

サンプリング回路の信号ノイズ比と帯域の考察

上森 将文, 小林 謙介†, 小林 春夫, 清水 一也
 群馬大学工学部電気電子工学科 〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1
 tel:0277-30-1788 fax:0277-30-1707 e-mail:k_haruo@el.gunma-u.ac.jp

† コンサルタント

SNR and Bandwidth in Sampling Circuits

Masafumi UEMORI, Kensuke KOBAYASHI†, Haruo KOBAYASHI, Kazuya SHIMIZU,
 Electronic Engineering Department, Faculty of Engineering, Gunma University
 1-5-1 Tenjin-cho Kiryu Gunma Japan 376-8515

† Consultant

要約 - This paper discusses a theoretical issue of a sampling circuit to maximize SNR while keeping its bandwidth constant, in order to realize a wideband high dynamic range sampling circuit for communication system and measuring instrument applications. We consider two time-constants τ_1 , τ_2 in the sampling circuit, where τ_1 is (signal source internal impedance + sampling switch on-resistance) x (hold capacitance) and τ_2 is a sampling time window (aperture time). We have derived that $\tau_1 = 1.5\tau_2$ is the condition to maximize SNR keeping the bandwidth constant. We will call it as a strobe sampling circuit when $\tau_1 = 1.5\tau_2$ is realized.

キーワード : AD 変換器, サンプル・ホールド回路, インパルス・サンプリング, トラック・ホールド回路, 信号ノイズ比, 帯域

Keywords: ADC, Sample/Hold Circuit, Impulse Sampling, Track/Hold Circuit, SNR, Bandwidth

I. はじめに

近年の通信・電子計測の分野においては取り扱う信号周波数がより高くなってきており, そこではより広帯域で高いダイナミックレンジをもつ S/H (Sample Hold, サンプル・ホールド) 回路が必要となってきた ([1]-[6]). この論文では広帯域・高ダイナミックレンジの S/H 回路を実現するための検討を行う. 具体的には帯域一定の S/H 回路を実現する際に最大 SNR (信号ノイズ比) を得るための条件を導出し, これまでの 2 つの S/H 回路 (トラック・ホールド回路, インパルス・サンプリング回路) の中間に最適なサンプリング方式 (ここではそれを「ストロブ・サンプリング」とよぶ) があることを示す. またその最適条件導出過程でトラック・ホールド方式, インパルス・サンプリング方式およびストロブ・サンプリング方式を統一して扱える理論を展開する.

II. サンプルホールド回路の構成と動作

2.1 S/H 回路の基本構成

S/H 回路は, スイッチ SW とホールド・キャパシタ C から構成される (図 1). その動作は, まずスイッチ SW がオン状態の時, 入力電圧によりホールド・キャパシタ C へ充電する (サンプル状態). 次にスイッチ SW がオフされそのときにホールド・キャパシタに掛かっていた電圧が保持される (ホールド状態). C の充電時間は入力バッファ A_1 のスルーレートや, スイッチ SW のオン抵抗に依存し, ある程度の時間が必要となる.

SoC 上の ADC 前段に用いられる S/H 回路ではアナログ入力側にスイッチ動作の影響が及ばないようにするための入力バッファ A_1 , また負荷抵抗によるキャパシタの放電の影響を少なくするための出力バッファ A_2 を用いる. しかしながら, 広帯域化に伴い高周波信号を扱うことになると, 入力バッファを高速動作させる必要があり実現が難しくなる. サンプリング・オシロスコープに用いられる広帯域 S/H 回路では, 広帯域化する時には入力バッファを除いた構成が用いられている. 以下, 入力バッファがない構成を考える.

抵抗と容量で構成される回路の雑音:

S/H 回路の基本構成はスイッチ SW とホールド・キャ

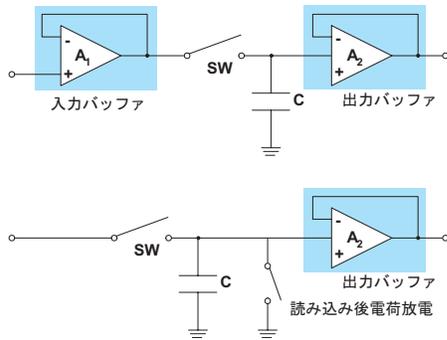


図 1: S/H 回路の構成. 入力バッファあり (上). 入力バッファなし (下).

Fig.1: S/H circuits with input buffer (top) and without it (bottom).

パシタ C で成り立つが, ホールド状態のときのこのスイッチ OFF 抵抗と C との並列回路からなる S/H 回路の出力熱雑音パワーは次のようになる (図 2).

$$V_{n,out}^2 = \frac{k_B T}{C}.$$

ここで k_B はボルツマン定数である. S/H 回路のホールド状態で発生しているこのノイズが問題となる. 広帯域信号を取り扱うために容量 C を小さくすると, 熱雑音は大きくなってしまふ.

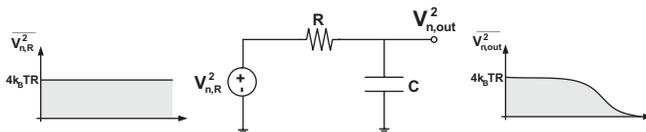


図 2: 抵抗と容量からなる回路の熱雑音.

Fig.2: Thermal noise in RC circuit.

S/H 回路での 2 つの時定数 τ_1, τ_2 :

S/H 回路で 2 つの時定数を考える. 1 つは信号源の内部抵抗 R_{SG} とスイッチのオン抵抗 R_{ON} の合成抵抗 $R (=R_{SG} + R_{ON})$ とホールド容量 C から構成される時定数 $\tau_1 = RC$, もう 1 つは, スイッチ SW を ON するスイッチング時間窓 τ_2 である. 以下, R は一定の値 30Ω ($R_{SG} = 25\Omega, R_{ON} = 5\Omega$) として議論する.

III. S/H 回路の信号ノイズ比, 帯域の関係の問題設定

トラック・ホールド回路: ($\tau_1 \ll \tau_2$ の場合)

トラック・ホールド回路はスイッチング時間窓 τ_2 が充分長く 2 つの時定数が $\tau_1 \ll \tau_2$ の関係にあり, SoC 上の ADC 等に用いられる. ここでは実時間サンプリングが行われることが多く, 単発信号の測定が行える. この方式では, トラック時間 (スイッチ時間窓 τ_2) は, 入力信号と出力信号の差が $\frac{1}{2}$ LSB になるまで必要である. 高周波信号を扱うためにはサンプリング定理に従い高速サンプリング動作が必要となる.

トラック・ホールド回路では, スイッチ時間窓 τ_2 が RC 時定数 τ_1 に比べて十分長い ($\tau_1 \ll \tau_2$) ので, ホールド容量 C に対して十分な充電が行われる. このため, 単位ステップ入力に対して, 出力信号成分 S は $S = 1$, また出力熱雑音成分は $N = \sqrt{k_B T / C}$ で与えられるので, 信号雑音比 ($SNR = V_{signal} / V_{noise}$) は,

$$SNR = \sqrt{\frac{C}{k_B T}} \propto \sqrt{C}$$

となり, \sqrt{C} に比例する. 一方, 帯域 (ω_{BW}) は,

$$\omega_{BW} = \frac{1}{\tau_1} \propto \frac{1}{C}$$

となり, C に反比例する. 広帯域のためには C を小さくしなければならないが, C を小さくすると熱雑音が大きくなり SNR が劣化する. また, トラック・ホールド回路を用いてサンプリング動作を行ったときの伝達関数は, 次のようになる.

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau_1\omega} \quad (1)$$

なおトラック・ホールド回路は入力バッファを除いた構成で用いると, 信号源からインピーダンス C が見える時間が長くなり C の信号源への影響が大きくなるので, サンプリング・オシロスコープの広帯域 S/H 回路としてはほとんど用いられていない.

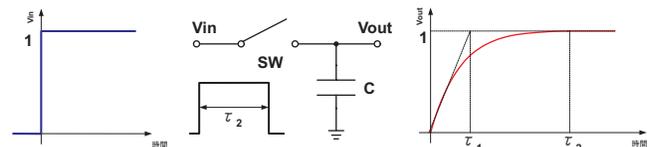


図 3: トラック・ホールド回路の入出力信号波形.

Fig.3: Input and output waveforms of T/H circuit.

インパルス・サンプリング回路: ($\tau_1 \gg \tau_2$ の場合)

インパルス・サンプリング回路はスイッチング時間窓 τ_2 がインパルスの極めて短く、2つの時定数が $\tau_1 \gg \tau_2$ の関係にあり、サンプリング・オシロスコープに用いられる。ここでは測定対象は繰り返し生起する広帯域信号を測定するため等価時間サンプリングが用いられる。この方式では、信号源へのホールド容量 C の影響を出来るだけ減らすためおよび高周波信号を扱うために、スイッチング時間窓 τ_2 が小さく設計されている。

インパルス・サンプリング回路では、スイッチ時間窓 τ_2 が RC 時定数 τ_1 に比べて短い ($\tau_1 \gg \tau_2$) ので、入力信号に対してホールド容量 C に対して十分な充電を行うことができない (図 4)。単位ステップ入力に対して、出力信号成分 S は $S \propto \frac{1}{C}$ 、出力熱雑音成分は $N = \sqrt{\frac{k_B T}{C}}$ で与えられるので、信号雑音比 (SNR) は、

$$SNR \propto \frac{1}{C} / \sqrt{\frac{k_B T}{C}} \propto \frac{1}{\sqrt{C}}$$

となり、 \sqrt{C} に反比例する。またインパルス・サンプリング回路を用いてサンプリング動作を行ったときの伝達関数は次のようになる。

$$H(j\omega) = \frac{\tau_1}{\tau_2} \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\tau_2}{2}\omega}. \quad (2)$$

帯域 (ω_{BW}) は、 τ_2 にのみ依存し τ_2 が小さいほど帯域は広がる。一方信号ゲインは τ_2 に反比例するので広帯域化のためサンプリング時間窓 τ_2 を小さくすると SNR は劣化する。また広帯域化のため極短パルス (時間幅 τ_2) を生成することは技術的に難しい。

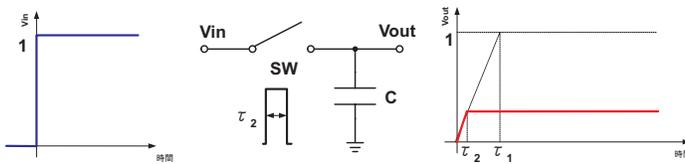


図 4: インパルス・サンプリング回路の入出力信号波形。

Fig.4: Input and output waveforms of impulse sampling circuit.

広帯域信号サンプリング技術の問題設定

「ある帯域 ω_{BW} をもつ S/H 回路を実現する時、SNR を最大にする τ_1, τ_2 を求める。」

この解を τ_{1opt}, τ_{2opt} と記述する。この問題は非線形最適化問題であり解析的に解くことは難しい。そこで、理論式を導出し数値計算を行って解を求め、SPICE による回路シミュレーションでもその結果を検証した。

上述したようにトラック・ホールド回路 ($\tau_1 \ll \tau_2$) とインパルス・サンプリング回路 ($\tau_1 \gg \tau_2$) のどちらでも、広帯域、高 SNR を実現することは困難である。以下、その中間領域 ($\tau_1 \approx \tau_2$) に最適解があることを示す。またこの最適条件でサンプリングを行う「ストロブ・サンプリング技術」を提案する。

IV. 統一した S/H 回路の理論

この節では現在個別に扱われているトラック・ホールド回路の理論と、インパルス・サンプリング回路の理論を統一した理論を導く。

パラメータ τ_1, τ_2 のサンプリング回路でのステップ応答 $s(t)$ (図 5)、インパルス応答 $h(t)$ は次のように導ける。

$$s(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} & (0 < t < \tau_2) \\ 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} & (\tau_2 < t) \end{cases} \quad (3)$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\frac{t}{\tau_1}} / \tau_1 & (0 < t < \tau_2) \\ 0 & (\tau_2 < t) \end{cases}$$

これらの導出の際には、サンプリング動作を考慮して等価時間サンプリングの考え方をを用いた (図 6)。

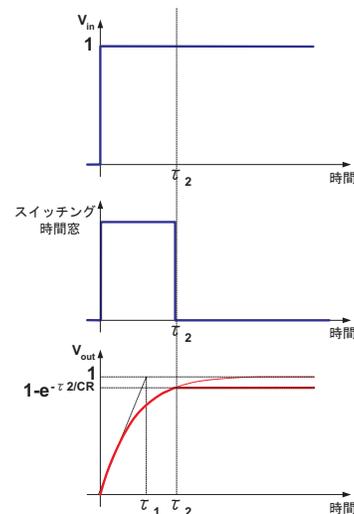


図 5: ステップ応答の入出力波形とスイッチング波形。

Fig.5: Step response of S/H circuit.

伝達関数 $H(s)$ は $h(t)$ をラプラス変換して得る。

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s} \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + s\right)\tau_2} \right\} \quad (4)$$

式(4)で $\tau_1 \ll \tau_2$ とすると式(1)のトラック・ホールド回路の伝達関数になり, また $\tau_1 \gg \tau_2$ とすると式(2)のインパルス・サンプリング回路の伝達関数になる. また $s=j\omega$ とし次のゲイン特性を得る(図7).

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega\tau_1} \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{1}{\tau_1}+j\omega\right)\tau_2} \right\} \right|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1+\tau_1^2\omega^2}} \times \sqrt{\left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \cos(\omega\tau_2)\right)^2 + \left(e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \sin(\omega\tau_2)\right)^2}$$

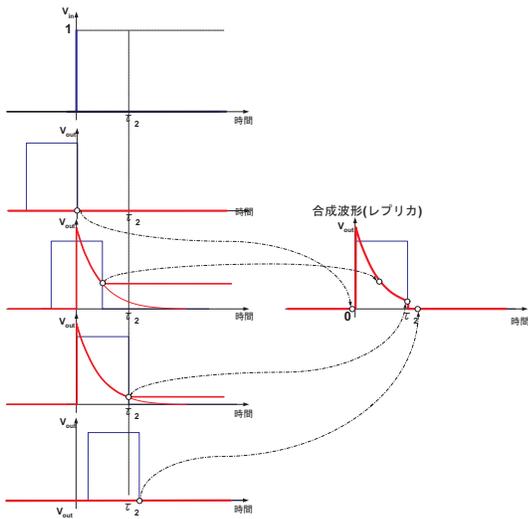


図 6: インパルス応答の入出力波形と合成波形を等価時間サンプリングで求める.

Fig.6: Impulse response of S/H circuit obtained by equivalent-time sampling.

次に統一した S/H 回路の SNR の導出を行う. 前述のように抵抗 R と容量 C の回路の出力熱雑音は,

$$N_{rms} = \sqrt{\frac{k_B T}{C}}$$

で与えられる. 一方, S/H 回路の単位ステップ入力に対する出力信号成分は式(3)より,

$$S = 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}$$

である. 従って S/H 回路の SNR(= S/N_{rms}) は次のようになる.

$$SNR = \frac{1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}}{\sqrt{\frac{k_B T}{C}}}$$

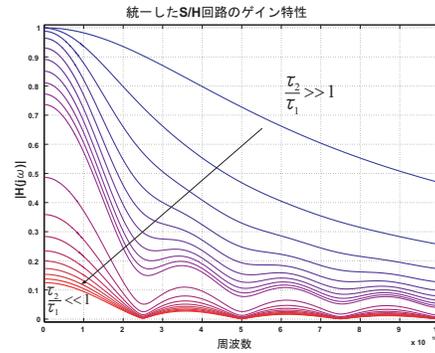


図 7: 統一した S/H 回路のゲイン特性.

Fig.7: Gain characteristics of S/H circuit.

$$= \sqrt{\frac{\tau_1}{k_B T R}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right).$$

次に統一した S/H 回路の帯域について考える. 帯域 ω_{BW} はゲインが DC ゲインの 3dB 落ちの時で定義されるので,

$$|H(j\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j0)| \quad (5)$$

で与えられる. この式を解析に解くことは困難であるので数値計算により解 ω_{BW} を求めた.

式(5)が厳密な帯域の定義であるが, S/H 回路を一次系と仮定すると, ステップ応答の立ち上がり時間から帯域を求めることができる. 推定される帯域 ω_{BW} は, 出力最終値の 10% になる時間と 90% になる立ち上がり時間 t_{r10-90} から

$$\omega_{BW} = \frac{2.1972}{t_{r10-90}} \quad (6)$$

で計算できる. 2つの計算方法で帯域はほぼ一致していることを数値計算で確認した. 以下は式(6)を用いる.

V. 帯域一定下での最大 SNR の条件の導出

4節での準備のもと, この節ではある帯域 ω_{BW} をもつ S/H 回路を実現する時, SNR を最大にする τ_1, τ_2 を求める.

統一した S/H 回路で出力が 10% と 90% となる時間は

$$\begin{cases} -t_{10\%} = \tau_1 \ln \left\{ 1 - 0.1 \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right) \right\} \\ -t_{90\%} = \tau_1 \ln \left\{ 1 - 0.9 \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right) \right\} \end{cases}$$

となる. 従って 10% から 90% への立ち上がり時間は,

$$t_{r10-90} = t_{90\%} - t_{10\%}$$

$$= \tau_1 \ln \frac{1 - 0.1 \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)}{1 - 0.9 \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)} \quad (7)$$

となる。式 (6) より帯域を一定 (ω_{BW}) にすると立ち上がり時間 (t_{r10-90}) も一定になるので

$$\tau_2 = -\tau_1 \ln \left\{ 1 - \frac{10 \left(1 - e^{-\frac{t_{r10-90}}{\tau_1}}\right)}{1 - 9e^{-\frac{t_{r10-90}}{\tau_1}}} \right\} \quad (8)$$

となり、帯域一定下で τ_2 は τ_1 の関数として得られる。このとき SNR は次のように得られる。

$$SNR = 10 \sqrt{\frac{1}{k_B T R}} \sqrt{\tau_1} \frac{10 \left(1 - e^{-\frac{t_{r10-90}}{\tau_1}}\right)}{1 - 9e^{-\frac{t_{r10-90}}{\tau_1}}}. \quad (9)$$

すなわち帯域一定 (立ち上がり時間一定) の条件化の SNR が τ_1 の関数式 (9) が得られたので、数値計算で τ_1 の値を振り SNR を最大にする τ_{1opt} を求める。これを式 (8) に代入して τ_{2opt} を求める。

その結果、一定に設定する帯域 ω_{BW} の値によらず、次の関係を満たすときに SNR を最大にすることが得られた。

$$\tau_{1opt} : \tau_{2opt} = 1 : 1.50. \quad (10)$$

VI. 結果の考察

以下、入力電圧 0.1[V]、温度 T=300[K]、信号源内部インピーダンスとスイッチオン抵抗の合成抵抗 30[Ω] の時、SNR を最大にする条件 (式 (10)) の下で議論する。具体的なパラメータ値

ある帯域 f_{BW} をもつ S/H 回路を設計する際に SNR を最大にする RC 時定数 τ_{1opt} とスイッチング時間窓 τ_{2opt} の関係は、図 8 に示すように

$$\tau_{1opt}[\text{sec}] = \frac{1}{3.33 \times f_{BW}[\text{Hz}]}$$

$$\tau_{2opt}[\text{sec}] = \frac{1}{2.12 \times f_{BW}[\text{Hz}]}$$

で与えられる。このときの容量 C の値は

$$C_{[F]} = \frac{1}{100 \times f_{BW}[\text{Hz}]}$$

で与えられる (図 9)。最大 SNR は図 10 のようになり、これがこの構成の S/H 回路の SNR 理論限界値となる。表 1 に帯域と最適値の例を示す。これらはある帯域を

持つ S/H 回路で最大 SNR を取るように設計する場合のパラメータ値設計指標となる。

エネルギーの観点からの τ_{1opt} , τ_{2opt}

以下に示すように帯域一定下で SNR を最大にする τ_{1opt} , τ_{2opt} はホールド容量に保持されるエネルギーを最大にする。

$$SNR = 10 \log \left[\frac{V_{out}^2}{N_{rms}^2} \right] = 10 \log \left[\frac{V_{out}^2}{C} \right]$$

$$= 10 \log \left[\frac{1}{2} C V_{out}^2 \right] + 10 \log [2k_B T] [dB].$$

$\frac{1}{2} C V_{out}^2$ の部分は容量に蓄積されるエネルギー、 $10 \log \left[\frac{1}{2} k_B T \right]$ の部分は定数であるから、SNR を最大とすること、容量保持エネルギーを最大にすることは等価である。

ストロブ・サンプリングの提案

図 11 に数値計算で求めた τ_2/τ_1 と正規化した SNR の関係を示す。広帯域サンプリング・オシロスコープで用いられているインパルス・サンプリング ($\tau_2/\tau_1 \ll 1$) のときは SNR が劣化していることがわかる。また広帯域化にともない極短パルスを生成するのも技術的に難しい。そこで $\tau_1 \approx 1.5\tau_2$ で広帯域・高ダイナミックレンジ S/H 回路を実現することを提案する (ストロブ・サンプリング回路)。

VII. まとめと今後の課題

この論文ではサンプリング回路の帯域幅と SNR の関係式を導出し、帯域一定の条件下で最大 SNR を得る新サンプリング技術「ストロブ・サンプリング技術」を提案した。このストロブ・サンプリング技術はトラック・ホールドとインパルス・サンプリングの中間に位置する。さらなる広帯域 S/H 回路を実現するには、歪みとインピーダンス整合の問題からトラック・ホールド回路は適さず、またインパルス・サンプリング回路ではノイズが大きくなる問題があるので、その中間が適するであろうという著者の一人 (小林謙介) の長年のサンプリング技術分野での経験とここでの理論解析が一致している。

謝辞 有意義なご討論をいただきました戸張勉氏、小室貴紀氏、酒寄寛氏に謝意を表します。

参考文献

- [1] 小林謙介, “高速波形計測のための等価時間サンプリング技術”, 計測と制御 ミニ特集, vol.41, no.4, pp.256-261 (2002 年 4 月).

表 1: ある帯域で最大 SNR を実現するパラメータ値.

帯域 [GHz]	SNR[dB]	τ_{1opt} [ps]	τ_{2opt} [ps]	最適 C[pF]
1	71.8	300	450	10.0
5	64.8	62	94	2.08
10	61.8	31	47	1.04
50	54.8	6	9	0.21
100	51.8	3	5	0.10

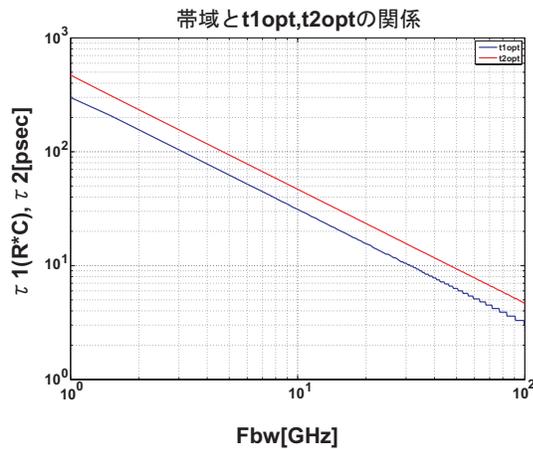


図 8: 帯域 f_{BW} と SNR を最大にする τ_{1opt} , τ_{2opt} .
Fig.8: f_{BW} vs. τ_{1opt} , τ_{2opt} .

- [2] M. Kimura, K. Kobayashi, H. Kobayashi, "A Quasi-Coherent Sampling Method for Wideband Data Acquisition", *IEICE Trans. on Fundamentals*, vol. E85-A, no. 4, pp.757-763 (April 2002).
- [3] M. Kimura, A. Minegishi, K. Kobayashi, H. Kobayashi, "A New Coherent Sampling System with a Triggered Time Interpolation", *IEICE Trans. on Fundamentals*, vol. E84-A, no. 3, pp.713-719 (March 2001).
- [4] M. Kahrs, "50 Years of RF and Microwave Sampling," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol.51, pp.1787-1805 (2003).
- [5] 小室貴紀, 小林春夫, 酒寄寛, 光野正志, "ミックスト・シグナル LSI テスタ技術の基礎 (前編)", *Design Wave Magazine*, pp.108-117 (2005年6月).
- [6] H. Kobayashi, et. al., "Sampling Jitter and Finite Aperture Time Effects in Wideband Data Acquisition Systems," *IEICE Trans. on Fundamentals*, vol. E85-A, no. 2 (Feb. 2002).

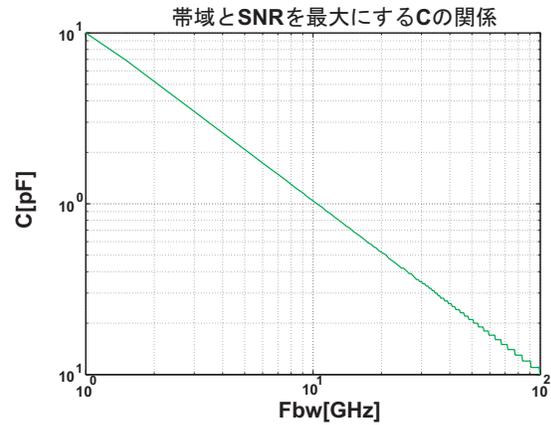


図 9: 帯域 f_{BW} と SNR を最大にする容量 C の大きさ.
Fig.9: f_{BW} vs. hold capacitor C .

入力電圧0.1[V], T=300[K]のときの帯域と最大SNRの関係

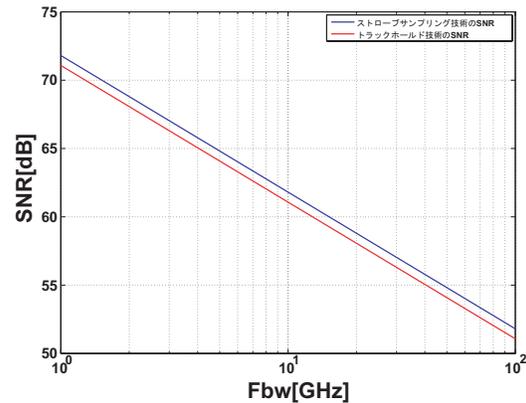


図 10: S/H 回路の帯域と最大 SNR.
Fig.10: Bandwidth vs. maximum SNR in S/H circuit.

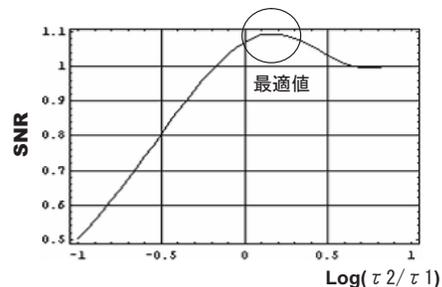


図 11: S/H 回路での τ_1 , τ_2 の比と正規化した SNR.
Fig.11: Normalized SNR vs. $\log(\tau_2/\tau_1)$ in S/H circuit.