega)$ のベクトル線図で
単位円上を交差する点で
位相が $-\pi$ まで回っていないならば
フィードバックシステムは安定。

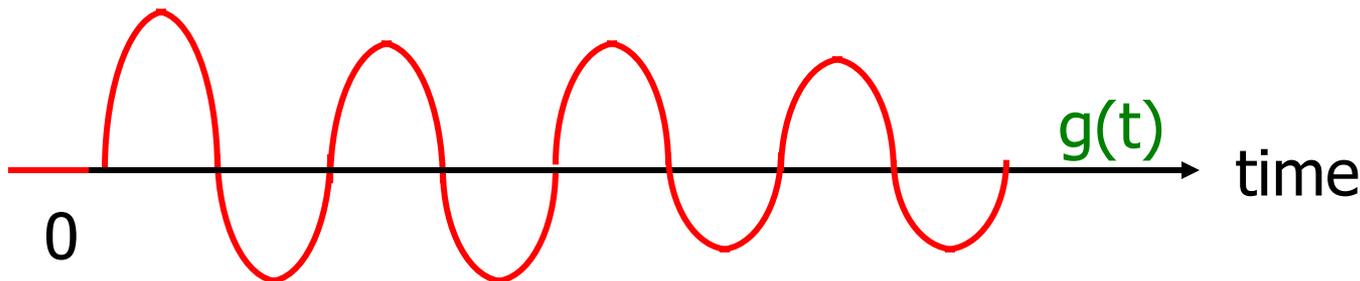
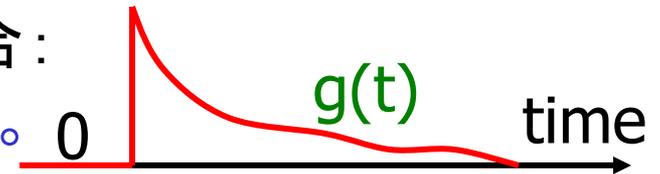
位相余裕
 $\varphi = \pi + \angle G(j\omega_1)$



安定性の余裕がないとどうなるか。

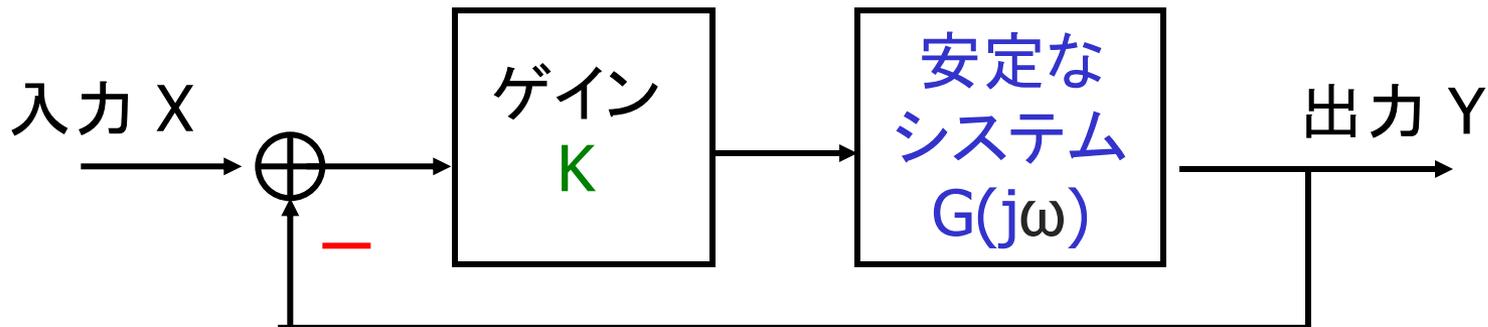


- ゲイン余裕、位相余裕が十分**ある**場合：
インパルス応答は**すぐゼロ**に収束する。
- ゲイン余裕、位相余裕が十分**ない**場合：
インパルス応答は**なかなかゼロ**に収束しない。



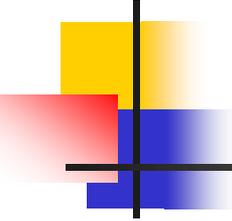
フィードバック・システムの 安定度とゲイン

- ゲイン K を小さくするとフィードバックシステムの安定度（位相余裕、ゲイン余裕）は良くなる。



- 安定性と定常特性はトレードオフの関係。
- 安定性を増すと定常特性は劣化する。

例: $G(s) = 1$ のとき、 $Y = \frac{K}{1+K} X$, オフセット $Y - X = \frac{1}{1+K} X$



安定性と速応性

- フィードバック・システムにおいて
安定性と速応性はトレードオフの関係。
- 安定性を増すと目標値(入力)変化に
対して、出力は高速に応答できなくなる。

アレクサンドル・リアプノフ

Aleksandr Lyapunov 1857-1918



ロシアの数学者, 物理学者 (帝政ロシア時代)

1892年 博士論文"運動の安定性の一般問題" モスクワ大学

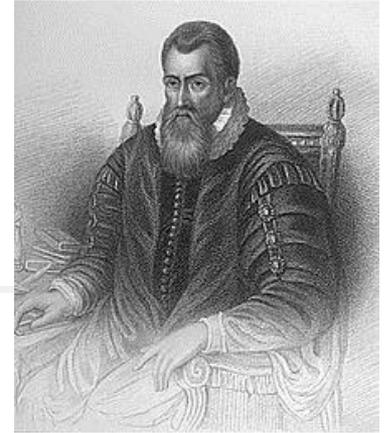
非線形システムの安定性 → リアプノフ関数

数学において、力学系や自励系を成す常微分方程式系における不動点の安定性を証明のために使用。

安定性理論や制御理論で重要な数学的ツール

ジョン・ネイピア

John Napier 1550 - 1617



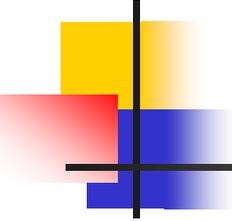
スコットランド

数学者、物理学者、天文学者、占星術師。

対数の発明者、対数表の作成。

かけ算を足し算に、割り算を引き算に。

天文学の膨大な計算を簡単に行える。



まとめ

これらの制御工学の知識は
オペアンプ設計、スイッチング電源制御回路等
アナログ電子回路設計の理論的基礎になる。

20世紀で電子回路分野での最大の発明

負帰還回路

今日、負帰還の原理は一般的である

電子回路のみならず、さまざまなシステムに利用

当時であればとてつもなく新鮮な考え方であった



発明者が原理を思いついたのは
“ひらめき”ではなく専門的な思考ゆえ

負帰還が発明される歴史を追ってゆく

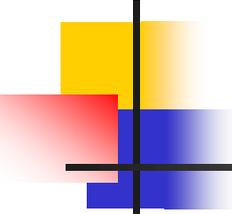
負帰還増幅器の発明者

ハロルド・ブラック

1898-1983



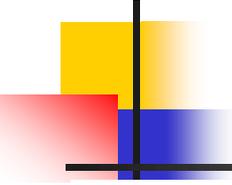
- 電話産業ウエスタン・エレクトリックに在籍
(※ウエスタン・エレクトリックはベル研究所で
有名なAT&T社の製造部門)
 - 負帰還の発明者
 - 生涯特許は347件



負帰還増幅器発明の時代背景

1910年代の米国通信業界は活気に溢れていた。

- 3極管の発明
- 大陸横断電話伝送システムにも使える
高真空度の真空管が開発
- マルコニー無線会社とアームストロングが
再生回路を試験
- ベル電話会社の創業者アレクサンダー・ベルが
ニューヨークとサンフランシスコ間を結ぶ
世界初の大陸間横断通話を公開



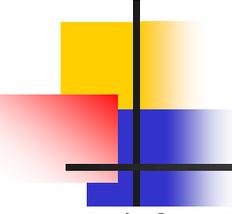
負帰還回路発明の動機

せっかくトランジスタを使って増幅するのに
その増幅度を制限してしまう
長距離電話網で、
「真空管が切れても動くrepeater を作れ」の要請。

Harold S. Black 1898-1983

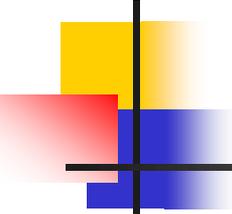
1920年 Western Electric 社 電話産業

電話伝送システムの改善



フィードフォワード増幅器

増幅器の出力から歪みを取り去ることを考えだす。
原因が非直線性であれ、真空管のゲインの変化であれ、
それを取り出して除去することを追求。
出力から入力と同じ振幅で引き算。
そのためには歪みを別の増幅器を通して、
出力でキャンセルする。
出力側のトランスカブリッジ回路で加えて取り除く回路。
実験では歪みは従来の40dB 減となる。
この方式をフィードフォワード増幅器と名づけ特許出願。
が、この方法では一日中誰かが調整しなければならない。



負帰還のアイデアと実現

1927年8月2日のこと、突然、ブラックに負帰還のアイデアがひらめいた。

ニュージャージーからニューヨークへ通勤するフェリーボートの中で、

増幅器の出力を入力に、逆相でもどし、

出力から歪みをキャンセルする方法を思いつく。

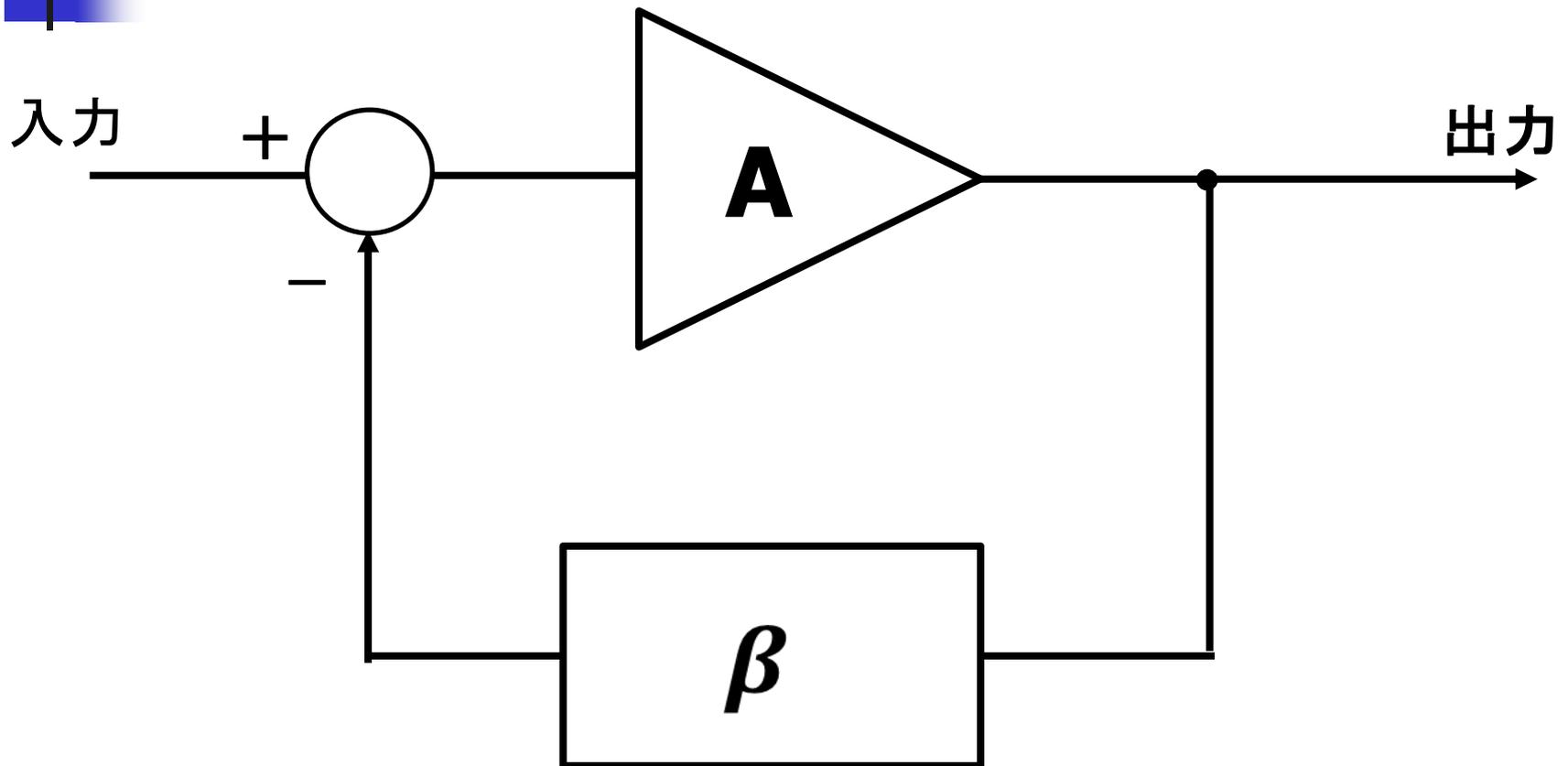
Harold Black 氏の負帰還増幅回路を思いついた際の記述

“ Then came the morning of Tuesday, August 2, 1927, when the concept of the negative feedback amplifier came to me in a flash while I was crossing the Hudson River on the Lackawanna Ferry, on the way to work. For more than 50 years I have pondered how and why the idea came, and I can ' t say any more today than I could that morning.

All I know is that after several years of hard work on the problem, I suddenly realized that if I fed the amplifier output back to the input, in reverse phase, and kept the device from oscillating (singing, as we called it then), I would have exactly what I wanted: a means of canceling out the distortion in the output. I opened my morning newspaper and on a page of *The New York Times*. I sketched a simple diagram of a negative feedback amplifier plus the equations for the amplification with feedback. I signed the sketch, and 20 minutes later, when I reached the laboratory at 463 West Street, it was witnessed, understood, and signed by the late Earl C. Bleassing.

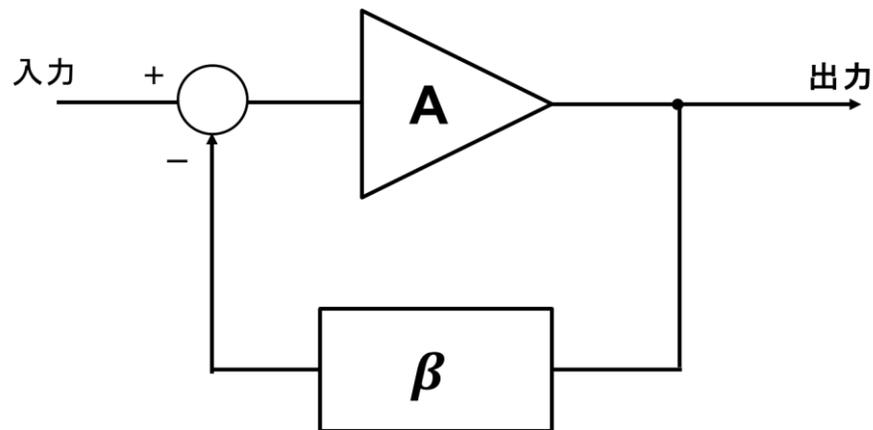
I envisioned this circuit as leading to extremely linear amplifiers (40 to 50 dB of negative feedback), but an important question is: How did I know I could avoid self-oscillations over very wide frequency bands when many people doubted such circuits would be stable? My confidence stemmed from work that I had done two years earlier on certain novel oscillator circuits and three years earlier in designing the terminal circuits, including the filters, and developing the mathematics for a carrier telephone system for short toll circuits. ”

負帰還増幅回路



入力に出力を逆相で戻す

負帰還の効果1



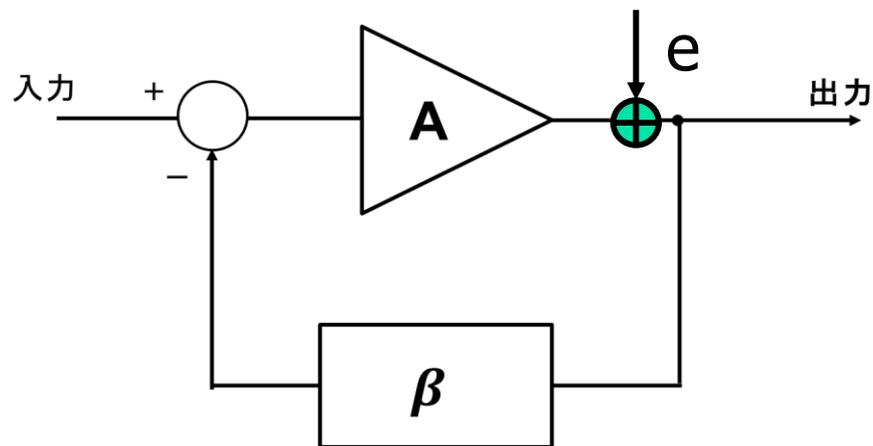
- 回路の利得は減衰器のみで決定 ($A \approx \infty$ の時)

$$G \approx \frac{1}{\beta}$$



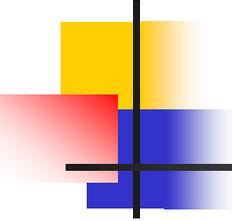
増幅器の特性変動に左右されない

負帰還の効果2



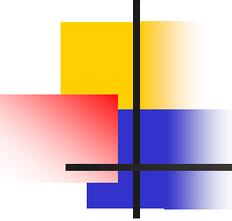
- 増幅器出力のひずみ(e)を低減

$$\text{出力: } V_{out} \approx \frac{A}{1+A\beta} V_{in} + \frac{e}{1+A\beta}$$



その後の発展

数年後にはナイキスト
が負帰還増幅器の不安定をさける手法を解析し、
ボード (Heinrich Bode、1905 — 1982) が
システム的手法を編み出した。
ようやく負帰還回路の理論が確立したことになる。
やがて、ベル研究所長のKelly の言うように、
「負帰還はあらゆる目的につかわれる増幅器に
採用されるだろう」は現実のものとなっていく。



演算増幅器の歴史

演算増幅器

(オペアンプ, operational amplifier) は
アナログの基本

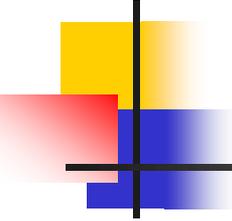
Operation Amplifier



Operational amplifier の用語はコロンビア大学の
ジョン・ラガツィーニ (John Ragazzini) 教授により
1947 年に公表された論文で初めて使用。
複数の入力電圧にて、数学的な演算 (Operation)
が可能である増幅器 (Amplifier) を
Operational amplifier と定義。

(J. Ragazzini は

R. E. Kalman, E. I. Jury, L. A. Zadeh 等の師)



演算増幅器の使用法

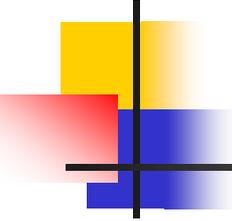
演算増幅器を応用する際には、
ほかの素子と組み合わせて
所望の機能を実現する。

素子の接続方式で分類

負帰還の応用： 増幅器, レギュレータ

正帰還の応用： 発振回路、ヒステリシスコンパレータ

帰還なしの場合： コンパレータ

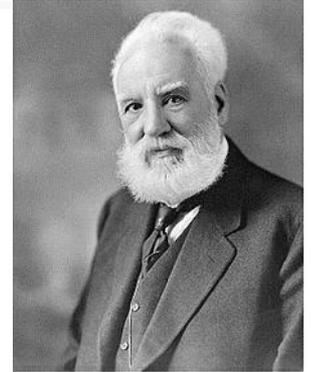


演算増幅器と負帰還

- 演算増幅器の応用のほとんどは、負帰還を利用したもの。
- 演算増幅器と負帰還を組み合わせた負帰還増幅器
 - 増幅器の性能を大幅に向上。
 - 1927年にハロルド・ブラック氏により発明。
- 負帰還増幅器の不適切な設計は、発振のような不安定な動作を引き起こす。
- 適切な設計法の理論がない。
- そこで、実用的な負帰還増幅器を設計するため、ナイキストの安定判別法 (Nyquist criterion) ボーデ線図 (Bode plots) が考案された。

アレクサンダー・グラハム・ベル

Alexander Graham Bell 1847-1922



- スコットランド(エジンバラ) 生まれ
- 科学者、発明家、工学者
- 実用的電話の発明
- 光無線通信、水中翼船、航空工学等の分野で業績
- 1877年 ベル電話会社を設立

「ベルが電話を発明したとき、市場調査などしたか。」
(Steve Jobs, Apple社)

グリエルモ・マルコーニ

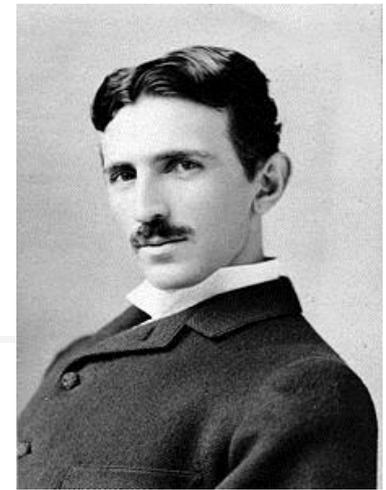
Guglielmo Marconi 1874-1937



- 伊の無線研究家、無線電信の開発で知られる。
- マルコーニ無線電信会社を創立。
- ノーベル物理学受賞（無線通信発展に貢献）
- 無線電信システム開発で革新的原理を発見したわけではなく、個々の部品を改良・組み合わせてシステムを構築・長距離無線中心を成功 との評価
- 太平洋横断無線通信への寄与
- タイタニック号遭難時に同社社員が救難信号送信

ニコラ・テスラ

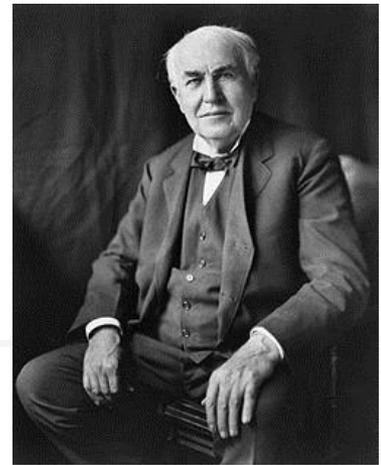
Nikola Tesla 1856-1943



- オーストリア帝国(現 クロアチア)の電気技師、発明家。
- 交流電流、ラジオ、無線トランスミッター、蛍光灯
空中放電実験で有名なテスラコイルなど多数の発明
- 世界無線送電システムを提唱
- エジソンと直流送電、交流送電で確執
- 磁束密度の単位「テスラ」にその名を残す

トーマス・アルバ・エジソン

Thomas Alva Edison 1847-1931



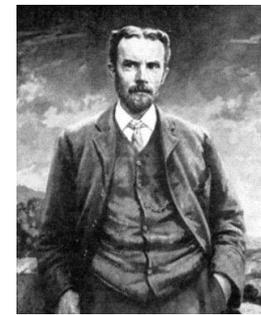
- アメリカ合衆国の発明家、起業家
- 約1,300もの発明
- 人々の生活を一変させる重要な発明を多数
蓄音器、白熱電球、活動写真等
- 発電から送電までを含む電力システムの事業化に成功
- Edison General Electric Company（現在のGE社）の
設立者

Genius is one percent inspiration, 99 percent perspiration.

(天才は1%のひらめきと99%の汗)

オリヴァー・ヘヴィサイド

Oliver Heaviside 1850 - 1925



- イギリスの電気技師、物理学者、数学者
- 電気回路での複素数の導入
インピーダンスの概念の導入、
「ヘヴィサイドの演算子法」の開発
- インダクタンスやコンダクタンスなど、
回路理論用語のいくつかを提唱
- ベクトル解析とベクトル演算を発明
- マクスウェル方程式： 当時は20の式から構成
現在の4つのベクトル形式の式に直す

エドウィン・ハワード・アームストロング

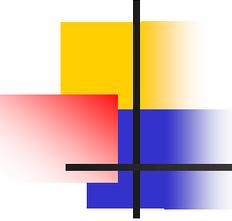
Edwin Howard Armstrong

1890 - 1954



EDWIN H. ARMSTRONG
1890-1954

- アメリカの電気工学研究者
- 周波数変調 (FM) の発明者
- コロンビア大学工学部で学び、後に同大学教授。
- コロンビア大学で電気工学の学士号取得(1913年)後、1954年に他界するまで同校で研究を行なう。
- 学生だった1914年に再生回路(regenerative circuit)の特許を取得。
- その後もスーパーヘテロダイン方式、超再生回路、周波数変調を発明。



付録

ピタゴラス Pythagoras

前582年 - 前496年



古代ギリシアの数学者、哲学者

万物の根源は、数である

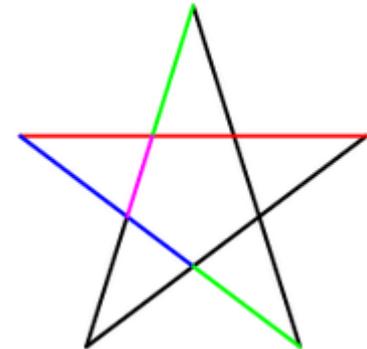
無理数の存在を否定していた。ピタゴラスの定理によって算出される $\sqrt{2}$ は無理数

ピタゴラス教団：

シンボルマークの五芒星に現れる

黄金比も無理数。

「多くの言葉で少しを語るのではなく、
少しの言葉で多くを語りなさい」



ソクラテス Σωκράτης

前469年頃 - 前399年



古代ギリシャの哲学者

「はかない人間ごときが世界の根源・究極性を知ることなどなく、神々のみがそれを知る、人間はその身の丈に合わせて節度を持って生きるべき」

「無知の知」 私に分かっていることは、

私が知らないということだを背景とした

「知っていることと知らないこと」「知り得ることと知り得ないこと」の境界を巡る、当時としては異常なまでの探究心・執着心、節制した態度

汝、自身を知れ。勉学は光であり、無学は闇である。

Philosophia 「智を愛する」

プラトン Platon

前427年 - 前347年



古代ギリシアの哲学者

ソクラテスの弟子 アリストテレスの師

イデア論

アカデミア

「西洋哲学の歴史とはプラトンへの膨大な注釈である」

哲学者ホワイットヘッド

驚きは、知ることの始まりである。

アカデミア Akadēmeiā



- アカデメイア: 古代ギリシアのアテナイ北西部郊外にあった英雄アカデモスの聖林に因む神域
- 紀元前387年、プラトンがこの地に学園を開設
- 地名「アカデメイア」が学園名として継承。
- アカデメイアが学校として有名。

ネオプラトニズムの隆盛。

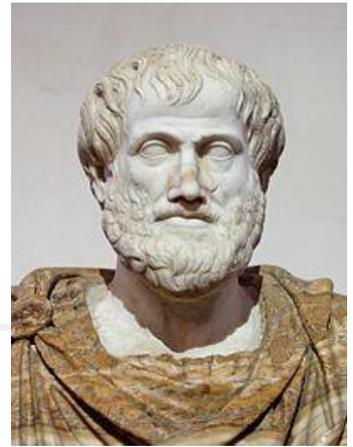


高度な研究/教育機関をアカデミー (academy)

- 入り口の門の額 「幾何学を知らぬ者、くぐるべからず」
最古の大学入学条件

アリストテレス

Aristotélēs 前384年-前322年



- 古代ギリシアの哲学者
- プラトンの弟子,
- アレクサンドロス大王の家庭教師
- 多岐にわたる自然研究の業績から「万学の祖」
- 特に動物に関する体系的な研究
- 膨大な著作
- イスラム哲学, 中世スコラ学、近代哲学論理学に多大な影響
- 名前の由来: ギリシア語の **aristos** (最高の) と **telos** (目的)

「世の中が必要としているものと
自分の才能が交わっているところに 天職がある。」

ユークリッド Euclid

紀元前3世紀? -



- 古代ギリシアの数学者、天文学者
エウクレイデスはギリシア語で「よき栄光」の意
『原論』(ユークリッド原論)の著者、「幾何学の父」
- ユークリッド幾何学の体系を少数の公理系から構築
線の定義「線は幅のない長さである」、「線の端は点である」
- 平面・立体幾何学、整数論、無理数論などの公理的方法で構成
- 『原論』には**数論**も記述。
完全数とメルセンヌ数の関係、素数が無限に存在する、
因数分解についてのユークリッドの補題、ユークリッドの互除法
- プトレマイオス1世「幾何学を学ぶのに『原論』よりも近道はないか？」
「幾何学に王道なし」There is no royal road to geometry と答える。

ルネ・デカルト

René Descartes 1596 - 1650



- フランス生まれの哲学者、数学者。合理主義哲学の祖 「方法序説」
- もっとも単純な要素から始め演繹していけば最も複雑なものに達しうる。
 - 1) 明証的に真であると認めたもの以外、決して受け入れないこと。(明証)
 - 2) 考える問題を出来るだけ小さい部分に分けること。(分析)
 - 3) 最も単純なものから始めて複雑なものに達すること。(総合)
 - 4) 何も見落とさなかったか、全てを見直すこと。(枚挙 / 吟味)
- 2つの実数によって平面上の点の位置を表すという方法(座標)を考案
→ デカルト座標、デカルト平面
- 我思う、ゆえに我あり I think, therefore I am.
- 難問は、それを解くのに適切かつ必要なところまで分割せよ
Divide each difficulty into as many parts as is feasible and necessary to resolve it.

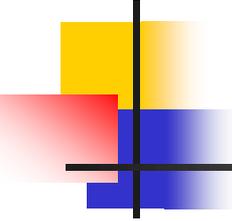
フランシス・ベーコン

Francis Bacon 1561 - 1626



- イギリスの哲学者、神学者、法学者
- 近代的な帰納法の創始者
- 学問を確固たる実証の手続きで基礎付けようとした。
- 近代科学の精神を体現した最初の思想家
- イギリスではベーコン以後経験を重視する学問が栄える。

- 「知識は力なり」 Knowledge is power.
- 「最上の証明とは経験である」 The best proof is experience.



物理学は実験科学である

- 「質量保存則が成立する」
質量保存則に反する事実が観測されていない、測定誤差範囲内で実験的に質量保存則が成立しているということ。
- 実際、現在も(使用できる最高精度の計測技術を用いて)質量保存則が成立するかの検証実験が続けられている。
- ニューロンカ学、マックスウェル電磁気学では説明できない現象が観測されてアインシュタイン相対性理論が生まれた。

ヨハネス・ケプラー

Johannes Kepler 1571 - 1630

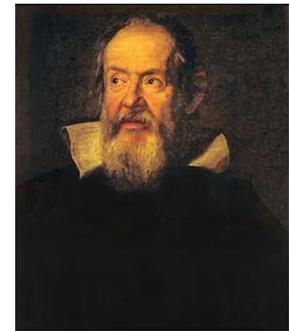


- ドイツの天文学者。天体の運行法則に関する「ケプラーの法則」理論的に天体の運動を解明
- 大観測家ティコ・ブラーエ (1546-1601) の助手・共同研究者。ティコは、1576年から1597年の21年間、デンマークのヴェン島にウラニボリ天文台を建設・天空の観測。プラハでも観測を続けた。
- 正確で膨大な観測データはケプラーの手に入り、ケプラーの法則発見の基礎。
- 「新天文学 (Astronomia Nova)」を執筆。「ケプラーの法則」の第1と第2法則もこの論文に記される楕円運動を基本とする天体論を唱えた。

「悦びは人生の要素であり、人生の欲求であり、
人生の力であり、人生の価値である」

ガリレオ・ガリレイ

Galileo Galilei 1564 - 1642



- イタリアの物理学者、天文学者、哲学者。パドヴァ大学教授
- 望遠鏡を最も早くから取り入れる。
- 観察結果から地動説 『天文対話』を著す。
- 振り子の等時性
- 落体の法則を発見。

物体の自由落下の時間は、落下物体の質量に依存しない。

物体落下での落ちる距離は、落下時間の2乗に比例

- 論文・著書読者に同一の実験を促し検証させ、
自説の正しさを証明するという手段をとる。

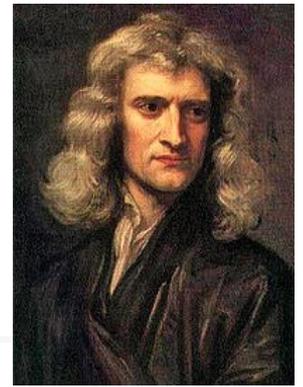
あらゆる真実は一度発見されれば理解するのは容易だ。

肝心なのは真実を発見することだ。

人にものを教えることはできない。みずから気づく手助けができるだけだ。

アイザック・ニュートン

Isaac Newton 1642- 1727



- 「創造的休暇」

1665年から1666年にかけて2度、故郷のウールズソープでケンブリッジ大学での着想を自由に思考する時間を得た

- 「自然哲学の数学的諸原理(プリンキピア)」

幾何学的証明

万有引力の法則、運動方程式

古典力学(ニュートン力学)を創始。天体の運動を解明。

- 微積分法を発明。

- 光のスペクトル分析の業績、ニュートン式反射望遠鏡の製作

- 「われ仮説を作らず」

観測できる物事の因果関係を示すという哲学・解釈を展開

- 「私が遠くを見ることができたのは、

巨人たちの肩に乗っていたからである。」

ジェームズ・クラーク・ マクスウェル

James Clerk Maxwell 1831 -1879



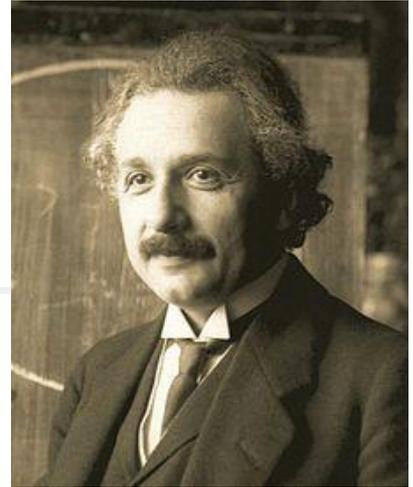
- イギリスの理論物理学者
- マイケル・ファラデーの電磁場理論をもとに
1864年 マクスウェルの方程式を導出
→ 古典電磁気学を確立。
- 電磁波の存在を理論的に予想。
伝播速度が光速と同じ、横波であることを示す。
- 土星の環、気体分子運動論、熱力学、統計力学
などの研究

「マクスウェルの悪魔」

→ 熱力学、統計力学、情報科学の根本問題

アルベルト・アインシュタイン

Albert Einstein 1879 - 1955



ドイツ生まれの理論物理学者

- 天才とは努力する凡才のことである。
- 挫折を経験した事がない者は、何も新しい事に挑戦したことが無いということだ。
- 6歳の子供に説明できなければ、理解したとは言えない。
- 人の価値とは、その人が得たものではなく、その人が与えたもので測られる。
- 一見して馬鹿げていないアイデアは、見込みがない。