

# 通信用AD変換器 テスト評価のための マルチトーン・カーブフィッティング アルゴリズム

○本木義人、菅原秀武、小林春夫  
群馬大学 工学部 電気電子工学科

小室貴紀、酒寄寛  
アジレント・テクノロジー（株）

# 発表内容

1. 研究目標
2. 単一サイン・カーブ・フィッティング・  
アルゴリズム
3. マルチトーン・カーブ・フィッティング・  
アルゴリズム
  - 既知入力周波数の場合
  - 未知入力周波数の場合
4. まとめ

# 1. 研究目標

# 研究背景

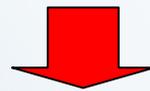
高性能アナログ集積回路ではテスト技術が非常に難しく重要になってきている。

一部のアナログ集積回路では、設計よりもテストにコストがかかる。

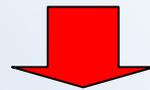
テスト技術にミクスドシグナルLSIテスターメーカーと共同研究でとりくむ。

# 研究目標

携帯電話の受信部等に用いられる  
通信用AD変換器では、  
周波数領域性能が重要。



マルチトーン・テスト法が使用される。



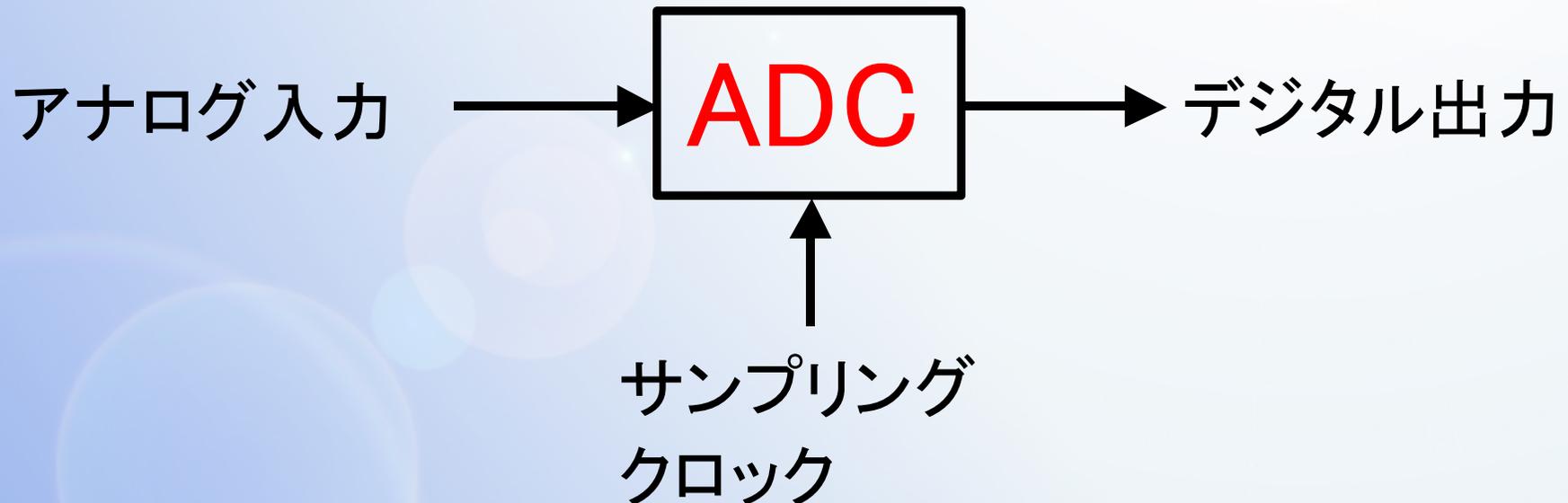
高精度評価アルゴリズムを開発する。

マルチトーン・カーブ・  
フィッティング・アルゴリズム

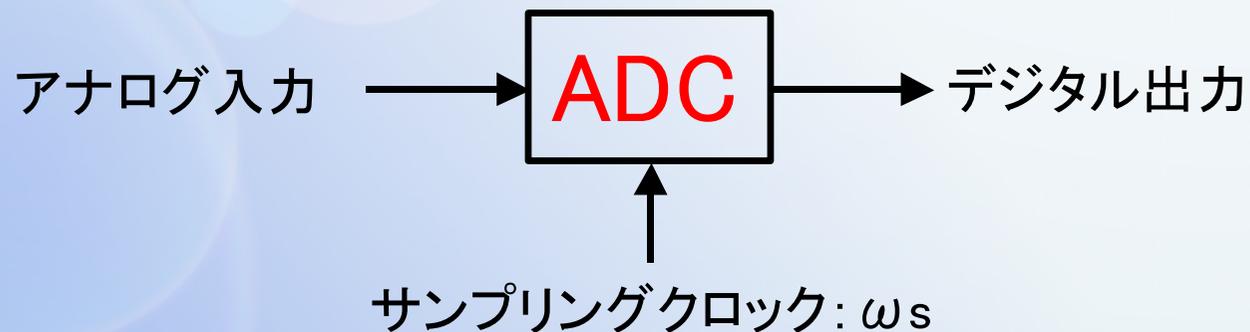
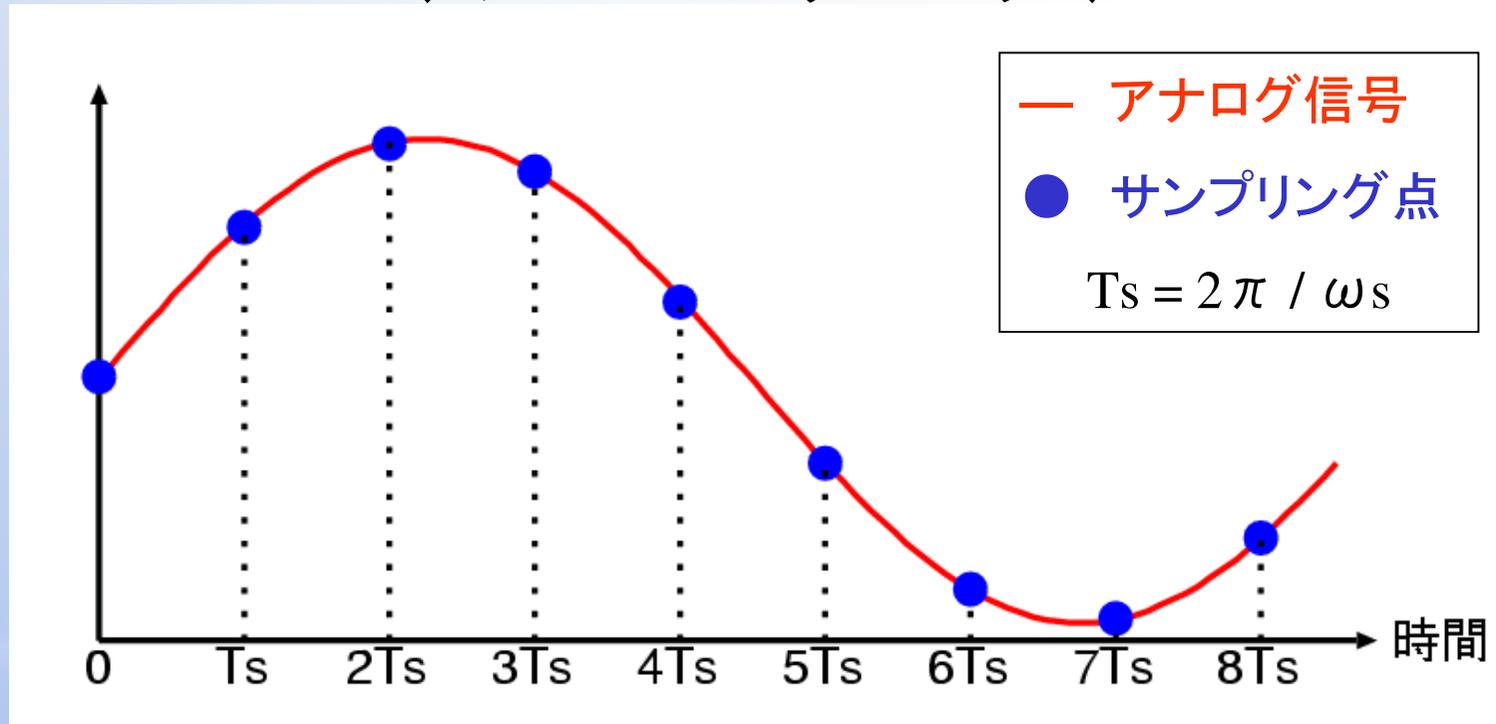
## 2. 単一サイン・カーブ・ フィッティング・アルゴリズム

# AD変換器の動作

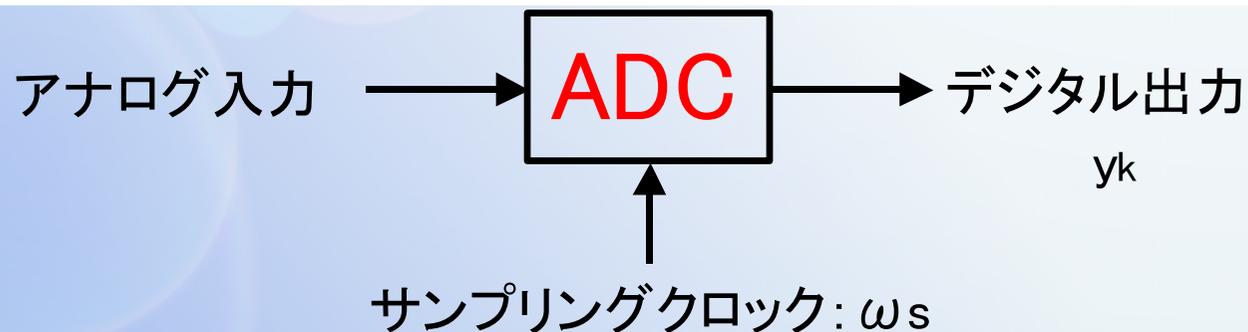
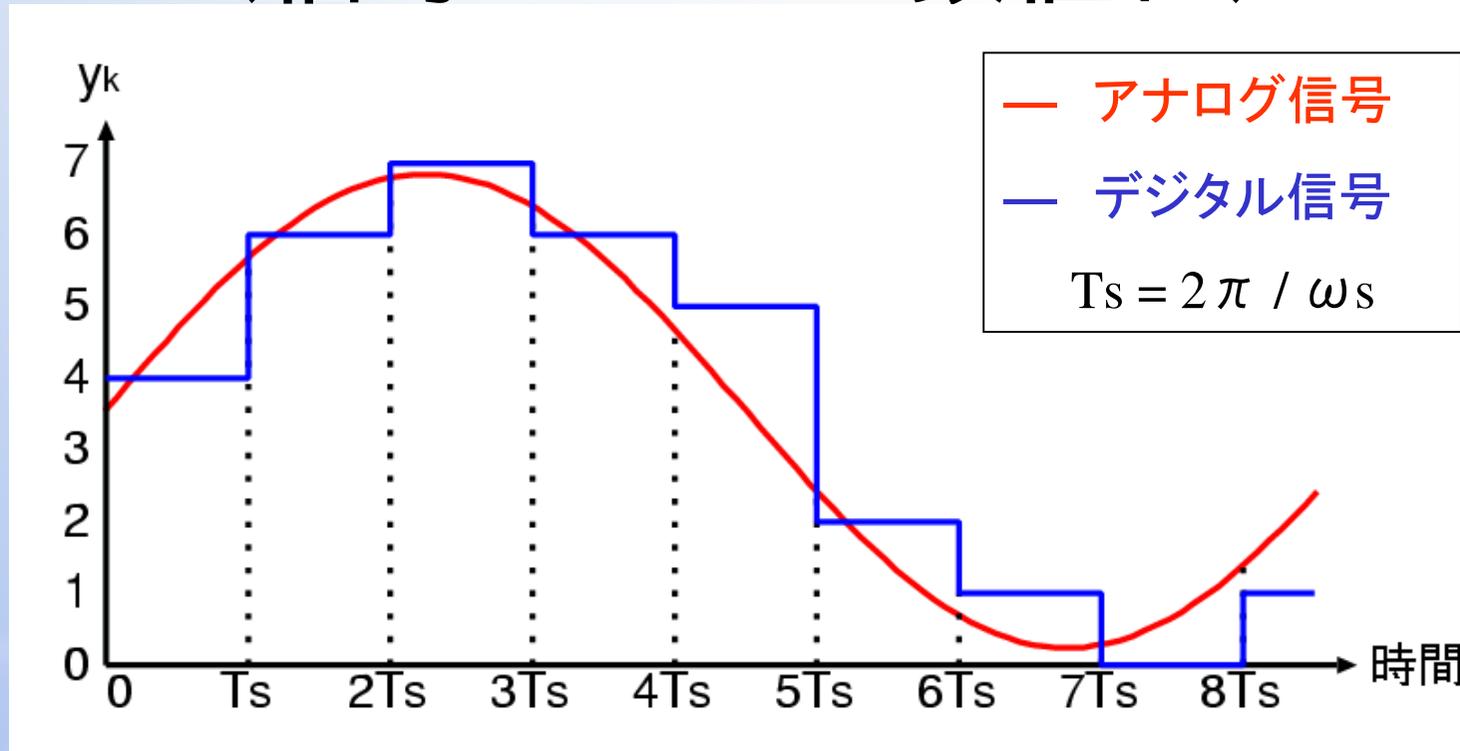
アナログ信号（電波、音声、電圧、電流等）を  
デジタル信号（0, 1, 1, 0, ...）に変換する。



# 時間の量子化 (サンプリング)



# 空間の量子化 (信号レベルの数値化)



# 単一正弦波入力を用いたADC評価

## 特徴

- ・高精度正弦波は電氣的に発生しやすい。
- ・低周波から高周波入力に対してSNR評価が可能。
- ・確立された技術。

## 評価アルゴリズム

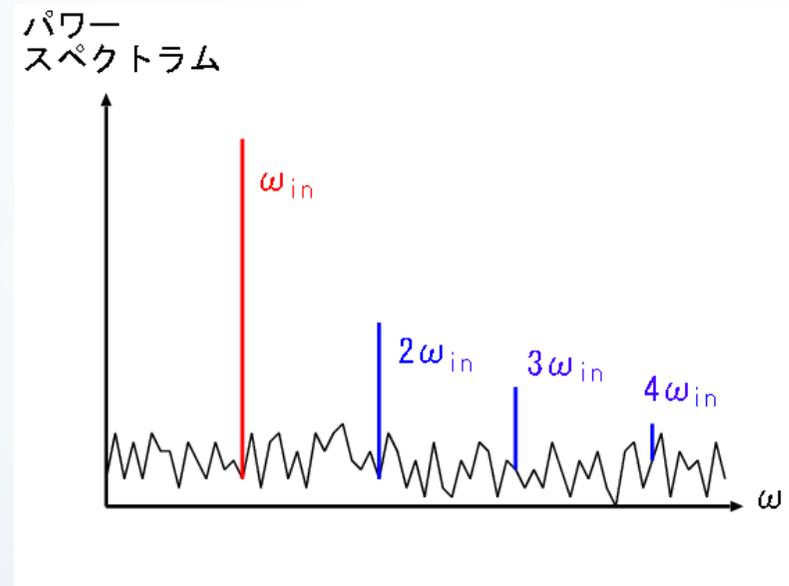
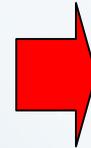
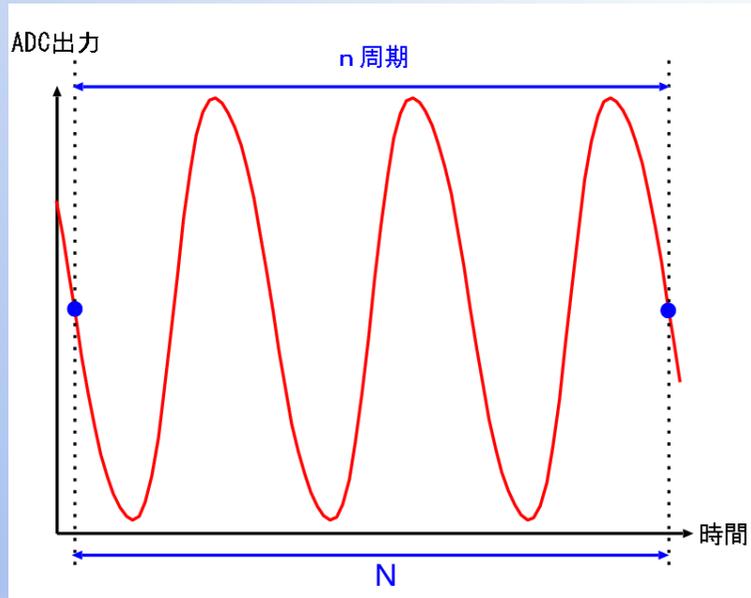
### FFT法：

窓関数必要の場合あり（評価精度劣化）

### サイン・カーブ・フィット法：

窓関数不要（評価精度良）

# ADCの評価アルゴリズム (FFT法)



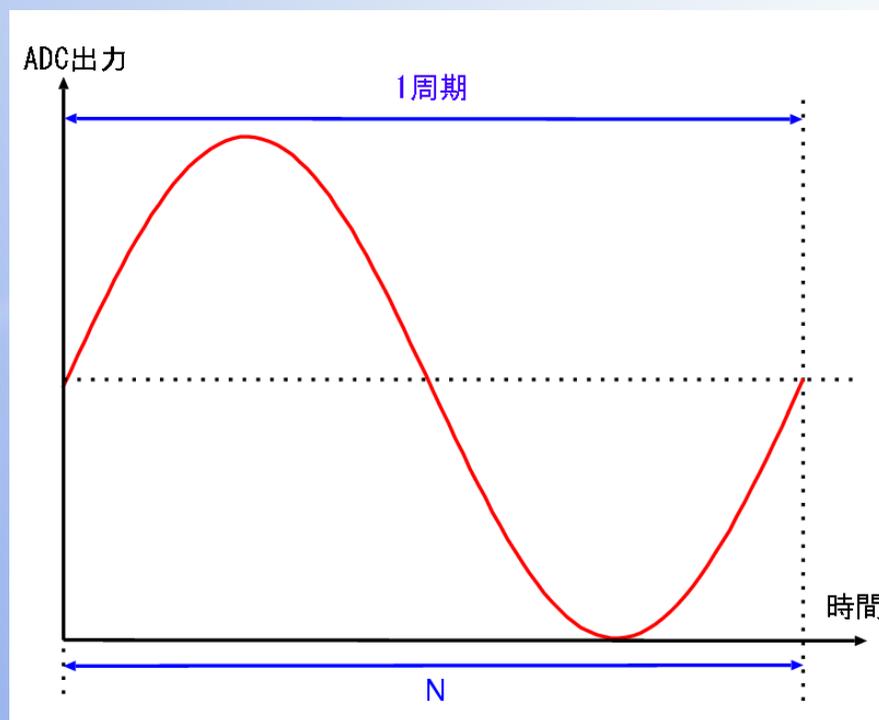
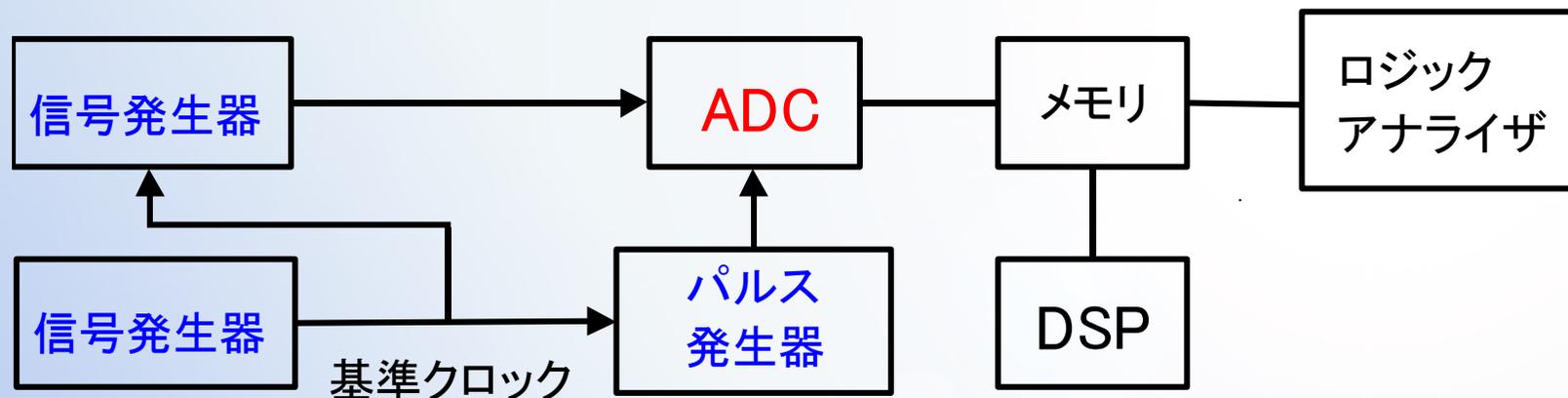
入力周波数 :  $\omega_{in}$

サンプリング周波数 :  $\omega_s$

データ点数 : N

SNR、高調波歪みの評価に  
用いられる。

# FFT法の問題点

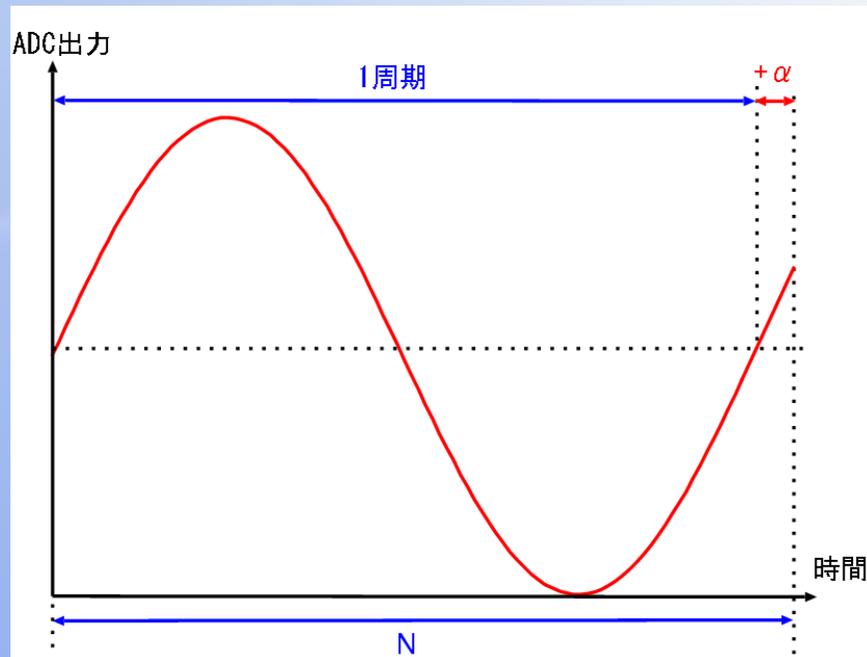
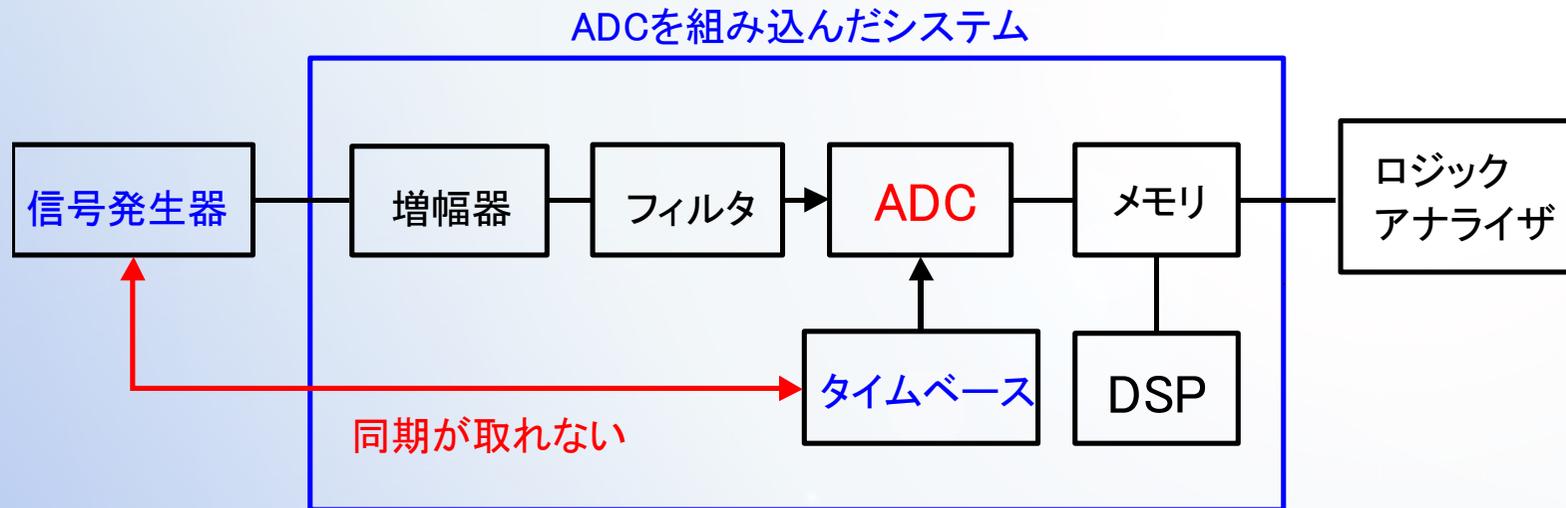


N点FFT

$\omega_{in}/\omega_s = n/N$ の場合  
( $n=1, 2, 3, \dots$ ) :

窓関数不要

# FFT法の問題点



## N点FFT

$\omega_{in}/\omega_s \neq n/N$ の場合

( $n=1, 2, 3, \dots$ ) : 窓関数必要

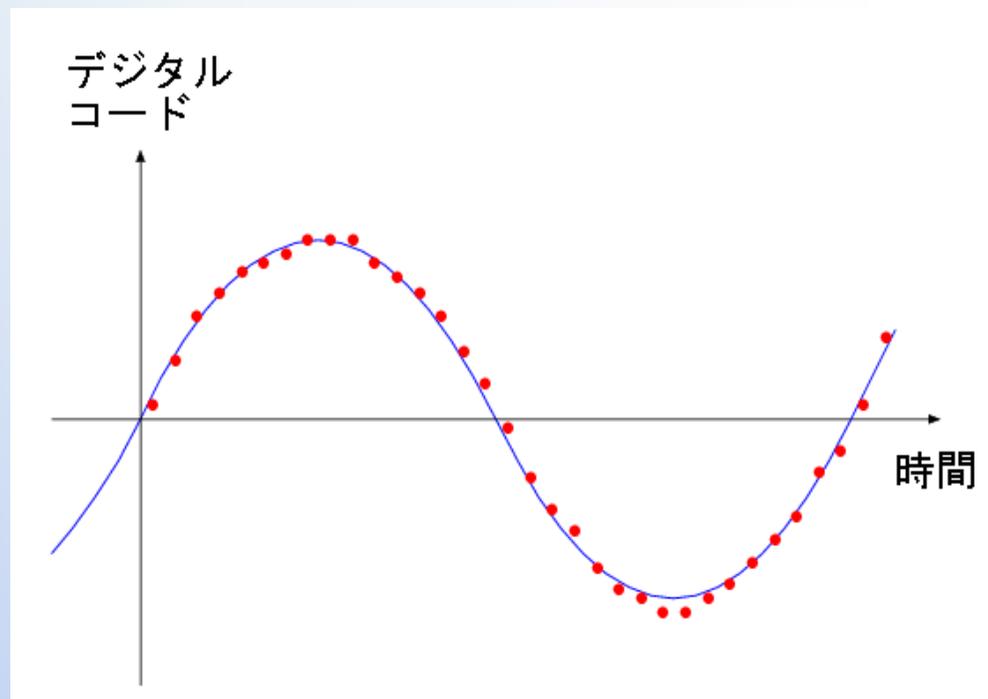
窓関数を使用すると

周波数スペクトルが広がる。



評価精度劣化

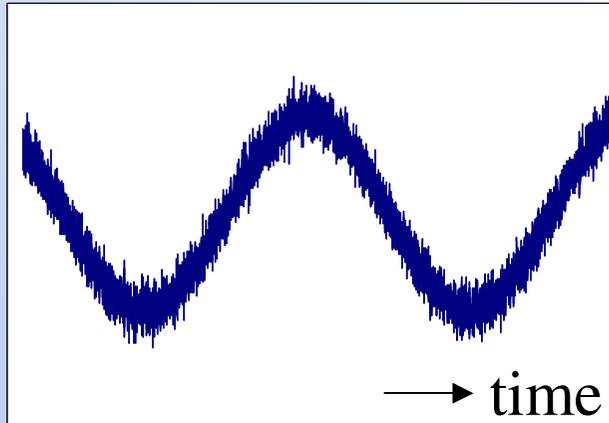
# サインカーブ・フィッティング・ アルゴリズム



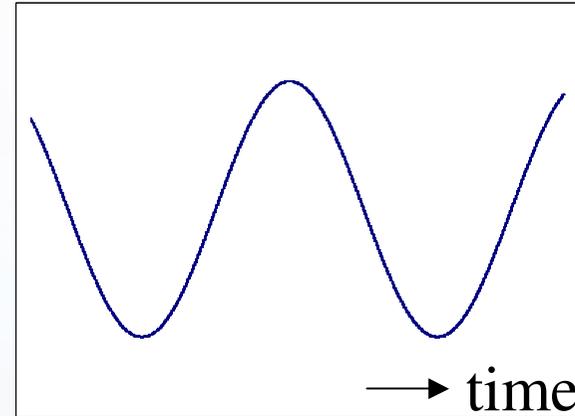
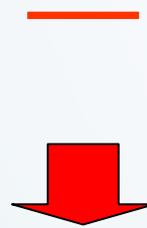
サイン波入力に対するADC出力（点）から、  
サイン波（実線）を推定する。

窓関数不要 → 高精度な性能評価が可能

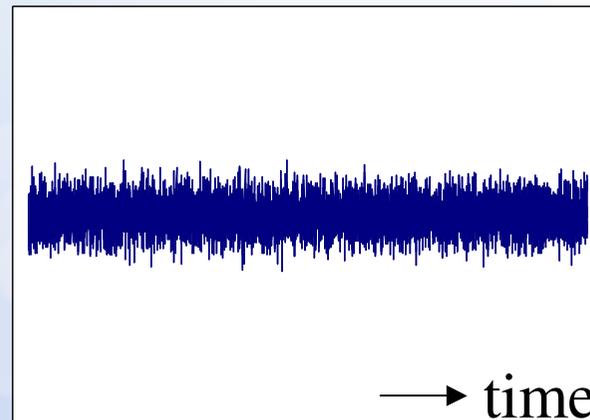
# サインカーブフィットを用いた 歪みとノイズ成分の求め方



ADC出力データ



推定データ



歪みとノイズ成分

ADC出力データから推定データを減算すると  
歪みとノイズ成分が求められる。

# サインカーブ・フィッティング・ アルゴリズム (入力周波数 $\omega$ が**既知**の場合)

ADC出力データ :

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}$$

最小二乗規範より、  
**A,  $\theta$ , C** を最適推定する。

$$\varepsilon := \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - \{A \cos(\omega k + \theta) + C\}]^2 \Rightarrow \min$$

# サインカーブ・フィッティング・ アルゴリズム (入力周波数 $\omega$ が未知の場合)

ADC出力データ :

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}$$

最小二乗規範より、

**A**,  **$\omega$** ,  **$\theta$** , **C**を最適推定する。

$$\varepsilon := \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - \{A \cos(\omega k + \theta) + C\}]^2 \Rightarrow \min$$

# 4. マルチトーン・カーブ・ フィッティング・アルゴリズム

# [1]. マルチトーンADC テストティング背景

# 通信用AD変換器

周波数領域での性能が重要。

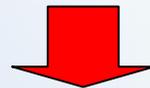
- ・ 相互変調歪み (IMD)
- ・ ノイズパワー比 (NPR)



複数の周波数の正弦波の和の信号  
(  $\sum_{l=1}^n A_l \cos(\omega_l t + \theta_l) + C$  ) を入力し、  
マルチトーン・テスト法を使用する。

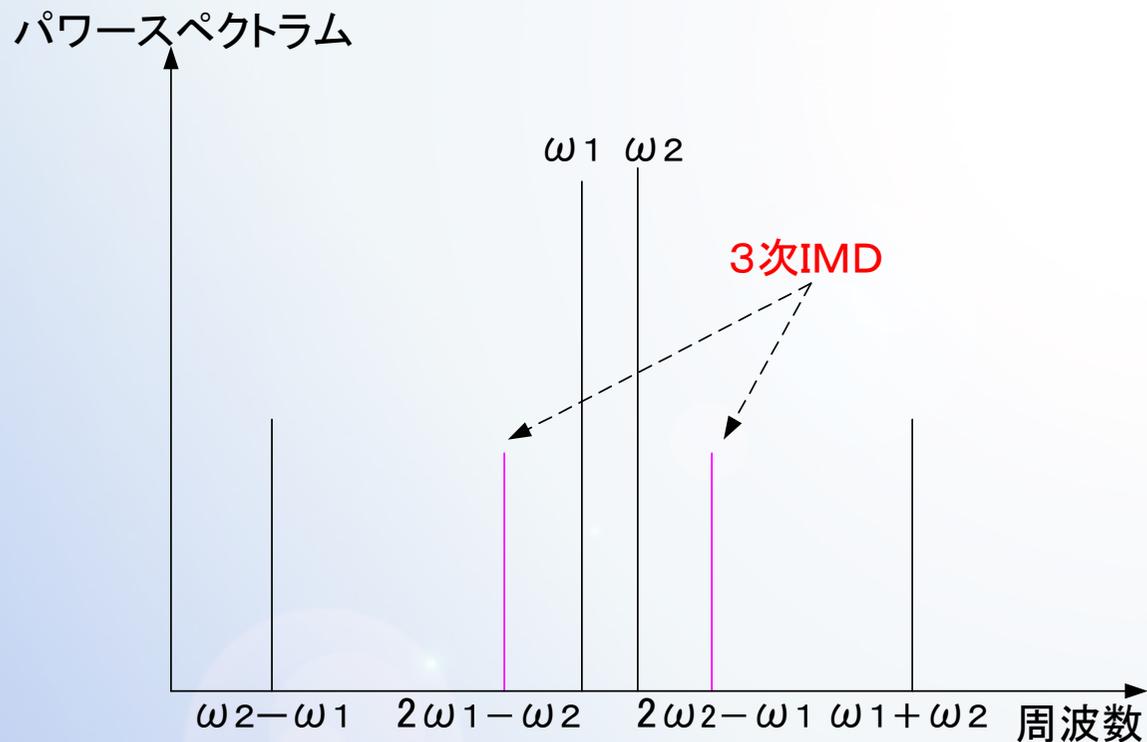
# ADCテストティングにおける IMD評価技術の現状

- ①マルチトーン信号を生成する基準信号発生器が無い。
- ②IMDを評価する良い評価アルゴリズムが無い。



本研究では新しい評価アルゴリズムを開発する。

# 相互変調歪み (IMD)



入力信号  $A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$

入力周波数  $\omega_1 \approx \omega_2$  の場合、

3次IMD成分  $2\omega_1 - \omega_2$ ,  $2\omega_2 - \omega_1$  が

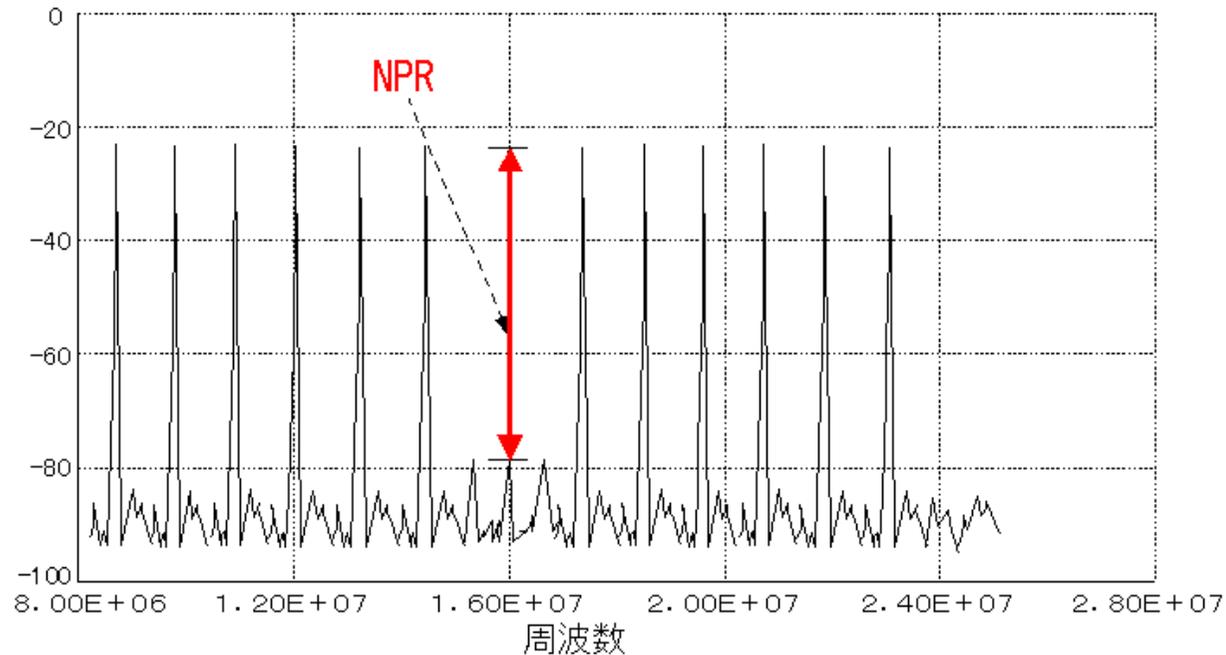
信号帯域に入り込む。



3次IMD成分の評価が特に重要。

# ノイズパワー比 (NPR)

パワースペクトラム



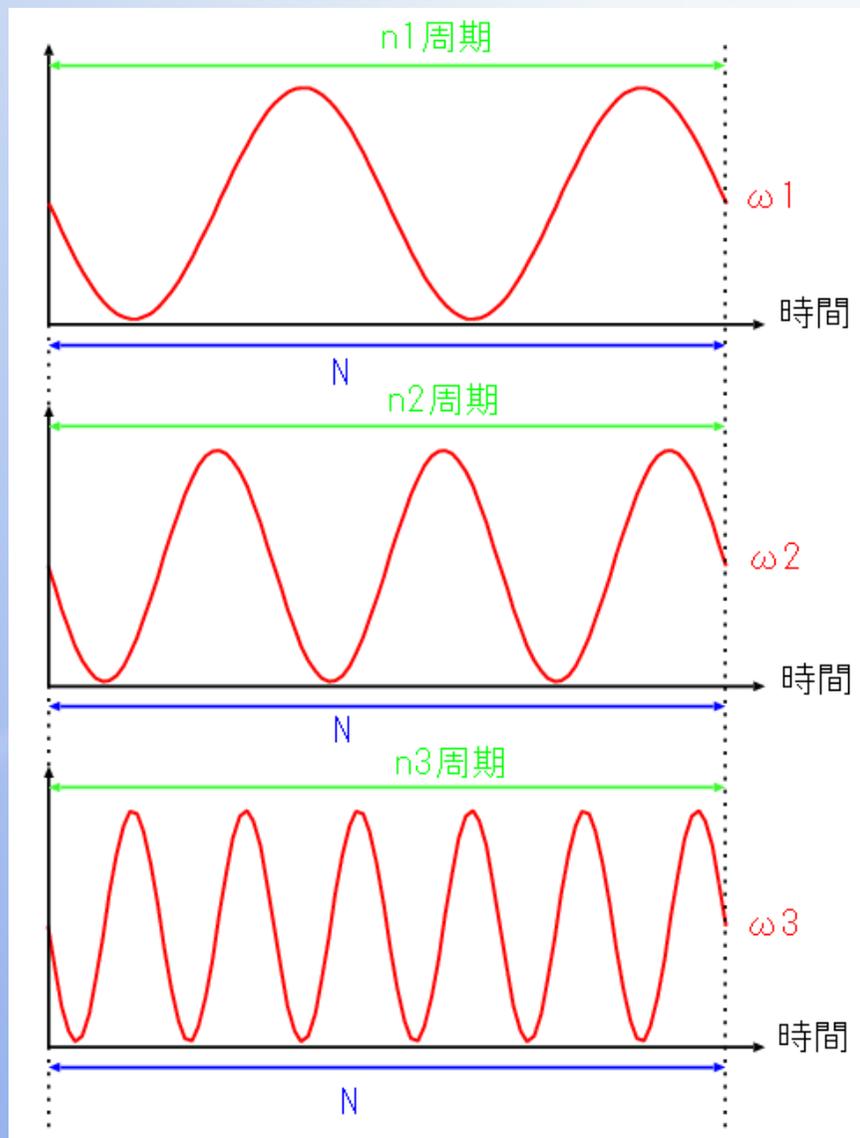
振幅の等しいアクティブチャンネルの間に、  
空のチャンネルをもった信号を入力すると、  
相互変調歪みが空のチャンネルに回りこむ。

ADSL用ADC評価で必要。

# マルチトーン・カーブ・ フィッティング・アルゴリズム の開発動機

- ・ 通信用ADCでは  
相互変調歪み、ノイズパワー比等の  
周波数領域の解析が必要。
- ・ 多数の異なる周波数が混在した  
正弦波入力での評価が必要。
- ・ 出力データをFFTで解析する方法では不十分。

# マルチトーンテストでの FFT法の問題点



N点FFT

$$\omega_1 / \omega_s = n_1 / N,$$

$$\omega_2 / \omega_s = n_2 / N,$$

$$\omega_3 / \omega_s = n_3 / N, \dots$$

のすべてを満たす場合：

窓関数不要



この条件を満たすのは困難。

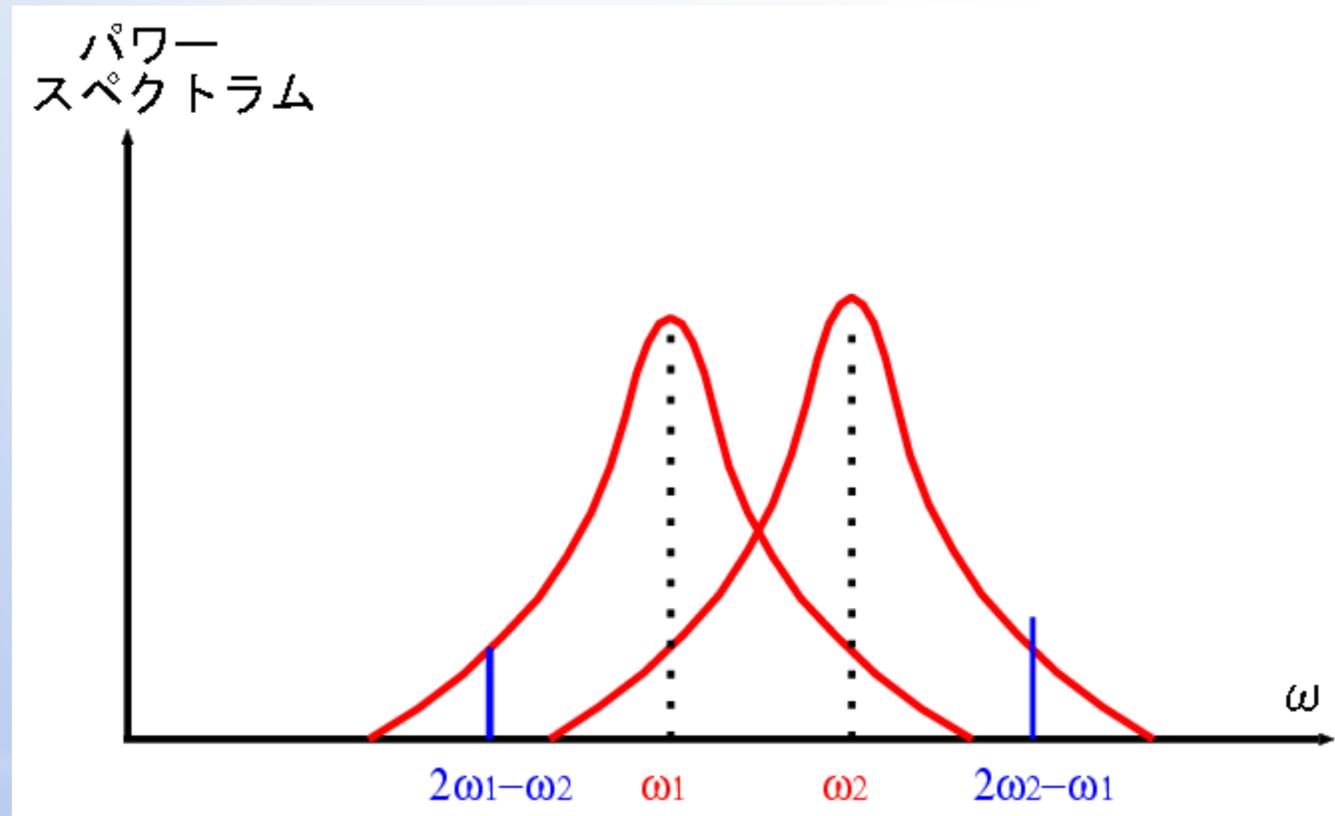


窓関数必要



評価精度劣化

# 3次IMD評価



窓関数を用いるとスペクトルが広がる。



3次IMDの評価が困難になる。

## [2]. 入力周波数が**既知**の場合

# マルチトーン・カーブ・ フィッティング・アルゴリズム

ADC出力データ :

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1}$$

最小二乗規範により、

**$A'_1, A'_2, \dots, A'_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, C$**

を最適推定。

$$\varepsilon := \sum_{k=0}^{N-1} \left[ y_k - \left\{ \sum_{l=1}^n A'_l \cos(\omega_l k + \theta_l) + C \right\} \right]^2 \Rightarrow \min$$

# アルゴリズムの導出

最小二乗規範を用いる。

$$\begin{aligned}\varepsilon &:= \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - m_k] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - A_1 \cos(\omega_1 k) - B_1 \sin(\omega_1 k) - A_2 \cos(\omega_2 k) - B_2 \sin(\omega_2 k) \\ &\quad - \dots - A_n \cos(\omega_n k) - B_n \sin(\omega_n k) - C]^2 \rightarrow \min\end{aligned}$$

最小二乗誤差 “ $\varepsilon$ ” を最適推定したい  
各パラメータで各々偏微分を行い、  
( $2n+1$ ) 元1次の連立方程式を組む。

# アルゴリズムの導出

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon}{\partial A_1} = 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial B_1} = 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial A_2} = 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial B_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial A_n} = 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial B_n} = 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \alpha_{k1} = A_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1}^2 + B_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{k1} + A_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \alpha_{k2} + B_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{k2} + \dots + A_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \alpha_{kn} + B_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{kn} + C \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \beta_{k1} = A_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{k1} + B_1 \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1}^2 + A_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{k1} + B_2 \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \beta_{k2} + \dots + A_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{k1} + B_n \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \beta_{kn} + C \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \alpha_{k2} = A_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \alpha_{k2} + B_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{k1} + A_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2}^2 + B_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{k2} + \dots + A_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \alpha_{kn} + B_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{kn} + C \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \beta_{k2} = A_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{k2} + B_1 \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \beta_{k2} + A_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{k2} + B_2 \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k2}^2 + \dots + A_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{k2} + B_n \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k2} \beta_{kn} + C \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k2} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \alpha_{kn} = A_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \alpha_{kn} + B_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{k1} + A_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \alpha_{kn} + B_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{k2} + \dots + A_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn}^2 + B_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{kn} + C \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \beta_{kn} = A_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{kn} + B_1 \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \beta_{kn} + A_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{kn} + B_2 \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \beta_{kn} + \dots + A_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{kn} + B_n \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{kn}^2 + C \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{kn} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k = A_1 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} + B_1 \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} + A_2 \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} + B_2 \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k2} + \dots + A_n \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} + B_n \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{kn} + CN \end{cases}$$

ここで、 $\begin{cases} \alpha_{kj} = \cos(\omega_j k) \\ \beta_{kj} = \sin(\omega_j k) \end{cases}$  と置いた。

これらの式からアルゴリズムが得られる。

# マルチトーン・カーブ・ フィッティング・アルゴリズム

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ A_n \\ B_n \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1}^2 & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{k1} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \alpha_{k2} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{k2} & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \alpha_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \\ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{k1} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1}^2 & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{k1} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \beta_{k2} & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{k1} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \beta_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \\ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \alpha_{k2} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{k1} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2}^2 & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{k2} & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \alpha_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \\ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{k2} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \beta_{k2} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{k2} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k2}^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{k2} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k2} \beta_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \alpha_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{k1} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \alpha_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{k2} & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn}^2 & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \\ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} \beta_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} \beta_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} \beta_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k2} \beta_{kn} & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} \beta_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{kn}^2 & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{kn} \\ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k1} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k1} & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k2} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k2} & \cdots & \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{kn} & \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{kn} & N \end{pmatrix} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \alpha_{k1} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \beta_{k1} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \alpha_{k2} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \beta_{k2} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \alpha_{kn} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \beta_{kn} \\ \sum_{k=0}^{N-1} y_k \end{pmatrix}$$



未知パラメータ



定数行列



定数ベクトル

# 入力周波数が既知の場合の マルチトーン・カーブ・ フィッティング・アルゴリズムの特徴

- ・ 単一カーブ・フィッティング・アルゴリズム  
に対し、入力周波数 ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ) と  
相互変調歪み成分 ( $2\omega_1 - \omega_2, 2\omega_2 - \omega_1$ 等) を  
同時に推定できる。
- ・ FFT法に対し、窓関数が不要。  
 $\omega_1 / \omega_s = n_1 / N, \omega_2 / \omega_s = n_2 / N, \omega_2 / \omega_s = n_3 / N, \dots$   
の条件が不要。

# シミュレーション結果 (1)

## (3 トーン信号)

$$y[k] = A_1 \sin\left(2\pi \frac{\omega_1}{\omega_s} k + \theta_1\right) \\ + A_2 \sin\left(2\pi \frac{\omega_2}{\omega_s} k + \theta_2\right) \\ + A_3 \sin\left(2\pi \frac{\omega_3}{\omega_s} k + \theta_3\right)$$

パラメータ	実際の値	推定値
A1	1	0.998228
A2	1	0.997810
A3	1	0.997436
$\theta_1$ [deg]	0	0.000138
$\theta_2$ [deg]	45	45.058400
$\theta_3$ [deg]	90	90.128700
C	0	0.000000

$$N = 8192 \omega_1 / \omega_s = 0.09, \\ \omega_2 / \omega_s = 0.1006, \omega_3 / \omega_s = 0.1084$$

# シミュレーション結果 (2)

## (3 トーン信号 + 加算的ノイズ)

$$y(k) = A_1 \sin\left(2\pi \frac{\omega_1}{\omega_s} k + \theta_1\right) \\ + A_2 \sin\left(2\pi \frac{\omega_2}{\omega_s} k + \theta_2\right) \\ + A_3 \sin\left(2\pi \frac{\omega_3}{\omega_s} k + \theta_3\right) \\ + n_a$$

パラメータ	実際の値	推定値
A1	1	0.997322
A2	1	0.995981
A3	1	0.997945
$\theta_1$ [deg]	0	-0.180000
$\theta_2$ [deg]	45	45.062300
$\theta_3$ [deg]	90	90.299500
C	0	0.002185

$$N = 8192 \omega_1 / \omega_s = 0.09, \\ \omega_2 / \omega_s = 0.1006, \omega_3 / \omega_s = 0.1084 \\ n_a : \text{ガウス雑音} (\sigma = 0.125)$$

# シミュレーション結果 (3)

## (3 トーン信号 + 3 次 IMD)

$$\begin{aligned}
 y(k) = & A_1 \sin\left(2\pi \frac{\omega_1}{\omega_s} k + \theta_1\right) \\
 & + A_2 \sin\left(2\pi \frac{\omega_2}{\omega_s} k + \theta_2\right) \\
 & + A_3 \sin\left(2\pi \frac{\omega_3}{\omega_s} k + \theta_3\right) \\
 & + D_1 \sin\left(2\pi \frac{(2\omega_1 - \omega_2)}{\omega_s} k + \phi_1\right) \\
 & + D_2 \sin\left(2\pi \frac{(2\omega_1 - \omega_3)}{\omega_s} k + \phi_2\right) \\
 & + D_3 \sin\left(2\pi \frac{(2\omega_2 - \omega_1)}{\omega_s} k + \phi_3\right) \\
 & + D_4 \sin\left(2\pi \frac{(2\omega_2 - \omega_3)}{\omega_s} k + \phi_4\right) \\
 & + D_5 \sin\left(2\pi \frac{(2\omega_3 - \omega_1)}{\omega_s} k + \phi_5\right) \\
 & + D_6 \sin\left(2\pi \frac{(2\omega_3 - \omega_2)}{\omega_s} k + \phi_6\right) + C
 \end{aligned}$$

$$N = 8192 \omega_1 / \omega_s = 0.09,$$

$$\omega_2 / \omega_s = 0.1006, \omega_3 / \omega_s = 0.1084$$

パラメータ	実際の値	推定値
A1	1	0.996654
A2	1	0.995964
A3	1	0.995191
$\theta_1$ [deg]	0	-0.1
$\theta_2$ [deg]	45	45.0021
$\theta_3$ [deg]	90	90.1383
C	0	0.000286
D1	0.3	0.299146
D2	0.3	0.299598
D3	0.3	0.299868
D4	0.3	0.298836
D5	0.3	0.299393
D6	0.3	0.298914
$\phi_1$ [deg]	20	20.0612
$\phi_2$ [deg]	40	40.1761
$\phi_3$ [deg]	60	59.9235
$\phi_4$ [deg]	80	80.1635
$\phi_5$ [deg]	100	99.9029
$\phi_6$ [deg]	120	120.123

## [3]. 入力周波数が未知の場合

# マルチトーン・カーブ・ フィッティング・アルゴリズム

ADC出力データ :

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$$

最小二乗規範より、

$A_1, A_2, \dots, A_n, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n,$   
 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, C$ を最適推定。

$$\varepsilon := \sum_{k=0}^{N-1} \left[ y_k - \left\{ \sum_{l=1}^n A_l \cos(\omega_l k + \theta_l) + C \right\} \right]^2 \Rightarrow \min$$

# 導出した2トーン・カーブ・ フィッティング・アルゴリズム

$$\mathbf{X}_{(n+1)} = \mathbf{X}_{(n)} + \mathbf{F}_{(n)}^{-1} \mathbf{y}_{(n)}$$

$$\mathbf{X}_{(n)} = \begin{pmatrix} A_{1(n)} \\ A_{2(n)} \\ \omega_{1(n)} \\ \omega_{2(n)} \\ \theta_{1(n)} \\ \theta_{2(n)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_{(n)}}{\partial A_{1(n)}} & \frac{\partial R_{(n)}}{\partial A_{2(n)}} & \frac{\partial R_{(n)}}{\partial \omega_{1(n)}} & \frac{\partial R_{(n)}}{\partial \omega_{2(n)}} & \frac{\partial R_{(n)}}{\partial \theta_{1(n)}} & \frac{\partial R_{(n)}}{\partial \theta_{2(n)}} \\ \frac{\partial S_{(n)}}{\partial A_{1(n)}} & \frac{\partial S_{(n)}}{\partial A_{2(n)}} & \frac{\partial S_{(n)}}{\partial \omega_{1(n)}} & \frac{\partial S_{(n)}}{\partial \omega_{2(n)}} & \frac{\partial S_{(n)}}{\partial \theta_{1(n)}} & \frac{\partial S_{(n)}}{\partial \theta_{2(n)}} \\ \frac{\partial T_{(n)}}{\partial A_{1(n)}} & \frac{\partial T_{(n)}}{\partial A_{2(n)}} & \frac{\partial T_{(n)}}{\partial \omega_{1(n)}} & \frac{\partial T_{(n)}}{\partial \omega_{2(n)}} & \frac{\partial T_{(n)}}{\partial \theta_{1(n)}} & \frac{\partial T_{(n)}}{\partial \theta_{2(n)}} \\ \frac{\partial U_{(n)}}{\partial A_{1(n)}} & \frac{\partial U_{(n)}}{\partial A_{2(n)}} & \frac{\partial U_{(n)}}{\partial \omega_{1(n)}} & \frac{\partial U_{(n)}}{\partial \omega_{2(n)}} & \frac{\partial U_{(n)}}{\partial \theta_{1(n)}} & \frac{\partial U_{(n)}}{\partial \theta_{2(n)}} \\ \frac{\partial V_{(n)}}{\partial A_{1(n)}} & \frac{\partial V_{(n)}}{\partial A_{2(n)}} & \frac{\partial V_{(n)}}{\partial \omega_{1(n)}} & \frac{\partial V_{(n)}}{\partial \omega_{2(n)}} & \frac{\partial V_{(n)}}{\partial \theta_{1(n)}} & \frac{\partial V_{(n)}}{\partial \theta_{2(n)}} \\ \frac{\partial W_{(n)}}{\partial A_{1(n)}} & \frac{\partial W_{(n)}}{\partial A_{2(n)}} & \frac{\partial W_{(n)}}{\partial \omega_{1(n)}} & \frac{\partial W_{(n)}}{\partial \omega_{2(n)}} & \frac{\partial W_{(n)}}{\partial \theta_{1(n)}} & \frac{\partial W_{(n)}}{\partial \theta_{2(n)}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_{(n)} = \begin{pmatrix} R_{(n)} \\ S_{(n)} \\ T_{(n)} \\ U_{(n)} \\ V_{(n)} \\ W_{(n)} \end{pmatrix}$$



未知パラメータ



未知パラメータを含む行列



未知パラメータを含む  
ベクトル

# アルゴリズムの導出 (1)

・2トーン信号の場合。

最小二乗規範を用いる。

$$\begin{aligned}\varepsilon &:= \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - m_k]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - A_1 \cos(\omega_1 k + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 k + \theta_2) - C]^2 \rightarrow \min\end{aligned}$$

最小二乗誤差“ $\varepsilon$ ”を  
最適推定したい各パラメータで  
各々偏微分を行い、  
7元1次の連立方程式を組む。

# アルゴリズムの導出 (2)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_1} = 0 = -2 \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - A_1 \cos(\omega_1 k + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 k + \theta_2) - C] \cos(\omega_1 k + \theta_1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_2} = 0 = -2 \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - A_1 \cos(\omega_1 k + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 k + \theta_2) - C] \cos(\omega_2 k + \theta_2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C} = 0 = -2 \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - A_1 \cos(\omega_1 k + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 k + \theta_2) - C]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_1} = 0 = -2 \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - A_1 \cos(\omega_1 k + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 k + \theta_2) - C] A_1 k \sin(\omega_1 k + \theta_1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_2} = 0 = -2 \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - A_1 \cos(\omega_1 k + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 k + \theta_2) - C] A_2 k \sin(\omega_2 k + \theta_2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_1} = 0 = -2 \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - A_1 \cos(\omega_1 k + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 k + \theta_2) - C] A_1 \sin(\omega_1 k + \theta_1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta_2} = 0 = -2 \sum_{k=0}^{N-1} [y_k - A_1 \cos(\omega_1 k + \theta_1) - A_2 \cos(\omega_2 k + \theta_2) - C] A_2 \sin(\omega_2 k + \theta_2)$$

上の7式からCを消去する。

# アルゴリズムの導出 (3)

$$\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})\alpha_{k1} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)\alpha_{k1} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)\alpha_{k1} \right\} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})\alpha_{k2} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)\alpha_{k2} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)\alpha_{k2} \right\} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})k\beta_{k1} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)k\beta_{k1} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)k\beta_{k1} \right\} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})k\beta_{k2} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)k\beta_{k2} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)k\beta_{k2} \right\} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})\beta_{k1} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)\beta_{k1} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)\beta_{k1} \right\} = 0$$

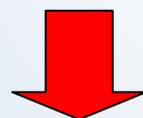
$$\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})\beta_{k2} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)\beta_{k2} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)\beta_{k2} \right\} = 0$$

ここで、  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k$ ,  $\bar{\alpha}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_j t_k + \theta_j)$ ,  $\bar{\beta}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sin(\omega_j t_k + \theta_j)$ ,

$$\alpha_{kj} = \cos(\omega_j t_k + \theta_j), \quad \beta_{kj} = \sin(\omega_j t_k + \theta_j)$$

## アルゴリズムの導出（４）

これらは非線型方程式であるから、  
各未知パラメータの値を繰り返し設定し、  
目的の値がわかるまで計算する必要がある。



各式の左辺を信号誤差を表すパラメータ、  
R, S, T, U, V, Wと定義する。

# アルゴリズムの導出 (5)

## 信号誤差の定義

$$R = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})\alpha_{k1} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)\alpha_{k1} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)\alpha_{k1} \right\}$$

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})\alpha_{k2} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)\alpha_{k2} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)\alpha_{k2} \right\}$$

$$T = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})k\beta_{k1} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)k\beta_{k1} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)k\beta_{k1} \right\}$$

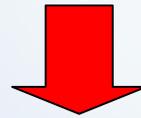
$$U = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})k\beta_{k2} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)k\beta_{k2} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)k\beta_{k2} \right\}$$

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})\beta_{k1} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)\beta_{k1} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)\beta_{k1} \right\}$$

$$W = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \bar{y})\beta_{k2} - A_1 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k1} - \bar{\alpha}_1)\beta_{k2} \right\} - A_2 \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha_{k2} - \bar{\alpha}_2)\beta_{k2} \right\}$$

# アルゴリズムの導出 (6)

未知パラメータが目的の値と一致すれば、  
各信号誤差 $R, S, T, U, V, W$ は0となる。



各信号誤差を0に収束させるために、  
反復アルゴリズムを作成する。

# アルゴリズムの導出 (7)

フィッティング関数を次の式で表す。

$$z_k = B_1 \cos(\psi_1 k + \phi_1) + B_2 \cos(\psi_2 k + \phi_2) + D$$

ADC出力データ  $y_k$  を用いて  $z_k$  を評価する。  
 $B_1, B_2, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2, D$  の値は未知であるが、  
 $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2, C$  を  $R=S=T=U=V=W=0$  の  
ときに最適推定された値とすると、  
次のように、実測データは近似できる。

$$y_k = A_1 \cos(\omega_1 k + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 k + \theta_2) + C$$

# アルゴリズムの導出 (8)

反復アルゴリズムをR, S, T, U, V, Wの  
テイラー級数展開から導出する。  
各級数の第1項のみを用い、次のように定義する。

$$R(B_1, B_2, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2) := \frac{\partial R}{\partial B_1} (B_1 - A_1) + \frac{\partial R}{\partial B_2} (B_2 - A_2) + \frac{\partial R}{\partial \psi_1} (\psi_1 - \omega_1) + \frac{\partial R}{\partial \psi_2} (\psi_2 - \omega_2) + \frac{\partial R}{\partial \phi_1} (\phi_1 - \theta_1) + \frac{\partial R}{\partial \phi_2} (\phi_2 - \theta_2)$$

$$S(B_1, B_2, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2) := \frac{\partial S}{\partial B_1} (B_1 - A_1) + \frac{\partial S}{\partial B_2} (B_2 - A_2) + \frac{\partial S}{\partial \psi_1} (\psi_1 - \omega_1) + \frac{\partial S}{\partial \psi_2} (\psi_2 - \omega_2) + \frac{\partial S}{\partial \phi_1} (\phi_1 - \theta_1) + \frac{\partial S}{\partial \phi_2} (\phi_2 - \theta_2)$$

$$T(B_1, B_2, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2) := \frac{\partial T}{\partial B_1} (B_1 - A_1) + \frac{\partial T}{\partial B_2} (B_2 - A_2) + \frac{\partial T}{\partial \psi_1} (\psi_1 - \omega_1) + \frac{\partial T}{\partial \psi_2} (\psi_2 - \omega_2) + \frac{\partial T}{\partial \phi_1} (\phi_1 - \theta_1) + \frac{\partial T}{\partial \phi_2} (\phi_2 - \theta_2)$$

$$U(B_1, B_2, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2) := \frac{\partial U}{\partial B_1} (B_1 - A_1) + \frac{\partial U}{\partial B_2} (B_2 - A_2) + \frac{\partial U}{\partial \psi_1} (\psi_1 - \omega_1) + \frac{\partial U}{\partial \psi_2} (\psi_2 - \omega_2) + \frac{\partial U}{\partial \phi_1} (\phi_1 - \theta_1) + \frac{\partial U}{\partial \phi_2} (\phi_2 - \theta_2)$$

$$V(B_1, B_2, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2) := \frac{\partial V}{\partial B_1} (B_1 - A_1) + \frac{\partial V}{\partial B_2} (B_2 - A_2) + \frac{\partial V}{\partial \psi_1} (\psi_1 - \omega_1) + \frac{\partial V}{\partial \psi_2} (\psi_2 - \omega_2) + \frac{\partial V}{\partial \phi_1} (\phi_1 - \theta_1) + \frac{\partial V}{\partial \phi_2} (\phi_2 - \theta_2)$$

$$W(B_1, B_2, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2) := \frac{\partial W}{\partial B_1} (B_1 - A_1) + \frac{\partial W}{\partial B_2} (B_2 - A_2) + \frac{\partial W}{\partial \psi_1} (\psi_1 - \omega_1) + \frac{\partial W}{\partial \psi_2} (\psi_2 - \omega_2) + \frac{\partial W}{\partial \phi_1} (\phi_1 - \theta_1) + \frac{\partial W}{\partial \phi_2} (\phi_2 - \theta_2)$$

# アルゴリズムの導出 (9)

これらは線型方程式であるから、  
 $B_1, B_2, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2$  を最適推定することが  
可能である。

$B_1, B_2, \psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2$  を、  
 $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2$  に対する新しい値とし、  
式を整理すると、反復アルゴリズムが得られる。

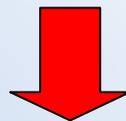
# 入力周波数が未知の場合の マルチトーン・カーブ・ フィッティング・アルゴリズムの特徴

従来法：

複数の入力周波数を1つずつ推定するため、  
他の周波数成分が推定誤差成分となる。

提案法：

複数の入力周波数を同時に推定するため、  
従来法に比べ高精度で推定できる。



シミュレーションで確認した。

# シミュレーション結果 (1)

## (2 トーン信号)

$$y(k) = A_1 \sin\left(2\pi \frac{\omega_1}{\omega_s} k + \theta_1\right) + A_2 \sin\left(2\pi \frac{\omega_2}{\omega_s} k + \theta_2\right)$$

N=8192

	実際の値	推定値
$\omega_1/\omega_s$	$2.2 \times 10^{-4}$	$2.200 \times 10^{-4}$
$\omega_2/\omega_s$	$5.8 \times 10^{-4}$	$5.800 \times 10^{-4}$
A1	1	1.0000
A2	1	1.0000
$\theta_1$ [deg]	45	45.0000
$\theta_2$ [deg]	90	90.0000

(a) マルチトーン・フィッティング  
アルゴリズム

	実際の値	推定値
$\omega_1/\omega_s$	$2.2 \times 10^{-4}$	$2.121 \times 10^{-4}$
$\omega_2/\omega_s$	$5.8 \times 10^{-4}$	$5.922 \times 10^{-4}$
A1	1	0.9650
A2	1	0.9670
$\theta_1$ [deg]	45	59.1427
$\theta_2$ [deg]	90	74.0683

(b) 単一サインカーブ・フィッティング  
アルゴリズム

# シミュレーション結果 (2)

## (2 トーン信号 + 加算的ノイズ)

$$y(k) = A_1 \sin\left(2\pi \frac{\omega_1}{\omega_s} k + \theta_1\right) + A_2 \sin\left(2\pi \frac{\omega_2}{\omega_s} k + \theta_2\right) + n_a$$

$N=8192$

$n_a$  : ガウス雑音  $\sigma=0.125$

	実際の値	推定値
$\omega_1/\omega_s$	$2.2 \times 10^{-4}$	$2.200 \times 10^{-4}$
$\omega_2/\omega_s$	$5.8 \times 10^{-4}$	$5.798 \times 10^{-4}$
A1	1	1.0011
A2	1	1.0001
$\theta_1$ [deg]	45	44.8025
$\theta_2$ [deg]	90	90.2496

(a) マルチトーン・フィッティング  
アルゴリズム

	実際の値	推定値
$\omega_1/\omega_s$	$2.2 \times 10^{-4}$	$2.120 \times 10^{-4}$
$\omega_2/\omega_s$	$5.8 \times 10^{-4}$	$5.920 \times 10^{-4}$
A1	1	0.9650
A2	1	0.9663
$\theta_1$ [deg]	45	59.1427
$\theta_2$ [deg]	90	74.3681

(b) 単一サインカーブ・フィッティング  
アルゴリズム

## 6. まとめ

# 研究結果

入力周波数が**既知**、**未知**のそれぞれの場合について**マルチトーン・カーブ・フィッティング・アルゴリズム**を開発した。

## シミュレーション結果

- ・ 既知周波数の場合：

窓関数不要。

複数の入力周波数を**同時**に推定できた。

- ・ 未知周波数の場合：

窓関数不要。

単一サインカーブ・フィッティング・

アルゴリズムを繰り返し用いる従来法に比べ、

**高精度**の推定結果を得た。

# 今後の課題

- 未知入力周波数の場合の  $n$  トーン信号への拡張
- 特に未知入力周波数の場合のアルゴリズムで、計算量を減らす。
- 実測ADCデータに対して開発したアルゴリズムを適用し、有効性を検証する。
- ミクスド・シグナルLSIテスターに実装する。