

サンプリング回路の解析

新井 美保* 志水 勲 (群馬大学)

久保 和良 (小山工業高等専門学校) 小林 春夫 (群馬大学)

Analysis of Sampling Circuit

Miho Arai*, Isao Shimizu (Gunma University)

Kazuyoshi Kubo (Oyama National College of Technology), Haruo Kobayashi (Gunma University)

This paper presents analysis of sampling circuit for high-frequency and high-precision waveform acquisition. We analyze effects of non-linearity of on-resistance in track-mode and finite aperture time. In the non-linearity analysis, we have derived formula for harmonic distortion due to non-linear on-resistance in track mode. In the finite aperture time analysis, we have derived formula for the bandwidth limitation due to its low-pass filter effects. We have checked that our theoretical calculation and SPICE simulation results agree well. We also have focused on the trade-off among bandwidth, aperture time, and time constant, we have derived their relationships based on the uncertainty principle between time and frequency; we believe that such analyses would be new in circuit design area.

キーワード： サンプリング回路, 高調波歪, アパーチャ時間, 不確定性原理

(Keyword: Sampling Circuit, Harmonic Distortion, Aperture Time, Uncertainty Principle)

1. はじめに

携帯電子機器の小型軽量化が進む現在、アナログ・デジタル混載 LSI の需要は高く、A/D 変換器が重要な役目を果たしている。A/D 変換には変換時間が必要であり、一時的にアナログ情報を保持するサンプリング回路の存在が必要不可欠である。サンプリング回路での誤差は最終的なデジタル値にまで影響を与えるため、高性能化が求められている[1][2][3][4]。

また、CMOS プロセスの微細化に伴い信号の高周波化が進んでいる。そのため、サンプリング時の非理想特性の影響が顕著になり、A/D 変換の性能面に多くの問題を生じさせている。しかし、その影響を明確に記述する理論はまだ確立されていない。[5][6][7]

そこで本論文では、非理想特性の非線形性、アパーチャ時間、時間と周波数の不確定性原理に着目し、それらの影響の明確化を行う。

2. トラックモードでの非線形性

〈2.1〉問題設定

半導体素子には非線形特性が存在し、入力信号が非線形素子を経由すると高調波を含んだ信号が出力される(図 1)。高調波は波形歪の発生要因であり、非線形性と高調波の関係性を理解することが重要である。そこで図 2(a)の CMOS を可変抵抗(抵抗値が入力電圧に依存)として考え、図 2(b)のサンプリング回路のトラックモードにおける非線形性

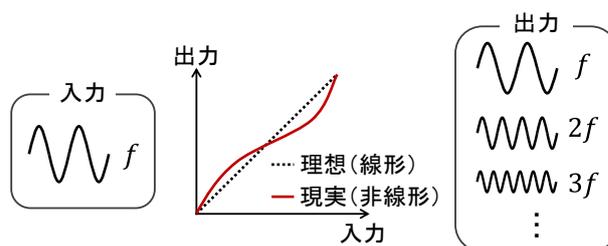


図 1 半導体素子の非線形特性

Fig.1. Non-linear property of devices in LSI.

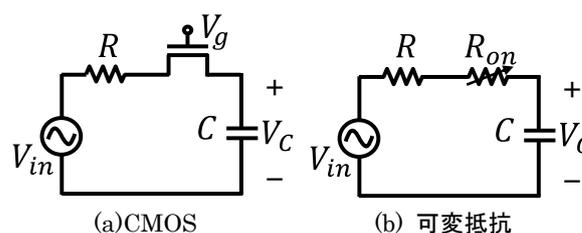


図 2 サンプリング回路

Fig.2. Sampling circuit.

解析を行う。そして MOS オン抵抗と高調波歪の影響の明示式を導出する。

〈2.2〉ON 抵抗と高調波歪の影響の明示式の導出

MOS スイッチのオン抵抗 (R_{on}) を図 3 のようにゲート・ソース間電圧 (V_g) に依存する可変抵抗として考える。入力電圧を図 4 のような場合、図 2 (b)、図 3、図 4 から次式を得ることができる。

$$I(t) = \frac{V_{in}(t) - V_{out}(t)}{R_{on}} \dots\dots\dots (1)$$

$$I(t)dt = CdV_{out}(t) \dots\dots\dots (2)$$

$$R_{on} = -\frac{R_2 - R_1}{V_{gs2} - V_{gs1}} V_{in} + R_2 \dots\dots\dots (3)$$

$$V_{in}(t) = A\sin(\omega t) + V_{DC} \dots\dots\dots (4)$$

式(1)~(4)より式(5)を得る。

$$A\sin(\omega t) + V_{DC} = C \left\{ -\frac{R_2 - R_1}{V_{gs2} - V_{gs1}} (A\sin(\omega t) + V_{DC}) + R_2 \right\} \frac{dV_{out}(t)}{dt} + V_{out} \dots\dots\dots (5)$$

式(5)の V_{out} をフーリエ級数展開する。

$$V_{out} = \beta_0 + \sum_k [\alpha_k \sin(\omega t) + \beta_k \cos(\omega t)] \dots\dots\dots (6)$$

$k = 3$ までを考慮し、 α_k, β_k について計算する。算出結果は付録に示す。算出結果から高調波が導出できる。

$$k\text{次高調波 振幅} = \sqrt{(\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2} \dots\dots\dots (7)$$

〈2.3〉 ON 抵抗と高調波歪の影響の明示式の検証

図 2(b)の回路を用いた SPICE シミュレーションにより導出式の妥当性を検証する。検証には Transient 解析を使用し、SPICE シミュレーション解析と式(7)から得られる高調波の比較を行う。SPICE 解析をするにあたり、可変抵抗は MOS スイッチと近似した電圧変化をするようにモデル化・設定した (図 5)。基にしたスイッチは TSMC 0.18 μm CMOS の $W=200\mu\text{m}$ NMOS を用いた。その他の回路パラメータは表 1 に示す。検証結果を図 6 に示すが、これより数値計算結果と解析結果が一致していることがわかる。

〈2.4〉 まとめ

サンプリング回路のトラックモードでの NMOS オン抵抗の入力電圧依存性と高調波の関係を定量的に導出し、解析結果と SPICE シミュレーション結果を比較することで導出式の妥当性を示せた。

3. 有限アパーチャ時間の影響

〈3.1〉 問題設定

図 2(a) のサンプリング回路において、トラックモードでは抵抗 R とホールド容量 C によって時定数 $\tau_1 = RC$ の帯域制限が生じる。また、スイッチのターンオフ時間 (アパーチャ時間) がゼロではなく有限の値 τ の場合は、サンプリングの際に出力電圧は入力電圧が平均化 (すなわちローパスフィルタされたもの) となり、帯域制限が生じる。この 2 つの帯域制限の影響について明示的に導出する。

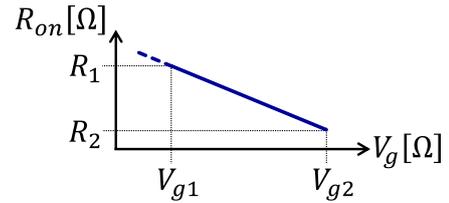


図 3 V_g と R_{on} の関係

Fig.3. Relationship between V_g and R_{on} .

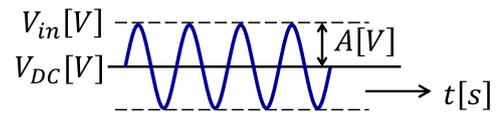


図 4 入力電圧

Fig.4. Input voltage.

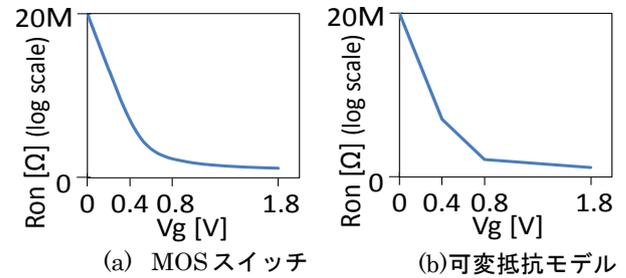


図 5 SPICE での V_g と R_{on} の関係

Fig.5. Relationship between V_g and R_{on} for SPICE simulation.

表 1 非線形性解析回路パラメータ

Table1. Circuit parameters of non-linearity analysis.

| | |
|----------|-------------|
| R | 50 Ω |
| C | 1 pF |
| V_{DC} | 0.5 V |
| V_{in} | 0.5 V |
| f_{in} | 100 MHz |

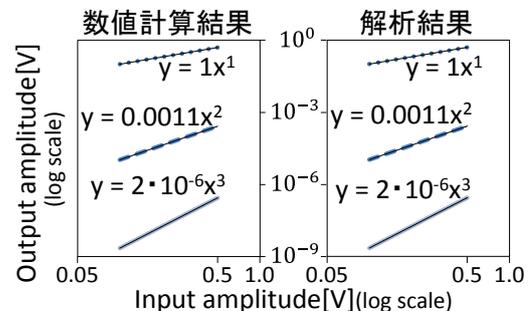


図 6 検証結果

Fig.6. Verification result. (Left) Theory. (Right) SPICE simulation results.

〈3.2〉有限アパーチャ時間の影響の明示式

サンプリング回路で上記2つの帯域制限の要因を考慮した伝達関数を導出すると次のようになる。[8][9]

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\text{sinc}(\omega\tau_2)}{\text{sinc}(\omega\tau_2) + j\omega\tau_1} \dots\dots\dots (8)$$

$$(\tau_1 = RC, \tau_2 = \tau)$$

〈3.3〉実効アパーチャ時間

図5(a)より、 R_{on} の特性が約0.4~0.8Vの範囲で大きく変化していることがわかる。そこで特性が大きく変化している電圧変化時間を実効アパーチャ時間として考える(図7)。図5(a)の縦軸を逆数表示にしたグラフを図8に示す。サブスレッショルド領域の接点と閾値電圧 V_{th} との交点を点A、式(9)とグラフとの交点を点Bとし、点A-B間の電圧差0.37Vを実効アパーチャ時間に対応する電圧差とする(図9)。

$$y = \left(y(V_{th}) - 9 \times 10^{-8} \frac{W}{L} \cdot V_{th} \right) e^{\left(\frac{x}{V_{th}} - 1 \right)} + 9 \times 10^{-8} \frac{W}{L} \cdot V_{th}$$

$$(y = 1/R_{on}, x = V_g) \dots\dots\dots (9)$$

実効アパーチャ時間の割合は0.37/1.8となる。

〈3.3〉アパーチャ時間の影響の明示式の検証

式(8)と実効アパーチャ時間を考慮した図2(a)の回路のSPICE解析結果を-3dB帯域で比較する。SPICE解析に用いた回路パラメータを表2に、比較結果を図10に示す。 T はサンプリング周期である。図10より理論値と解析結果が一致しており、式(8)及び実効アパーチャ時間の有効性を

表2 アパーチャ時間解析回路パラメータ
Table1. Circuit parameters of aperture time analysis.

| | |
|----------|-------------|
| R | 50 Ω |
| C | 1 pF |
| T | 0.1 μ s |
| V_{in} | 0.15 V |
| V_{DC} | 0.15 V |
| V_g | 0~1.8 V |

確認できた。

〈3.4〉まとめ

MOSサンプリング回路ではNMOSスイッチのオン抵抗が大きく変化するゲート電圧近傍の変化時間が実効的なアパーチャ時間として作用することが解明できた。そしてその計算式を導出し、有限アパーチャ時間の影響がSPICEシミュレーション結果と一致することを確認した。

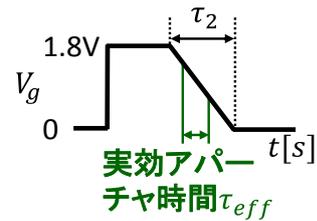


図7 ゲート電圧で見るアパーチャ時間

Fig.7. Aperture time and gate voltage.

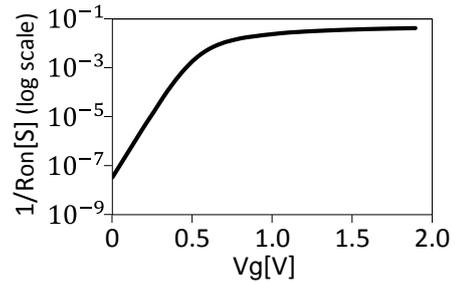


図8 V_g と $1/R_{on}$ の関係

Fig.8. Relationship between V_g and $1/R_{on}$.

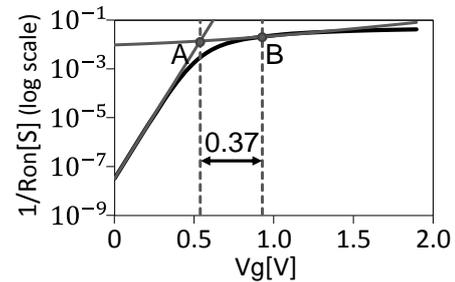


図9 グラフ上での点A, B

Fig.9. Points A, B on the graph.

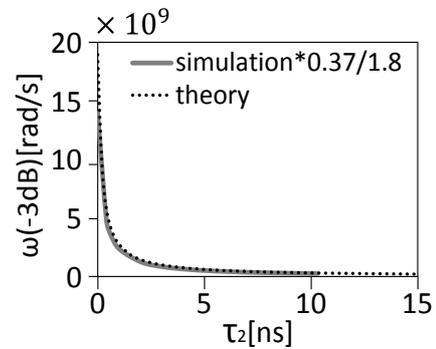


図10 アパーチャ時間検証結果

Fig.10. Aperture time formula verification result with SPICE simulation

4. サンプリング回路の不確定性関係

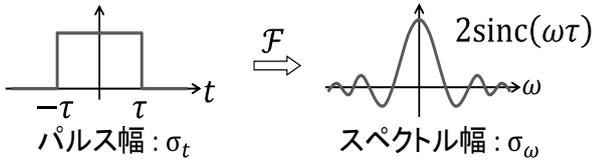


図 11 時間と周波数の不確定性関係

Fig11. Uncertainty relationships between time and frequency

時間と周波数の不確定性関係は、時間波形と周波数スペクトルのいずれをも同時に任意に小さくできないという数学的事実を述べている(図 11)[10][11]。

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \dots\dots\dots (10)$$

〈4.1〉問題設定

RC 回路の時定数 τ_1 と遮断周波数 ω_h には次の関係がある。

$$\omega_h = \frac{1}{\tau_1} \dots\dots\dots (11)$$

遮断周波数とは回路の利得が $\sqrt{1/2}$ になる周波数である。利得は伝達関数から導出することができるため、式(8)の伝達関数を用いることで、有限アパーチャ時間を考慮したサンプリング回路の不確定性関係を導出する。

〈4.2〉アパーチャ時間を考慮した不確定性関係の導出

式(8)が $\sqrt{1/2}$ の場合について考える。

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_C}{V_{in}} \right| &= \left| \frac{\text{sinc}(\omega\tau_2)}{\text{sinc}(\omega\tau_2)} + j\omega\tau_1 \right| \\ &= \sqrt{\frac{\text{sinc}^2(\omega\tau_2)}{\text{sinc}^2(\omega\tau_2) + (\omega\tau_1)^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{sinc}(\omega\tau_2) &= \omega\tau_1 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここで、sinc 関数を 2 次の項までテイラー展開する。

$$\text{sinc}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \cong 1 - \frac{1}{3!} x^2 \dots\dots\dots (13)$$

式(13)において大小関係を比較する(図 12)と、次式の結果

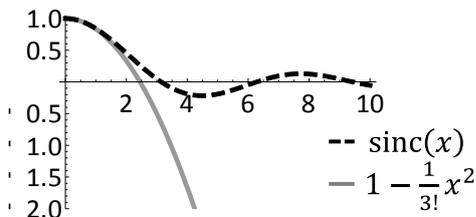


図 12 sinc 関数テイラー展開近似の比較

Fig.12. Sinc function and its Taylor expansion approximation.

を得る。

$$\text{sinc}(x) \geq 1 - \frac{1}{3!} x^2 \dots\dots\dots (14)$$

式(12), (14)より、

$$\omega\tau_1 \geq 1 - \frac{1}{3!} (\omega\tau_2)^2 \dots\dots\dots (15)$$

ここで、通過帯域・時定数を書き直すと次式を得る。

$$\sigma_\omega \sigma_{\tau_1} + \frac{1}{6} (\sigma_\omega \tau_2)^2 \geq 1 \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{cases} \omega \rightarrow \sigma_\omega \\ \tau_1 \rightarrow \sigma_{\tau_1} \end{cases}$$

〈4.3〉考察

- ローパスフィルタを設計する場合

$$\begin{cases} \sigma_\omega : \text{帯域} \\ \sigma_{\tau_1} : \text{時定数} \end{cases}$$

式(10)の不等式は帯域を狭めるには時定数を大きくしなければならないということを示している。つまり時定数を RC と考えると、帯域が狭いローパスフィルタはチップ面積を大きくしなければならないということを示している。

- 高周波信号のサンプリングの場合

$$\begin{cases} \sigma_\omega : \text{帯域} \\ \sigma_{\tau_1} : \text{アパーチャ時間} \end{cases}$$

式(10)の不等式はアパーチャ時間を小さくしなければ帯域を広くできないことは示していない。この場合、(10)式で等号が成り立つのは周波数分布、時間波形が正規分布の場合であり、この場合を考える。

$$\sigma_\tau \sigma_\omega = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (17)$$

アパーチャ時間を小さくしなければ帯域を広くできないということを示している。

- アパーチャ時間、オン抵抗の両方を考慮した高周波信号サンプリングの場合

2つの時定数を考える次式が導出できる。

$$\sigma_\omega \sigma_{\tau_1} + \frac{1}{6} (\sigma_\omega \tau_2)^2 = 1 \dots\dots\dots (18)$$

$$(\sigma_\omega : \text{帯域}, \sigma_{\tau_1} : \text{時定数}, \tau_2 : \text{アパーチャ時間})$$

オン抵抗がある場合は、同じ帯域を得るにはアパーチャ時間を小さくしなければならないことがわかる。

〈4.4〉結果

RC 時定数、アパーチャ時間、帯域のトレードオフを明確に示すことができた。つまり、サンプリング回路における不確定性関係を示すことができた。

〈4.5〉 離散フーリエ変換での時間・周波数の関係

離散フーリエ変換(Discrete Fourier Transform: DFT)には以下の関係がある。

$$T_S = 1/f_S \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{cases} f_S : \text{サンプリング周波数} \\ T_S : \text{サンプリング時間}(= \Delta t) \end{cases}$$

N 点で DFT をすると周波数分解能 Δf は

$$\Delta f = 1/(T_S \cdot N) \dots\dots\dots (20)$$

となり、

$$\Delta f \Delta t = 1/N \dots\dots\dots (21)$$

時間・周波数の関係が導出できる。

量子力学の位置と運動量の不確定性関係は信号処理における時間と周波数に対応させて考えることができる[10]。

そのため、一般的に不確定性原理は「ハイゼンベルクの不確定性原理」と「信号処理の不確定原理」のことをいう。

ここで、不確定性の基本原則を以下の3点に求めると

- ① 量子力学のハイゼンベルクの不確定性原理と類推関係
- ② シュワルツの不等式から導き出せる。
- ③ 分布の広がり問題を問題にしている。

広がり具合を Δ 偏差で表すことができる。

〈4.3〉で議論した不確定性関係は不確定性原理の一つの拡張形であると判断できる。これに対し、信号処理の不確定性原理は現象(波形)をフーリエ変換で見た時の性質であり、DFTの時間・周波数関係はフーリエ変換の性質として捉えることができる。

つまり、時間・周波数関係において〈4.3〉は厳密な意味で不確定性原理の表現、広く解釈するとどちらも時間と周波数の不確定性関係として捉えることができる。

〈4.6〉 今後の検討課題

時間と周波数の不確定性関係にプランク定数 h を取り入れることで不確定性関係に次元を与え、物理領域との繋がりを示す。

例として光と運動エネルギーの関係性について示す。時間と周波数の不確定性関係は

$$\Delta\omega\Delta\tau \geq 1/2 \dots\dots\dots (22)$$

であり、両辺に $h/2\pi$ を乗算すると次式が得られる。

$$\frac{h}{2\pi}\Delta\omega \cdot \Delta\tau \geq \frac{h}{4\pi} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、光のエネルギーは次式(24)で表せるため、

$$E = \frac{h}{2\pi} \cdot \omega \dots\dots\dots (24)$$

$$\Delta E \cdot \Delta\tau \geq \frac{h}{4\pi} \dots\dots\dots (25)$$

式(25)が得られ、フーリエ級数の不確定性関係から量子力学の不確定性原理が導出できる。この考えは光を電子に置き換えても成立するため、電子回路も不確定性原理の制約を受けるはずである。

現在、ハイゼンベルクの不確定性原理に補正項を加えた小澤の不等式が発表されている[12]。これは測定誤差 Δ と量子ゆらぎ σ の関係を定式化している。

$$\Delta x \Delta p + \sigma P \Delta x + \sigma x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \dots\dots\dots (26)$$

式(26)を時間とエネルギーの関係で考える。

$$\Delta E \Delta t + \sigma E \Delta t + \sigma t \Delta E \geq \frac{h}{4\pi} \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $\Delta t = 0$ の測定ができたとしても式(27)は

$$\sigma t \Delta E \geq \frac{h}{4\pi} \dots\dots\dots (28)$$

となり、 $E = \infty$ になることはない。そのため時間ゆらぎ σt からエネルギーの測定誤差を求めることができる。

続いて以下の測定ができた場合について考える。

$$\Delta t = \sigma t / 2, \Delta E = \sigma E / 2 \dots\dots\dots (29)$$

式(29)を式(27)に代入すると

$$\frac{5}{4} \sigma E \sigma t > \sigma E \sigma t \geq \frac{h}{4\pi} \dots\dots\dots (30)$$

となり、小澤の不等式では量子ゆらぎ1/2の精度で時間とエネルギーの測定が実現できるということを表している。つまり、ハイゼンベルクの不確定性原理より粒子の高精度な精密測定が可能になる。そこで、回路に不確定性原理の考えを取り入れ、回路測定という見地から小澤の不等式の検証をしていきたいと考えている。

5. まとめ

信号の高周波化が進むにつれてサンプリング回路の非理想特性の影響の問題は顕著となるが、それらの影響を記述する理論は確立されていない。そこで非理想特性の非線形性・アパーチャ時間に着目し、それらの明示式を導出した。そしてその妥当性について SPICE シミュレーションを用いて検証・評価を行った。

非線形性解析では MOS スイッチのオン抵抗の入力電圧依存性と高調波の影響を定量的に示し、計算結果と SPICE 解析結果が一致することを確認した。

有限アパーチャ時間の影響解析では、有限アパーチャ時間の影響を考慮した式を導出した。そして実効的なアパーチャ時間として作用する実効アパーチャ時間を考慮することで、計算結果と SPICE 解析結果が一致することを確認した。

アパーチャ時間・時定数・帯域を考慮したサンプリング回路における不確定性関係を示した。そして高周波信号サンプリングで帯域を維持するには、非理想特性であるアパーチャ時間を小さくしなければならないということを解析的に示した。

サンプリング回路における非理想特性の影響をいくつかの視点から明示的に導出し、確認することができた。

謝辞： 有意義なご討論をいただきました、Asad A Abidi 先生、小林謙介氏、大河原秀雄氏、酒寄寛氏、小室貴紀先生に感謝の意を表します。

- [1] K. Kuwabara, K. Tanno, H. Tamura, T. Toyama: "Research for High-Performances Sample-and-Hold Circuits", Memoirs of the Faculty of engineering, Miyazaki University, No.36, pp.81-87. (2007-8)
 桑原健介・淡野公一・田村宏樹・外山貴子:「サンプル・ホールド回路の高性能化に関する研究」, 宮崎大学工学部紀要, No.36 pp.81-87 (2007-8)
- [2] 上森 将文, 小林 謙介, 光野 正志, 清水 一也, 小林 春夫, 戸張 勉, 「広帯域高精度サンプリング技術」, 電子情報通信学会誌 和文誌 C vol. J90-C, no.9, pp.625-633 (2007年9月).
- [3] M. Kimura, K. Kobayashi and H. Kobayashi, "A Quasi-Coherent Sampling Method for Wideband Data Acquisition", IEICE Trans. on Fundamentals, vol. E85-A, no. 4, pp.757-763, (April 2002).
- [4] M. Kimura, A. Minegishi, K. Kobayashi, and H. Kobayashi, "A New Coherent Sampling System with a Triggered Time Interpolation", IEICE Trans. on Fundamentals, vol. E84-A, no. 3, pp.713-719 (March 2001).
- [5] H. Kobayashi, K. Kobayashi, M. Morimura, Y. Onaya, Y. Takahashi, K. Enomoto, H. Kogure: "Samplig Jitter and Finite Aperture Time Effects in Wideband Data Acquisition Systems", IEICE Trans. Fundamentals, Vol.IE85-A, no.2, pp.105-117 (2001-2)
- [6] S. Lindfors, A. Parssinen, K. A. I. Halonen: "A 3V 230-MHz CMOS Decimation Subampler", TCAS- II , Vol.50, No.30, pp.150-117(2003-3)
- [7] N. Hayasaka, H. Kobayashi, "Input-Dependent Sampling-Time Error Effects in MOS Samplers", IEICE Trans. on Electronics, E87-C, no. 6, pp.1015-1021 (June 2004).
- [8] A. A. Abidi, M. Arai, K. Niitsu, H. Kobayashi: "Finite aperture Time and Sampling Bandwidth", IEICE General Conference (2011-3)
- [9] A. A. Abidi, M. Arai, K. Niitsu, H. Kobayashi: "Finite Aperture Time Effects in Sampling Circuit", 24th IEICE Workshop on Circuits and Systems, Awaji-Shima (2011-8)
- [10] L. Cohen, Time-Frequency Analysis, Prentice Hall (1995)
- [11] M. Arai, I. Shimizu, H. Kobayashi, "Consideration of Uncertainty Principle in Sampling Circuit", 4th International Conference on Advanced Micro-Device Engineering , Kiryu (Dec. 2012)
- [12] 小澤正直 「不確定性原理・保存法則・量子計算」 日本物理学会誌 59(3), pp.157-165 (2004年3月)

付録 : 式(6)における α_k, β_k の算出結果

$$V_{out} = \beta_0 + \sum_{k=1}^3 [\alpha_k \sin(\omega t) + \beta_k \cos(\omega t)] \dots\dots\dots (6)$$

• α_1

$$\begin{aligned} & \{ A (V_{g1} - V_{g2})^2 (3 C^4 \omega^4 R_1^4 (2 A^4 - 9 A^2 V_{DC}^2 + 24 V_{DC}^4) + 2 (V_{g1} - V_{g2})^4 + C^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (7 A^2 + 26 V_{DC}^2 + 26 V_{DC}^4 + 52 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 52 V_{g1} V_{g2} + 26 V_{g2}^2) - \\ & 6 C^4 \omega^4 R_1^4 R_2 (4 A^4 - 18 A^2 V_{DC}^2 + 48 V_{DC}^4 + 48 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 9 A^2 V_{DC} (-V_{g1} + V_{g2})) + 3 C^4 \omega^4 R_2^2 (2 A^4 + 24 V_{DC}^2 + 24 V_{DC}^4 + 96 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 96 V_{g1} V_{g2} - 9 A^2 V_{g2}^2 + \\ & 24 V_{g2}^4 - 9 V_{g1}^2 (A^2 - 16 V_{DC}^2) - 9 V_{DC}^2 (A^2 - 16 V_{DC}^2 + 32 V_{g1} V_{g2} - 16 V_{g2}^2) + 6 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-3 A^2 + 16 V_{DC}^2 - 32 V_{g1} V_{g2} + 16 V_{g2}^2) + 6 V_{g1} (3 A^2 V_{g2} - 16 V_{DC}^2)) + C^2 \omega^2 R_1^2 \\ & ((7 A^2 + 26 V_{DC}^2) (V_{g1} - V_{g2})^2 + 9 C^2 \omega^2 R_2^2 (48 V_{DC}^2 - 18 A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 96 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 6 V_{DC}^2 (3 A^2 - 8 V_{DC}^2 + 16 V_{g1} V_{g2} - 8 V_{g2}^2) + A^2 (4 A^2 - 3 V_{DC}^2 + 6 V_{g1} V_{g2} - 3 V_{g2}^2))) - \\ & 2 C^2 \omega^2 R_1 R_2 ((7 A^2 + 26 V_{DC}^2 + 26 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2})) (V_{g1} - V_{g2})^2 + 3 C^2 \omega^2 R_2^2 \\ & (48 V_{DC}^2 + 144 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + A^2 (4 A^2 - 9 V_{DC}^2 + 18 V_{g1} V_{g2} - 9 V_{g2}^2) - 18 V_{DC}^2 (A^2 - 8 V_{DC}^2 + 16 V_{g1} V_{g2} - 8 V_{g2}^2) + 3 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-9 A^2 + 16 V_{DC}^2 - 32 V_{g1} V_{g2} + 16 V_{g2}^2)))) \} / \\ & (2 (9 C^6 \omega^6 R_1^2 V_{DC}^2 (A^2 - 2 V_{DC}^2)^2 - 18 C^6 \omega^6 R_1^2 R_2 V_{DC} (A^2 - 2 V_{DC}^2) (3 A^2 V_{DC} - 6 V_{DC}^2 + A^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 6 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2})) + (V_{g1} - V_{g2})^6 + \\ & 9 C^6 \omega^6 R_2^2 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2})^2 (A^2 - 2 V_{DC}^2 - 2 V_{g1}^2 - 4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 4 V_{g1} V_{g2} - 2 V_{g2}^2)^2 + 2 C^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^4 (2 A^2 + 7 V_{DC}^2 + 7 V_{DC}^4 + 14 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 14 V_{g1} V_{g2} + 7 V_{g2}^2) + \\ & C^4 \omega^4 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (4 A^4 + 49 V_{DC}^4 + 49 V_{DC}^2 + 196 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 196 V_{g1} V_{g2} - 8 A^2 V_{g2}^2 + 49 V_{g2}^4 + 4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-4 A^2 + 49 V_{DC}^2 - 98 V_{g1} V_{g2} + 49 V_{g2}^2) + \\ & V_{g1}^2 (-8 A^2 + 294 V_{DC}^2) + V_{DC}^2 (-8 A^2 + 294 V_{DC}^2 - 588 V_{g1} V_{g2} + 294 V_{g2}^2) + 4 V_{g1} (4 A^2 V_{g2} - 49 V_{g2}^2)) + C^4 \omega^4 R_1^2 ((4 A^4 - 8 A^2 V_{DC}^2 + 49 V_{DC}^4) (V_{g1} - V_{g2})^2 + 9 C^2 \omega^2 R_2^2 \\ & (60 V_{DC}^2 + 10 A^4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 80 A^2 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 120 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + A^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 + 3 A^2 V_{DC} (5 A^2 - 8 V_{DC}^2 + 16 V_{g1} V_{g2} - 8 V_{g2}^2) - 60 V_{DC}^2 (A^2 - V_{DC}^2 + 2 V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2))) - \\ & 4 C^4 \omega^4 R_1^2 R_2 ((V_{g1} - V_{g2})^2 (4 A^4 - 8 A^2 V_{DC}^2 + 49 V_{DC}^4 + 49 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 4 A^2 V_{DC} (-V_{g1} + V_{g2})) + 9 C^2 \omega^2 R_2^2 (20 V_{DC}^2 + 60 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + A^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 + A^2 V_{DC} (5 A^2 - 24 V_{DC}^2 + \\ & 48 V_{g1} V_{g2} - 24 V_{g2}^2) + A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (5 A^2 - 4 V_{DC}^2 + 8 V_{g1} V_{g2} - 4 V_{g2}^2) - 20 V_{DC}^2 (A^2 - 3 V_{DC}^2 + 6 V_{g1} V_{g2} - 3 V_{g2}^2) + 20 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) (-2 A^2 + V_{DC}^2 - 2 V_{g1} V_{g2} + V_{g2}^2))) - \\ & 2 C^2 \omega^2 R_1 R_2 (2 (2 A^2 + 7 V_{DC}^2 + 7 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2})) (V_{g1} - V_{g2})^4 + 2 C^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (49 V_{DC}^2 + 147 V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) + 4 A^2 (A^2 - V_{DC}^2 + 2 V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2) + \\ & V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-12 A^2 + 49 V_{DC}^2 - 98 V_{g1} V_{g2} + 49 V_{g2}^2) + V_{DC}^2 (-8 A^2 + 147 V_{DC}^2 - 294 V_{g1} V_{g2} + 147 V_{g2}^2)) + 9 C^4 \omega^4 R_2^2 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2}) \\ & (12 V_{DC}^2 + 48 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 12 V_{DC}^2 (A^2 - 6 V_{DC}^2 + 12 V_{g1} V_{g2} - 6 V_{g2}^2) + 2 A^2 (V_{g1} - V_{g2}) (A^2 - 2 V_{DC}^2 + 4 V_{g1} V_{g2} - 2 V_{g2}^2) + 4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-7 A^2 + 12 V_{DC}^2 - 24 V_{g1} V_{g2} + 12 V_{g2}^2) + \\ & V_{DC} (3 A^4 + 12 V_{DC}^4 - 48 V_{DC}^2 V_{g2} - 20 A^2 V_{g2}^2 + 12 V_{g2}^4 + V_{g1}^2 (-20 A^2 + 72 V_{DC}^2) + 8 V_{g1} (5 A^2 V_{g2} - 6 V_{g2}^2)))) + C^2 \omega^2 R_1^2 (2 (2 A^2 + 7 V_{DC}^2) (V_{g1} - V_{g2})^4 + \\ & 2 C^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (147 V_{DC}^2 - 24 A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 294 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 3 V_{DC}^2 (8 A^2 - 49 V_{DC}^2 + 98 V_{g1} V_{g2} - 49 V_{g2}^2) + 4 A^2 (3 A^2 - V_{DC}^2 + 2 V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2)) + 9 C^4 \omega^4 \\ & R_2^2 (60 V_{DC}^2 + 240 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 4 A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (5 A^2 - 12 V_{DC}^2 + 24 V_{g1} V_{g2} - 12 V_{g2}^2) - 60 V_{DC}^2 (A^2 - 6 V_{DC}^2 + 12 V_{g1} V_{g2} - 6 V_{g2}^2) + 2 A^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (3 A^2 - 2 V_{DC}^2 + 4 V_{g1} V_{g2} - \\ & 2 V_{g2}^2) + 80 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) (-2 A^2 + 3 V_{DC}^2 - 6 V_{g1} V_{g2} + 3 V_{g2}^2) + 3 V_{DC}^2 (5 A^4 + 20 V_{DC}^4 - 80 V_{DC}^2 V_{g2} - 48 A^2 V_{g2}^2 + 20 V_{g2}^4 - 24 V_{DC}^2 (2 A^2 - 5 V_{DC}^2) + 16 V_{g1} (6 A^2 V_{g2} - 5 V_{g2}^2)))) \} \end{aligned}$$

• α_2

$$\begin{aligned} & \{ A^2 C \omega (R_1 - R_2) (V_{g1} - V_{g2}) (9 C^4 \omega^4 R_1^4 V_{DC}^2 (A^2 - 2 V_{DC}^2) - 18 C^4 \omega^4 R_1^2 R_2 V_{DC} (2 A^2 V_{DC} - 4 V_{DC}^2 + A^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2})) + (V_{g1} - V_{g2})^4 + \\ & 9 C^4 \omega^4 R_2^2 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2})^2 (A^2 - 2 V_{DC}^2 - 2 V_{g1}^2 - 4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 4 V_{g1} V_{g2} - 2 V_{g2}^2) + C^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (2 A^2 + 7 V_{DC}^2 + 7 V_{DC}^4 + 14 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 14 V_{g1} V_{g2} + 7 V_{g2}^2) - \\ & 2 C^2 \omega^2 R_1 R_2 ((2 A^2 + 7 V_{DC}^2 + 7 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2})) (V_{g1} - V_{g2})^2 - 9 C^2 \omega^2 R_2^2 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2}) (4 V_{DC}^2 + 8 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + A^2 (-V_{g1} + V_{g2}) - 2 V_{DC} (A^2 - 2 V_{DC}^2 + 4 V_{g1} V_{g2} - 2 V_{g2}^2))) + \\ & C^2 \omega^2 R_1^2 ((2 A^2 + 7 V_{DC}^2) (V_{g1} - V_{g2})^2 + 9 C^2 \omega^2 R_2^2 (-12 V_{DC}^2 + 6 A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 24 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + A^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 + 6 V_{DC} (A^2 - 2 V_{DC}^2 + 4 V_{g1} V_{g2} - 2 V_{g2}^2)))) \} / \\ & (2 (9 C^6 \omega^6 R_1^2 V_{DC}^2 (A^2 - 2 V_{DC}^2)^2 - 18 C^6 \omega^6 R_1^2 R_2 V_{DC} (A^2 - 2 V_{DC}^2) (3 A^2 V_{DC} - 6 V_{DC}^2 + A^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 6 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2})) + (V_{g1} - V_{g2})^6 + \\ & 9 C^6 \omega^6 R_2^2 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2})^2 (A^2 - 2 V_{DC}^2 - 2 V_{g1}^2 - 4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 4 V_{g1} V_{g2} - 2 V_{g2}^2)^2 + 2 C^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^4 (2 A^2 + 7 V_{DC}^2 + 7 V_{DC}^4 + 14 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 14 V_{g1} V_{g2} + 7 V_{g2}^2) + \\ & C^4 \omega^4 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (4 A^4 + 49 V_{DC}^4 + 49 V_{DC}^2 + 196 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 196 V_{g1} V_{g2} - 8 A^2 V_{g2}^2 + 49 V_{g2}^4 + 4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-4 A^2 + 49 V_{DC}^2 - 98 V_{g1} V_{g2} + 49 V_{g2}^2) + \\ & V_{g1}^2 (-8 A^2 + 294 V_{DC}^2) + V_{DC}^2 (-8 A^2 + 294 V_{DC}^2 - 588 V_{g1} V_{g2} + 294 V_{g2}^2) + 4 V_{g1} (4 A^2 V_{g2} - 49 V_{g2}^2)) + C^4 \omega^4 R_1^2 ((4 A^4 - 8 A^2 V_{DC}^2 + 49 V_{DC}^4) (V_{g1} - V_{g2})^2 + 9 C^2 \omega^2 R_2^2 \\ & (60 V_{DC}^2 + 10 A^4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 80 A^2 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 120 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + A^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 + 3 A^2 V_{DC} (5 A^2 - 8 V_{DC}^2 + 16 V_{g1} V_{g2} - 8 V_{g2}^2) - 60 V_{DC}^2 (A^2 - V_{DC}^2 + 2 V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2))) - \\ & 4 C^4 \omega^4 R_1^2 R_2 ((V_{g1} - V_{g2})^2 (4 A^4 - 8 A^2 V_{DC}^2 + 49 V_{DC}^4 + 49 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 4 A^2 V_{DC} (-V_{g1} + V_{g2})) + 9 C^2 \omega^2 R_2^2 (20 V_{DC}^2 + 60 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + A^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 + A^2 V_{DC} (5 A^2 - 24 V_{DC}^2 + \\ & 48 V_{g1} V_{g2} - 24 V_{g2}^2) + A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (5 A^2 - 4 V_{DC}^2 + 8 V_{g1} V_{g2} - 4 V_{g2}^2) - 20 V_{DC}^2 (A^2 - 3 V_{DC}^2 + 6 V_{g1} V_{g2} - 3 V_{g2}^2) + 20 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) (-2 A^2 + V_{DC}^2 - 2 V_{g1} V_{g2} + V_{g2}^2))) - \\ & 2 C^2 \omega^2 R_1 R_2 (2 (2 A^2 + 7 V_{DC}^2 + 7 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2})) (V_{g1} - V_{g2})^4 + 2 C^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (49 V_{DC}^2 + 147 V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) + 4 A^2 (A^2 - V_{DC}^2 + 2 V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2) + \\ & V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-12 A^2 + 49 V_{DC}^2 - 98 V_{g1} V_{g2} + 49 V_{g2}^2) + V_{DC}^2 (-8 A^2 + 147 V_{DC}^2 - 294 V_{g1} V_{g2} + 147 V_{g2}^2)) + 9 C^4 \omega^4 R_2^2 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2}) \\ & (12 V_{DC}^2 + 48 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 12 V_{DC}^2 (A^2 - 6 V_{DC}^2 + 12 V_{g1} V_{g2} - 6 V_{g2}^2) + 2 A^2 (V_{g1} - V_{g2}) (A^2 - 2 V_{DC}^2 + 4 V_{g1} V_{g2} - 2 V_{g2}^2) + 4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-7 A^2 + 12 V_{DC}^2 - 24 V_{g1} V_{g2} + 12 V_{g2}^2) + \\ & V_{DC} (3 A^4 + 12 V_{DC}^4 - 48 V_{DC}^2 V_{g2} - 20 A^2 V_{g2}^2 + 12 V_{g2}^4 + V_{g1}^2 (-20 A^2 + 72 V_{DC}^2) + 8 V_{g1} (5 A^2 V_{g2} - 6 V_{g2}^2)))) + C^2 \omega^2 R_1^2 (2 (2 A^2 + 7 V_{DC}^2) (V_{g1} - V_{g2})^4 + \\ & 2 C^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (147 V_{DC}^2 - 24 A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 294 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 3 V_{DC}^2 (8 A^2 - 49 V_{DC}^2 + 98 V_{g1} V_{g2} - 49 V_{g2}^2) + 4 A^2 (3 A^2 - V_{DC}^2 + 2 V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2)) + 9 C^4 \omega^4 \\ & R_2^2 (60 V_{DC}^2 + 240 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 4 A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (5 A^2 - 12 V_{DC}^2 + 24 V_{g1} V_{g2} - 12 V_{g2}^2) - 60 V_{DC}^2 (A^2 - 6 V_{DC}^2 + 12 V_{g1} V_{g2} - 6 V_{g2}^2) + 2 A^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (3 A^2 - 2 V_{DC}^2 + 4 V_{g1} V_{g2} - \\ & 2 V_{g2}^2) + 80 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) (-2 A^2 + 3 V_{DC}^2 - 6 V_{g1} V_{g2} + 3 V_{g2}^2) + 3 V_{DC}^2 (5 A^4 + 20 V_{DC}^4 - 80 V_{DC}^2 V_{g2} - 48 A^2 V_{g2}^2 + 20 V_{g2}^4 - 24 V_{DC}^2 (2 A^2 - 5 V_{DC}^2) + 16 V_{g1} (6 A^2 V_{g2} - 5 V_{g2}^2)))) \} \end{aligned}$$

• α_3

$$\begin{aligned}
 & \left(\lambda^3 c^2 \omega^2 (R_1 - R_2)^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 \left(c^2 \omega^2 R_1^2 (2A^2 - 11V_{DC}^2) + 2c^2 \omega^2 R_1 R_2 (-2A^2 + 11V_{DC}^2 + 11V_{DC} (V_{g1} - V_{g2})) \right) + (V_{g1} - V_{g2})^2 + \right. \\
 & \left. c^2 \omega^2 R_2^2 (2A^2 - 11V_{DC}^2 - 11V_{g1}^2 - 22V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 22V_{g1} V_{g2} - 11V_{g2}^2) \right) / \\
 & \left(2 \left(9c^6 \omega^6 R_1^5 V_{DC}^2 (A^2 - 2V_{DC}^2)^2 - 18c^6 \omega^6 R_1^5 R_2 V_{DC} (A^2 - 2V_{DC}^2) \left(3A^2 V_{DC} - 6V_{DC}^3 + A^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 6V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) \right) + (V_{g1} - V_{g2})^6 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 9c^6 \omega^6 R_2^5 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2})^2 (A^2 - 2V_{DC}^2 - 2V_{g1}^2 - 4V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 4V_{g1} V_{g2} - 2V_{g2}^2)^2 + 2c^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^4 \left(2A^2 + 7V_{DC}^2 + 7V_{g1}^2 + 14V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 14V_{g1} V_{g2} + 7V_{g2}^2 \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. c^4 \omega^4 R_2^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 \left(4A^4 + 49V_{DC}^4 + 49V_{g1}^4 + 196V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 196V_{g1}^3 V_{g2} - 8A^2 V_{g2}^2 + 49V_{g2}^4 + 4V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) \left(-4A^2 + 49V_{g1}^2 - 98V_{g1} V_{g2} + 49V_{g2}^2 \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. V_{g1}^2 (-8A^2 + 294V_{g2}^2) + V_{DC}^2 (-8A^2 + 294V_{g1}^2 - 588V_{g1} V_{g2} + 294V_{g2}^2) + 4V_{g1} (4A^2 V_{g2} - 49V_{g2}^2) \right) + c^4 \omega^4 R_1^4 \left((4A^4 - 8A^2 V_{DC}^2 + 49V_{DC}^4) (V_{g1} - V_{g2})^2 + 9c^2 \omega^2 R_2^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. (60V_{DC}^2 + 10A^4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 80A^2 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 120V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) + A^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 + 3A^2 V_{DC}^2 (5A^2 - 8V_{g1}^2 + 16V_{g1} V_{g2} - 8V_{g2}^2) - 60V_{DC}^4 (A^2 - V_{g1}^2 + 2V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2) \right) \right) - \\
 & \left. 4c^4 \omega^4 R_1^3 R_2 \left((V_{g1} - V_{g2})^2 \left(4A^4 - 8A^2 V_{DC}^2 + 49V_{DC}^4 + 49V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 4A^2 V_{DC} (-V_{g1} + V_{g2}) \right) + 9c^2 \omega^2 R_2^2 (20V_{DC}^2 + 60V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) + A^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 + A^2 V_{DC}^2 (5A^2 - 24V_{g1}^2 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. 48V_{g1} V_{g2} - 24V_{g2}^2) + A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (5A^2 - 4V_{g1}^2 + 8V_{g1} V_{g2} - 4V_{g2}^2) - 20V_{DC}^4 (A^2 - 3V_{g1}^2 + 6V_{g1} V_{g2} - 3V_{g2}^2) + 20V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) (-2A^2 + V_{g1}^2 - 2V_{g1} V_{g2} + V_{g2}^2) \right) \right) - \\
 & \left. 2c^2 \omega^2 R_1 R_2 \left(2 \left(2A^2 + 7V_{DC}^2 + 7V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) \right) (V_{g1} - V_{g2})^4 + 2c^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (49V_{DC}^4 + 147V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) + 4A^2 (A^2 - V_{g1}^2 + 2V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-12A^2 + 49V_{g1}^2 - 98V_{g1} V_{g2} + 49V_{g2}^2) + V_{DC}^2 (-8A^2 + 147V_{g1}^2 - 294V_{g1} V_{g2} + 147V_{g2}^2) \right) + 9c^4 \omega^4 R_2^4 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2}) \right. \\
 & \left. (12V_{DC}^2 + 48V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) - 12V_{DC}^4 (A^2 - 6V_{g1}^2 + 12V_{g1} V_{g2} - 6V_{g2}^2) + 2A^2 (V_{g1} - V_{g2}) (A^2 - 2V_{g1}^2 + 4V_{g1} V_{g2} - 2V_{g2}^2) + 4V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) (-7A^2 + 12V_{g1}^2 - 24V_{g1} V_{g2} + 12V_{g2}^2) + \right. \\
 & \left. V_{DC} (3A^4 + 12V_{g1}^4 - 48V_{g1}^3 V_{g2} - 20A^2 V_{g2}^2 + 12V_{g2}^4 + V_{g1}^2 (-20A^2 + 72V_{g2}^2) + 8V_{g1} (5A^2 V_{g2} - 6V_{g2}^3)) \right) + c^2 \omega^2 R_1^2 \left(2 \left(2A^2 + 7V_{DC}^2 \right) (V_{g1} - V_{g2})^4 + \right. \\
 & \left. 2c^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (147V_{DC}^4 - 24A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 294V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) - 3V_{DC}^4 (8A^2 - 49V_{g1}^2 + 98V_{g1} V_{g2} - 49V_{g2}^2) + 4A^2 (3A^2 - V_{g1}^2 + 2V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2) \right) + 9c^4 \omega^4 \\
 & \left. R_2^4 (60V_{DC}^2 + 240V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) + 4A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (5A^2 - 12V_{g1}^2 + 24V_{g1} V_{g2} - 12V_{g2}^2) - 60V_{DC}^4 (A^2 - 6V_{g1}^2 + 12V_{g1} V_{g2} - 6V_{g2}^2) + 2A^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (3A^2 - 2V_{g1}^2 + 4V_{g1} V_{g2} - \right. \\
 & \left. 2V_{g2}^2) + 80V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) (-2A^2 + 3V_{g1}^2 - 6V_{g1} V_{g2} + 3V_{g2}^2) + 3V_{DC}^4 (5A^4 + 20V_{g1}^4 - 80V_{g1}^3 V_{g2} - 48A^2 V_{g2}^2 + 20V_{g2}^4 - 24V_{g1}^2 (2A^2 - 5V_{g2}^2) + 16V_{g1} (6A^2 V_{g2} - 5V_{g2}^3)) \right) \left. \right) \left. \right)
 \end{aligned}$$

• β_0

$$\begin{aligned}
 & (-9c^6 \omega^6 R_1^5 V_{DC} (A^6 - 10A^4 V_{DC}^2 + 24A^2 V_{DC}^4 - 16V_{DC}^6) + 9c^6 \omega^6 R_1^5 R_2 (6A^6 V_{DC} - 60A^4 V_{DC}^3 + 144A^2 V_{DC}^5 - 96V_{DC}^7 + A^6 (V_{g1} - V_{g2}) - 26A^4 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + \\
 & 104A^2 V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) - 96V_{DC}^6 (V_{g1} - V_{g2})) + \\
 & 4V_{DC} (V_{g1} - V_{g2})^6 + 2c^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^4 (28V_{DC}^3 + 56V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) + A^2 (-V_{g1} + V_{g2}) + 7V_{DC} (A^2 + 4V_{g1}^2 - 8V_{g1} V_{g2} + 4V_{g2}^2)) + \\
 & 2c^4 \omega^4 R_1^3 R_2 \left((-24A^4 V_{DC} + 116A^2 V_{DC}^3 - 392V_{DC}^5 + 2A^4 (V_{g1} - V_{g2}) + 71A^2 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 392V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) \right) (V_{g1} - V_{g2})^2 + \\
 & 9c^2 \omega^2 R_2^2 (-160V_{DC}^2 - 480V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) - 4A^2 V_{DC}^2 (25A^2 - 88V_{g1}^2 + 176V_{g1} V_{g2} - 88V_{g2}^2) - 2A^2 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) (65A^2 - 36V_{g1}^2 + 72V_{g1} V_{g2} - 36V_{g2}^2) + 2A^4 V_{DC} (5A^2 - 22V_{g1}^2 + 44 \\
 & V_{g1} V_{g2} - 22V_{g2}^2) + 40V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) (13A^2 - 4V_{g1}^2 + 8V_{g1} V_{g2} - 4V_{g2}^2) + A^4 (V_{g1} - V_{g2}) (5A^2 - 3V_{g1}^2 + 6V_{g1} V_{g2} - 3V_{g2}^2) + 240V_{DC}^3 (A^2 - 2V_{g1}^2 + 4V_{g1} V_{g2} - 2V_{g2}^2)) \left. \right) + \\
 & c^4 \omega^4 R_1^4 \left(2V_{DC} (6A^4 - 29A^2 V_{DC}^2 + 98V_{DC}^4) (V_{g1} - V_{g2})^2 - 9c^2 \omega^2 R_2^2 (-240V_{DC}^2 + 5A^6 (V_{g1} - V_{g2}) - 130A^4 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 520A^2 V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) - 480V_{DC}^6 (V_{g1} - V_{g2}) - \right. \\
 & \left. 2A^2 V_{DC}^3 (75A^2 - 88V_{g1}^2 + 176V_{g1} V_{g2} - 88V_{g2}^2) + A^4 V_{DC} (15A^2 - 22V_{g1}^2 + 44V_{g1} V_{g2} - 22V_{g2}^2) + 120V_{DC}^5 (3A^2 - 2V_{g1}^2 + 4V_{g1} V_{g2} - 2V_{g2}^2) \right) + \\
 & 2c^4 \omega^4 R_1^3 (V_{g1} - V_{g2})^2 (98V_{DC}^3 + 392V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) - A^2 (V_{g1} - V_{g2}) (2A^2 + 13V_{g1}^2 - 26V_{g1} V_{g2} + 13V_{g2}^2) + V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) (-71A^2 + 392V_{g1}^2 - 784V_{g1} V_{g2} + 392V_{g2}^2) + \\
 & V_{DC}^3 (-29A^2 + 588V_{g1}^2 - 1176V_{g1} V_{g2} + 588V_{g2}^2) + V_{DC} (6A^4 + 98V_{g1}^4 - 392V_{g1}^3 V_{g2} - 55A^2 V_{g2}^2 + 98V_{g2}^4 + V_{g1}^2 (-55A^2 + 588V_{g2}^2) + 2V_{g1} (55A^2 V_{g2} - 196V_{g2}^3)) \left. \right) + \\
 & 9c^6 \omega^6 R_2^5 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2}) (16V_{DC}^2 + 80V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) - 8V_{DC}^4 (3A^2 - 20V_{g1}^2 + 40V_{g1} V_{g2} - 20V_{g2}^2) - 80V_{DC}^5 (V_{g1} - V_{g2}) (A^2 - 2V_{g1}^2 + 4V_{g1} V_{g2} - 2V_{g2}^2) - \\
 & A^2 (A^4 + 8V_{g1}^4 - 32V_{g1}^3 V_{g2} - 6A^2 V_{g2}^2 + 8V_{g2}^4 - 6V_{g1}^2 (A^2 - 8V_{g2}^2) + 4V_{g1} (3A^2 V_{g2} - 8V_{g2}^3)) + \\
 & 2V_{DC}^2 (5A^4 + 40V_{g1}^4 - 160V_{g1}^3 V_{g2} - 48A^2 V_{g2}^2 + 40V_{g2}^4 - 48V_{g1}^2 (A^2 - 5V_{g2}^2) + 32V_{g1} (3A^2 V_{g2} - 5V_{g2}^3)) + \\
 & 16V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (A^4 + V_{g1}^4 - 4V_{g1}^3 V_{g2} - 3A^2 V_{g2}^2 + V_{g2}^4 - 3V_{g1}^2 (A^2 - 2V_{g2}^2) + V_{g1} (6A^2 V_{g2} - 4V_{g2}^3)) \left. \right) + \\
 & c^2 \omega^2 R_1^2 \left(14V_{DC} (A^2 + 4V_{DC}^2) (V_{g1} - V_{g2})^4 + 2c^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (588V_{DC}^3 - 213A^2 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 1176V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) + 6A^4 (-V_{g1} + V_{g2}) - \right. \\
 & \left. 6V_{DC}^2 (29A^2 - 98V_{g1}^2 + 196V_{g1} V_{g2} - 98V_{g2}^2) + A^2 V_{DC} (36A^2 - 55V_{g1}^2 + 110V_{g1} V_{g2} - 55V_{g2}^2) \right) - \\
 & 9c^4 \omega^4 R_2^4 (-240V_{DC}^2 - 960V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) - 4A^2 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) (65A^2 - 108V_{g1}^2 + 216V_{g1} V_{g2} - 108V_{g2}^2) + 80V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) (13A^2 - 12V_{g1}^2 + 24V_{g1} V_{g2} - 12V_{g2}^2) + \\
 & 2A^4 (V_{g1} - V_{g2}) (5A^2 - 9V_{g1}^2 + 18V_{g1} V_{g2} - 9V_{g2}^2) + 360V_{DC}^3 (A^2 - 4V_{g1}^2 + 8V_{g1} V_{g2} - 4V_{g2}^2) + A^2 V_{DC} (15A^4 + 56V_{g1}^4 - 224V_{g1}^3 V_{g2} - 132A^2 V_{g2}^2 + 56V_{g2}^4 + V_{g1}^2 \\
 & (-132A^2 + 336V_{g2}^2) + 8V_{g1} (33A^2 V_{g2} - 28V_{g2}^3)) - 6V_{DC}^4 (25A^4 + 40V_{g1}^4 - 160V_{g1}^3 V_{g2} - 176A^2 V_{g2}^2 + 40V_{g2}^4 + V_{g1}^2 (-176A^2 + 240V_{g2}^2) + 32V_{g1} (11A^2 V_{g2} - 5V_{g2}^3)) \left. \right) + \\
 & c^2 \omega^2 R_1 R_2 \left(-2(V_{g1} - V_{g2})^4 (14A^2 V_{DC} + 56V_{DC}^3 + 56V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) + A^2 (-V_{g1} + V_{g2})) + 2c^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (-392V_{DC}^3 - 1176V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) + \right. \\
 & V_{DC}^2 (213A^2 - 392V_{g1}^2 + 784V_{g1} V_{g2} - 392V_{g2}^2) + 4V_{DC}^3 (29A^2 - 294V_{g1}^2 + 588V_{g1} V_{g2} - 294V_{g2}^2) - 2A^2 V_{DC} (12A^2 - 55V_{g1}^2 + 110V_{g1} V_{g2} - 55V_{g2}^2) + \\
 & A^2 (V_{g1} - V_{g2}) (6A^2 + 13V_{g1}^2 - 26V_{g1} V_{g2} + 13V_{g2}^2) \left. \right) + 9c^4 \omega^4 R_2^4 (-96V_{DC}^2 - 480V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) + 40V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) (13A^2 - 24V_{g1}^2 + 48V_{g1} V_{g2} - 24V_{g2}^2) + \\
 & 48V_{DC}^5 (3A^2 - 20V_{g1}^2 + 40V_{g1} V_{g2} - 20V_{g2}^2) + 2A^2 V_{DC} (3A^4 + 56V_{g1}^4 - 224V_{g1}^3 V_{g2} - 44A^2 V_{g2}^2 + 56V_{g2}^4 + V_{g1}^2 (-44A^2 + 336V_{g2}^2) + 8V_{g1} (11A^2 V_{g2} - 28V_{g2}^3)) - \\
 & 4V_{DC}^3 (15A^4 + 120V_{g1}^4 - 480V_{g1}^3 V_{g2} - 176A^2 V_{g2}^2 + 120V_{g2}^4 + V_{g1}^2 (-176A^2 + 720V_{g2}^2) + 32V_{g1} (11A^2 V_{g2} - 15V_{g2}^3)) + A^2 (V_{g1} - V_{g2}) (5A^4 + 8V_{g1}^4 - 32V_{g1}^3 V_{g2} - 18A^2 V_{g2}^2 + 8V_{g2}^4 + \\
 & V_{g1}^2 (3A^2 - 8V_{g2}^2) + 4V_{g1} (9A^2 V_{g2} - 8V_{g2}^3)) - 2V_{DC}^4 (V_{g1} - V_{g2}) (65A^4 + 48V_{g1}^4 - 192V_{g1}^3 V_{g2} - 216A^2 V_{g2}^2 + 48V_{g2}^4 - 72V_{g1}^2 (3A^2 - 4V_{g2}^2) + 48V_{g1} (9A^2 V_{g2} - 4V_{g2}^3)) \left. \right) \left. \right) / \\
 & \left(4 \left(9c^6 \omega^6 R_1^5 V_{DC}^2 (A^2 - 2V_{DC}^2)^2 - 18c^6 \omega^6 R_1^5 R_2 V_{DC} (A^2 - 2V_{DC}^2) \left(3A^2 V_{DC} - 6V_{DC}^3 + A^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 6V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) \right) + (V_{g1} - V_{g2})^6 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 9c^6 \omega^6 R_2^5 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2})^2 (A^2 - 2V_{DC}^2 - 2V_{g1}^2 - 4V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 4V_{g1} V_{g2} - 2V_{g2}^2)^2 + 2c^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^4 \left(2A^2 + 7V_{DC}^2 + 7V_{g1}^2 + 14V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 14V_{g1} V_{g2} + 7V_{g2}^2 \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. c^4 \omega^4 R_2^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 \left(4A^4 + 49V_{DC}^4 + 49V_{g1}^4 + 196V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) - 196V_{g1}^3 V_{g2} - 8A^2 V_{g2}^2 + 49V_{g2}^4 + 4V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) \left(-4A^2 + 49V_{g1}^2 - 98V_{g1} V_{g2} + 49V_{g2}^2 \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. V_{g1}^2 (-8A^2 + 294V_{g2}^2) + V_{DC}^2 (-8A^2 + 294V_{g1}^2 - 588V_{g1} V_{g2} + 294V_{g2}^2) + 4V_{g1} (4A^2 V_{g2} - 49V_{g2}^2) \right) + c^4 \omega^4 R_1^4 \left((4A^4 - 8A^2 V_{DC}^2 + 49V_{DC}^4) (V_{g1} - V_{g2})^2 + 9c^2 \omega^2 R_2^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. (60V_{DC}^2 + 10A^4 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) - 80A^2 V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 120V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) + A^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 + 3A^2 V_{DC}^2 (5A^2 - 8V_{g1}^2 + 16V_{g1} V_{g2} - 8V_{g2}^2) - 60V_{DC}^4 (A^2 - V_{g1}^2 + 2V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2) \right) \right) - \\
 & \left. 4c^4 \omega^4 R_1^3 R_2 \left((V_{g1} - V_{g2})^2 \left(4A^4 - 8A^2 V_{DC}^2 + 49V_{DC}^4 + 49V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) + 4A^2 V_{DC} (-V_{g1} + V_{g2}) \right) + 9c^2 \omega^2 R_2^2 (20V_{DC}^2 + 60V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) + A^4 (V_{g1} - V_{g2})^2 + A^2 V_{DC}^2 (5A^2 - 24V_{g1}^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. 48V_{g1} V_{g2} - 24V_{g2}^2) + A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (5A^2 - 4V_{g1}^2 + 8V_{g1} V_{g2} - 4V_{g2}^2) - 20V_{DC}^4 (A^2 - 3V_{g1}^2 + 6V_{g1} V_{g2} - 3V_{g2}^2) + 20V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) (-2A^2 + V_{g1}^2 - 2V_{g1} V_{g2} + V_{g2}^2) \right) \right) - \\
 & \left. 2c^2 \omega^2 R_1 R_2 \left(2 \left(2A^2 + 7V_{DC}^2 + 7V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) \right) (V_{g1} - V_{g2})^4 + 2c^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (49V_{DC}^4 + 147V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) + 4A^2 (A^2 - V_{g1}^2 + 2V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (-12A^2 + 49V_{g1}^2 - 98V_{g1} V_{g2} + 49V_{g2}^2) + V_{DC}^2 (-8A^2 + 147V_{g1}^2 - 294V_{g1} V_{g2} + 147V_{g2}^2) \right) + 9c^4 \omega^4 R_2^4 (V_{DC} + V_{g1} - V_{g2}) \right. \\
 & \left. (12V_{DC}^2 + 48V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) - 12V_{DC}^4 (A^2 - 6V_{g1}^2 + 12V_{g1} V_{g2} - 6V_{g2}^2) + 2A^2 (V_{g1} - V_{g2}) (A^2 - 2V_{g1}^2 + 4V_{g1} V_{g2} - 2V_{g2}^2) + 4V_{DC}^2 (V_{g1} - V_{g2}) (-7A^2 + 12V_{g1}^2 - 24V_{g1} V_{g2} + 12V_{g2}^2) + \right. \\
 & \left. V_{DC} (3A^4 + 12V_{g1}^4 - 48V_{g1}^3 V_{g2} - 20A^2 V_{g2}^2 + 12V_{g2}^4 + V_{g1}^2 (-20A^2 + 72V_{g2}^2) + 8V_{g1} (5A^2 V_{g2} - 6V_{g2}^3)) \right) + c^2 \omega^2 R_1^2 \left(2 \left(2A^2 + 7V_{DC}^2 \right) (V_{g1} - V_{g2})^4 + \right. \\
 & \left. 2c^2 \omega^2 R_2^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (147V_{DC}^4 - 24A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) + 294V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) - 3V_{DC}^4 (8A^2 - 49V_{g1}^2 + 98V_{g1} V_{g2} - 49V_{g2}^2) + 4A^2 (3A^2 - V_{g1}^2 + 2V_{g1} V_{g2} - V_{g2}^2) \right) + 9c^4 \omega^4 \\
 & \left. R_2^4 (60V_{DC}^2 + 240V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) + 4A^2 V_{DC} (V_{g1} - V_{g2}) (5A^2 - 12V_{g1}^2 + 24V_{g1} V_{g2} - 12V_{g2}^2) - 60V_{DC}^4 (A^2 - 6V_{g1}^2 + 12V_{g1} V_{g2} - 6V_{g2}^2) + 2A^2 (V_{g1} - V_{g2})^2 (3A^2 - 2V_{g1}^2 + 4V_{g1} V_{g2} - \right. \\
 & \left. 2V_{g2}^2) + 80V_{DC}^3 (V_{g1} - V_{g2}) (-2A^2 + 3V_{g1}^2 - 6V_{g1} V_{g2} + 3V_{g2}^2) + 3V_{DC}^4 (5A^4 + 20V_{g1}^4 - 80V_{g1}^3 V_{g2} - 48A^2 V_{g2}^2 + 20V_{g2}^4 - 24V_{g1}^2 (2A^2 - 5V_{g2}^2) + 16V_{g1} (6A^2 V_{g2} - 5V_{g2}^3)) \right) \left. \right) \left. \right)
 \end{aligned}$$

