

DC-DC コンバータにおける回路の平均化 および平均化されたスイッチモデル

○松田順一 小林春夫 (群馬大学)

Circuit Averaging and Averaged Switch Modeling for DC-DC Converters

*Jun-ichi Matsuda and Haruo Kobayashi (Gunma Univ.)

Abstract— This paper reviews averaged circuit models for DC-DC converters. Adding linearized AC small signals to averaged voltage and current waveforms in the two-switch circuit of a DC-DC converter yields DC and AC small signal circuit models. The models predict a voltage conversion ratio, frequency response characteristics in the circuit intrinsic frequency region, etc., and allow us to control the converter with physical images. We can simply apply the models not only to PWM DC-DC converters operating in continuous and discontinuous current modes but also resonant ones. Using the models leads to efficient DC-DC converter circuit design.

Key Words: DC-DC converter, Averaged circuit model, Linearization

1 はじめに

PC(Personal Computer), LED(Light Emitting Diode) 照明, AV(Audio Visual)等の電子機器への電源供給をより一層高効率化し, 小型化・軽量化するために, 各種タイプのDC-DCコンバータが開発されている. これらの機器への電源供給には, 通常 PWM(Pulse Width Modulation)制御方式が用いられているが, スイッチング損失低減のためにソフトスイッチングを可能にする共振制御方式の開発・製品化^{1,2)}も進められている. また, 機器の動作条件によっては, 大きく負荷変動する場合があります. PWMにおいて, 電流連続モード(CCM: Continuous Current Mode)と電流不連続モード(DCM: Discontinuous Current Mode)の両方を検討する必要のある場合もある.

このような状況下で開発期間を短縮するには, DC-DCコンバータの回路設計を効率良く行う必要がある. このためには, 適当な等価回路モデルを用いて電圧変換比や周波数応答特性等の全体像を掴んだ後に, 詳細な設計シミュレーションを行ってそれらの特性を詰めることが望ましい.

この等価回路モデルへの要求事項は, ①スイッチングによる非線形な電流・電圧波形を線形化し, 通常の線形回路解析が可能である, ②広い負荷変動(PWMのCCMとDCMの両方)に対応できる, ③各種コンバータ(PWM型と共振型)に対応できる, ④簡単で物理イメージを掴みやすいことである.

主なDC-DCコンバータの等価回路モデルには, ①状態平均化³⁾, ②拡張状態平均化⁴⁾, ③回路平均化⁵⁾の方法があり, それらの比較をTable 1に示す.

Table 1: Comparison of equivalent circuit models for DC-DC converters.

Model	State variables	State Equation (Averaging)	Applications	Merits
State-Space Averaging ³⁾	• Inductor current • Capacitor voltage	Averaging of state variables (Small ripple approximation)	• PWM type CCM	• Development to canonical equivalent circuits
Enhanced State-Space Averaging ⁴⁾	• Inductor current • Capacitor voltage (Auxiliary state variables: Inductor voltage, Capacitor current)	Averaging of auxiliary state variables	• PWM type CCM • PWM type DCM • Resonant type	• Application to any types of converters
Circuit Averaging ⁵⁾	• Switching currents and voltages	Averaging of switching currents and voltages	• PWM type CCM • PWM type DCM • Resonant type	• Application to any types of converters • Control with physical images • Simple equivalent circuit

これから回路平均化が上記要求事項①~④を満たしていることが分かり, 本稿ではそれをレビューする.

2章でCCM動作の各基本コンバータの回路平均化について, 3章でDCM動作の各基本コンバータの回路平均化について述べ, そして最後にまとめる.

2 CCM動作時の回路の平均化⁶⁾

CCM動作における回路平均化手順の概要を以下の(a)~(c)に示す.

- (a) DC-DCコンバータを時間変化するスイッチ回路と時間変化しないリアクティブ回路に分ける. 簡単な2ポートからなるスイッチ回路の場合をFig. 1に示す.
- (b) スイッチ回路の電流・電圧波形を平均化し, 電圧源と電流源からなる大信号の等価回路を導出する.
- (c) 動作点で平均化された大信号をDCと線形化されたAC小信号からなる成分で表し, DCとAC小信号からなる等価回路を導出する.

この等価回路はDCとAC小信号の理想変圧器と, 微小制御信号に起因する電圧源と電流源を含む. この等価回路では, スイッチング周波数より十分低い回路の固有周波数領域での周波数応答特性を導出できる.

2.1 一般的な2スイッチ回路のCCM動作コンバータ

一般的な2スイッチ回路のコンバータとして, 昇降圧型のSEPIC(Single Ended Primary Inductor Converter)を取り上げ, 回路の平均化を行う. Fig. 2にスイッチ回路とリアクティブ回路を分離したSEPIC回路を示す. Fig. 3にFig. 2のSEPICスイッチ回路のCCMにおける電流・電圧(状態変数)波形を示す. 状態変数 $x(t)$

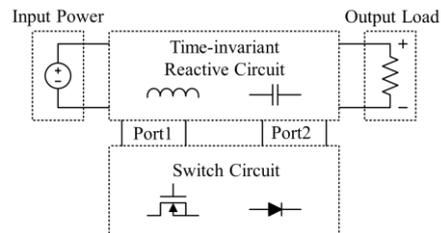


Fig. 1: Separation of reactive and switch circuits for a DC-DC converter.

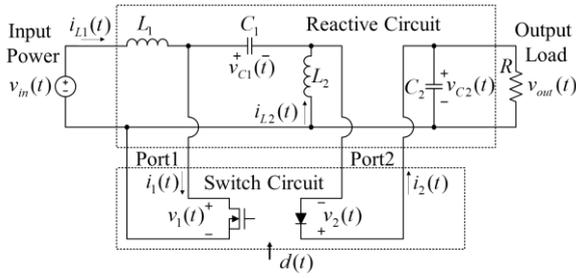


Fig. 2: SEPIC circuit arranged in the form of Fig. 1.

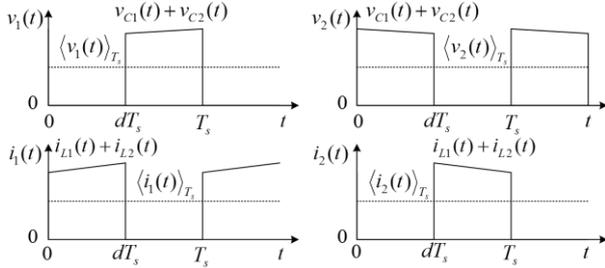


Fig. 3: Current and voltage waveforms for the CCM SEPIC switch circuit of Fig. 2.

のスイッチング周期 T_s 内での平均を以下で表すと、

$$\langle x(t) \rangle_{T_s} = (1/T_s) \int_0^{T_s} x(\tau) d\tau \quad (1)$$

電流・電圧波形の T_s 内での平均は以下の如くなる.

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = d'(t) (\langle v_{C1}(t) \rangle_{T_s} + \langle v_{C2}(t) \rangle_{T_s}) \quad (2)$$

$$\langle i_1(t) \rangle_{T_s} = d(t) (\langle i_{L1}(t) \rangle_{T_s} + \langle i_{L2}(t) \rangle_{T_s}) \quad (3)$$

$$\langle v_2(t) \rangle_{T_s} = d(t) (\langle v_{C1}(t) \rangle_{T_s} + \langle v_{C2}(t) \rangle_{T_s}) \quad (4)$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} = d'(t) (\langle i_{L1}(t) \rangle_{T_s} + \langle i_{L2}(t) \rangle_{T_s}) \quad (5)$$

ここで、 $d(t)$ はデューティ比 (T_s 内のトランジスタ ON時間の割合) であり、制御信号になる。また $d'(t)$ は、 $d'(t) = 1 - d(t)$ の関係を持つ。(2)と(4)式から、また(3)と(5)式からそれぞれ以下の(6)式の電圧と(7)式の電流の関係を得る。

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = (d'(t)/d(t)) \langle v_2(t) \rangle_{T_s} \quad (6)$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} = (d'(t)/d(t)) \langle i_1(t) \rangle_{T_s} \quad (7)$$

(6)式は1次側の平均電圧が2次側の平均電圧に依存した電圧源 (従属電圧源) を、また(7)式は2次側の平均電流が1次側の平均電流に依存した電流源 (従属電流源) を表す。

これら平均の電流・電圧及びデューティ比は大信号であるが、これらが動作点の周りで微小変動しているものとする、それらはDCと線形化されたAC小信号成分で下記の如く表せる。

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = V_1 + \tilde{v}_1(t) \quad (8)$$

$$\langle v_2(t) \rangle_{T_s} = V_2 + \tilde{v}_2(t) \quad (9)$$

$$\langle i_1(t) \rangle_{T_s} = I_1 + \tilde{i}_1(t) \quad (10)$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} = I_2 + \tilde{i}_2(t) \quad (11)$$

$$d(t) = D + \tilde{d}(t) \quad (12)$$

ここで、上式右辺の大文字がDC成分を、また $\tilde{\cdot}$ がついた小文字が線形化されたAC小信号成分を表す。(8), (9), 及び(12)の各式を(6)式に、また(10), (11), 及び(12)の各式を(7)式に代入して非線形小信号成分を無視すると、前者から従属電圧源が(13)式に、また後者から従属電流源が (14)式にそれぞれ変形される。

$$V_1 + \tilde{v}_1(t) \cong (D'/D) (V_2 + \tilde{v}_2(t)) - \tilde{d}(V_1/DD') \quad (13)$$

$$I_2 + \tilde{i}_2(t) \cong (D'/D) (I_1 + \tilde{i}_1(t)) - \tilde{d}(I_2/DD') \quad (14)$$

ここで、 $D' = 1 - D$ である。(13)と(14)式から得られるDCとAC小信号に関するスイッチの等価回路をFig. 4 に示す。この等価回路は、DCとAC小信号を $D':D$ 変換する理想変圧器と、デューティ比の小信号に起因する1次側の電圧源と2次側の電流源からなる。

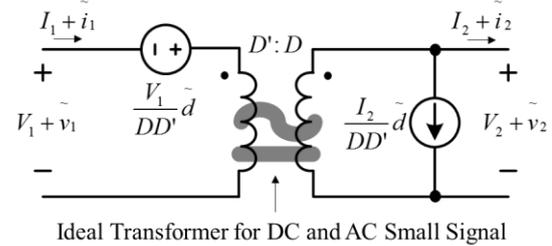


Fig. 4: Averaged switch equivalent circuit of DC and AC small signal for the CCM SEPIC.

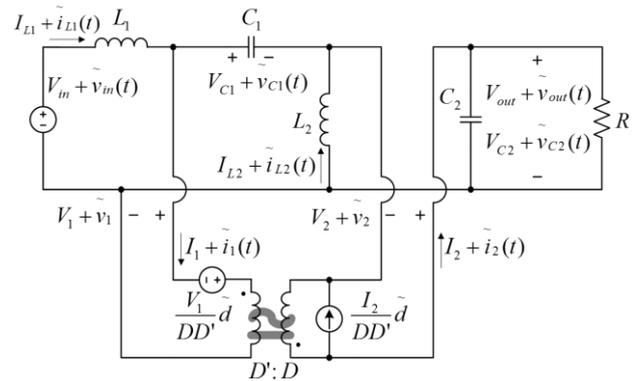


Fig. 5: DC and AC small signal averaged circuit model of the CCM SEPIC.

このスイッチの等価回路をCCM SEPICに組み込むとFig. 5 の如くなる。このDC成分から定常状態での電流・電圧を、またAC小信号成分から伝達関数や入出力インピーダンス等を求めることができる。

2.2 CCM昇圧型コンバータ

2.1節の一般的な2スイッチ回路を昇圧型コンバータに適用しても等価回路を得ることはできるが、若干複雑になるため、ここではFig. 6 に示す別のスイッチ回路を設定する。Fig. 7 にFig. 6 のスイッチ回路のCCMにおける電流・電圧波形を示す。\$i_1(t)\$ と \$v_2(t)\$ はそれぞれインダクタ電流と容量電圧を表し、スイッチのそれぞれのポートから決まる独立状態変数になっている。一方、\$i_2(t)\$ と \$v_1(t)\$ はそれぞれダイオード電流とトランジスタ電圧を表し、\$i_2(t)\$ は \$i_1(t)\$ に、また \$v_1(t)\$ は \$v_2(t)\$ に依存する従属状態変数になっている。この従属状態変数の平均化を行うと、以下を得る。

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = d'(t) \langle v_2(t) \rangle_{T_s} \quad (15)$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} = d'(t) \langle i_1(t) \rangle_{T_s} \quad (16)$$

(15)式が従属電圧源を、また(16)式が従属電流源を表す。ここで、2.1節と同様に、これら平均の電流・電圧が動作点の周りで微小変動しているものとする、それらはDCと線形化されたAC小信号成分で表せる。それを(15)と(16)の各式に代入し、非線形小信号成分を無視すると、以下の各式を得る。

$$V_1 + \tilde{v}_1(t) = D' \left(V_2 + \tilde{v}_2(t) \right) - V_2 \tilde{d}(t) \quad (17)$$

$$I_2 + \tilde{i}_2(t) \cong D' \left(I_1 + \tilde{i}_1(t) \right) - I_1 \tilde{d}(t) \quad (18)$$

(17)と(18)式からDCとAC小信号に関するスイッチの等価回路が得られ、それをFig. 8 に示す。この等価回路は、DCとAC小信号を \$D':1\$ 変換する理想変圧器と、デューティ比の小信号に起因する1次側の電圧源と2次側の電流源からなる。

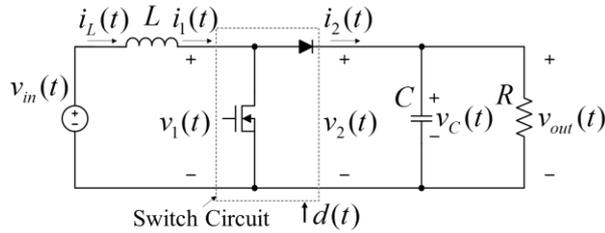


Fig. 6: Boost converter circuit showing another switch circuit definition.

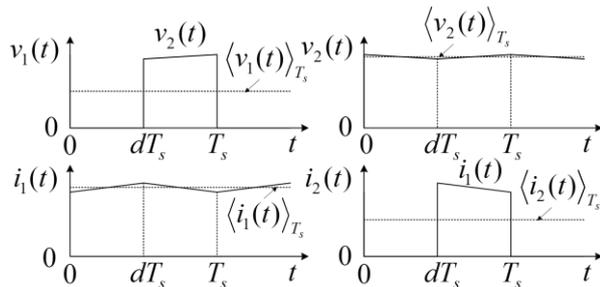


Fig. 7: Current and voltage waveforms for the CCM boost switch circuit of Fig. 6.

このスイッチの等価回路をFig. 6 中のスイッチ回路と置き換えるとCCM動作の昇圧型コンバータの等価回路が完成する。これをFig. 9 に示す。

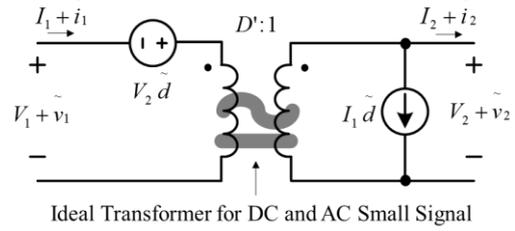


Fig. 8: Averaged switch equivalent circuit of DC and AC small signal for the CCM boost converter.

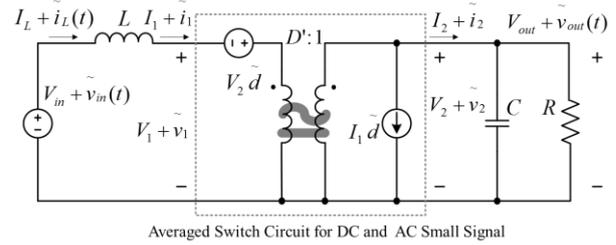


Fig. 9: DC and AC small signal averaged circuit model of the CCM boost converter.

2.3 CCM降圧型コンバータ

降圧型コンバータでは昇圧型コンバータと同様のスイッチ回路設定をし、これをFig. 10 に示す。Fig. 11 にFig. 10 のスイッチ回路のCCMにおける電流・電圧波形を示す。\$v_1(t)\$ と \$i_2(t)\$ はそれぞれ入力電圧とインダクタ電流を表し、独立状態変数になっている。一方、\$i_1(t)\$ と \$v_2(t)\$ はそれぞれトランジスタ電流とダイオード電圧を表し、\$i_1(t)\$ は \$i_2(t)\$ に、また \$v_2(t)\$ は \$v_1(t)\$ に依存する従属状態変数になっている。

この従属状態変数の平均化を行うと、以下を得る。

$$\langle v_2(t) \rangle_{T_s} = d(t) \langle v_1(t) \rangle_{T_s} \quad (19)$$

$$\langle i_1(t) \rangle_{T_s} = d(t) \langle i_2(t) \rangle_{T_s} \quad (20)$$

(19)式が従属電圧源を、また(20)式が従属電流源を表す。これら電流・電圧の平均値をDCと線形化されたAC小信号成分で表し、2.2節と同様の処理をすると、以下の各式を得る。

$$V_2 + \tilde{v}_2(t) \cong D \left(V_1 + \tilde{v}_1(t) \right) + V_1 \tilde{d}(t) \quad (21)$$

$$I_1 + \tilde{i}_1(t) \cong D \left(I_2 + \tilde{i}_2(t) \right) + I_2 \tilde{d}(t) \quad (22)$$

(21)と(22)式からDCとAC小信号に関するスイッチの等価回路が得られ、それをFig. 12 に示す。この等価回路は、DCとAC小信号を \$1:D\$ 変換する理想変圧器と、デューティ比の小信号に起因する1次側の電流源と2次側の電圧源からなる。

このスイッチの等価回路をFig. 10 中のスイッチ

回路と置き換えるとCCM動作の降圧型コンバータの等価回路が完成する．これをFig. 13 に示す．

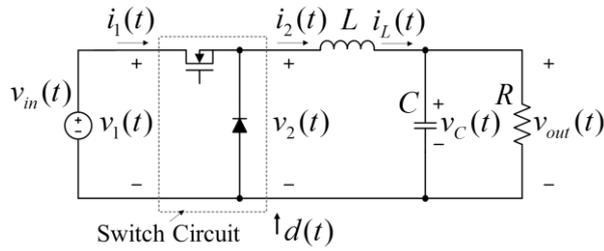


Fig. 10: Buck converter circuit showing another switch circuit definition.

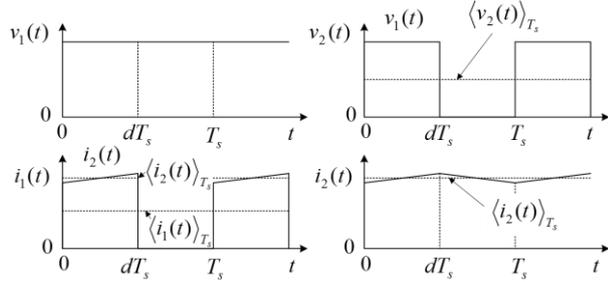


Fig. 11: Current and voltage waveforms for the CCM buck switch circuit of Fig. 10.

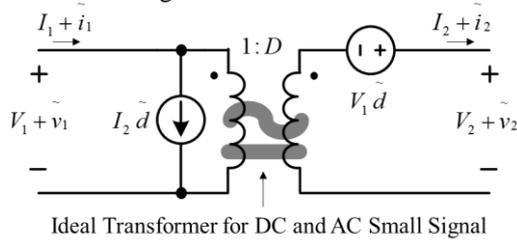


Fig. 12: Averaged switch equivalent circuit of DC and AC small signal for the CCM buck converter.

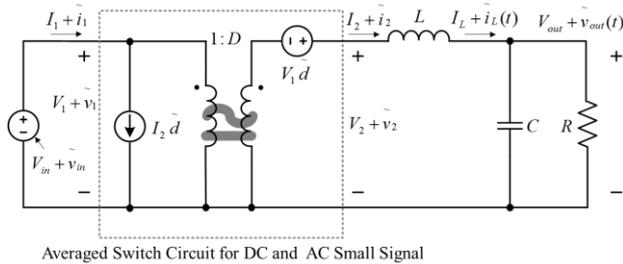


Fig. 13: DC and AC small signal averaged circuit model of the CCM buck converter.

3 DCM動作時の回路の平均化⁷⁾

DCM動作における回路平均化手順の概要を以下(a)～(c)に示す．

(a) CCMの場合と同様にDC-DCコンバータを時間変化するスイッチ回路と時間変化しないリアクティブ回路に分ける．ここでも、2スイッチ回路を扱う．

(b) 2スイッチ（トランジスタとダイオード）回路において電流・電圧波形の平均化を行なう．これらに平均

化したインダクタ電圧の関係を取り込んで、トランジスタを実効抵抗に、またダイオードを電力源に変換した等価回路を導出する．ここでは、実効抵抗での消費電力がそこで消費されず、電力源へ転送される．

(c) 動作点で平均化された大信号をDCと線形化されたAC小信号からなる成分で表し、AC小信号からなる等価回路を導出する．

(b)から導出した等価回路から大信号の電圧変換比が求まる．また、(c)から導出したAC小信号等価回路は実質的に1個のポールを持ち、スイッチング周波数より十分低い回路の固有周波数領域で周波数応答特性を導出できる．

3.1 DCM昇降圧型コンバータ大信号回路モデル

スイッチ回路設定した昇降圧型コンバータをFig. 14 に示す．また、Fig. 15 にそのスイッチ回路の電流・電圧波形を示す．スイッチ回路の各電流・電圧の平均を求めると以下の各式になる．

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = (1-d_1(t)) \langle v_{in}(t) \rangle_{T_s} - d_2(t) \langle v_{out}(t) \rangle_{T_s} \quad (23)$$

$$\langle v_2(t) \rangle_{T_s} = d_1(t) \langle v_{in}(t) \rangle_{T_s} - (1-d_2(t)) \langle v_{out}(t) \rangle_{T_s} \quad (24)$$

$$\langle i_1(t) \rangle_{T_s} = \frac{d_1^2(t) T_s}{2L} \langle v_{in}(t) \rangle_{T_s} \quad (25)$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} = \frac{d_1(t) d_2(t) T_s}{2L} \langle v_{in}(t) \rangle_{T_s} \quad (26)$$

また、インダクタの平均電圧がゼロになることから、

$$d_2(t) = -d_1(t) \left(\langle v_{in}(t) \rangle_{T_s} / \langle v_{out}(t) \rangle_{T_s} \right) \quad (27)$$

を得る．(27)式を(23)～(26)の各式に代入して整理すると、以下の各式を得る．

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = \langle v_{in}(t) \rangle_{T_s} \quad (28)$$

$$\langle v_2(t) \rangle_{T_s} = -\langle v_{out}(t) \rangle_{T_s} \quad (29)$$

$$\langle i_1(t) \rangle_{T_s} = \frac{d_1^2(t) T_s}{2L} \langle v_1(t) \rangle_{T_s} \quad (30)$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} = \frac{d_1^2(t) T_s}{2L} \frac{\langle v_1(t) \rangle_{T_s}^2}{\langle v_2(t) \rangle_{T_s}} \quad (31)$$

(30)式はオームの法則に従うため、ポート1側にあるトランジスタが以下の実効抵抗 $R_e(d_1)$ で表せる．

$$R_e(d_1) = \frac{2L}{d_1^2(t) T_s} \quad (32)$$

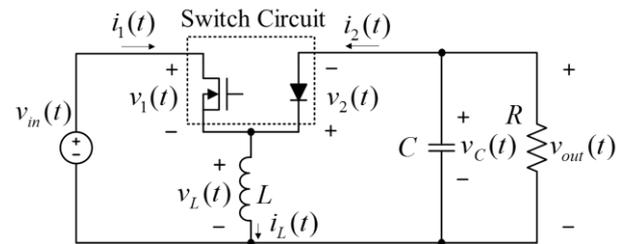


Fig. 14: Buck-boost converter circuit with switch terminal quantities identified.

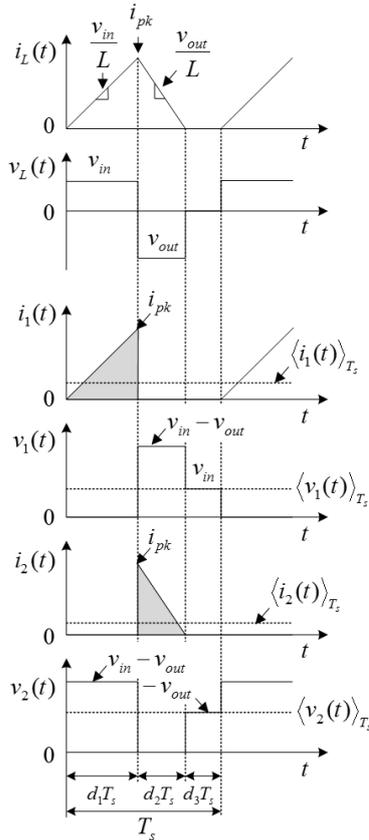


Fig. 15: Current and voltage waveforms for the CCM buck-boost switch circuit of Fig. 14.

(32)式を(31)式に用いると、以下の式を得る。

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} \langle v_2(t) \rangle_{T_s} = \frac{\langle v_1(t) \rangle_{T_s}^2}{R_e(d_1)} = \langle p(t) \rangle_{T_s} \quad (33)$$

ここで、 $\langle p(t) \rangle_{T_s}$ は平均電力である。(33)式はポート2側にあるダイオードが電力源であることを表している。つまり、(32)と(33)式から、トランジスタの実効抵抗で消費される電力が、そこで消費されるのではなく、実効的にダイオードに転送され、電力源になると見なせる。これは、初めのインダクタ電流が上昇する時に入力側から供給されたエネルギーがインダクタに蓄積され、次のインダクタ電流が下降する時に出力側に放出されることと等価である。このスイッチの等価回路をFig. 16 に示す。

Fig. 16 の等価回路をFig. 14 の昇降圧コンバータ回路に組み込むとFig. 17 になる。定常状態で全ての平均値が動作点にある場合、インダクタは短絡、容量は開放と見なせ、Fig. 18 に示すDC成分の等価回路が得られる。Fig. 18 から電力 P に関し次式を得る。

$$P = \frac{V_{in}^2}{R_e(D)} = \frac{V_{out}^2}{R} \quad (34)$$

ここで、 $R_e(D)$ は以下で、 D は静止状態の d_1 である。

$$R_e(D) = \frac{2L}{D^2 T_s} \quad (35)$$

(34)式から入出力の電圧変換比 M は以下になる。

$$M = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \pm \sqrt{\frac{R}{R_e(D)}} \quad (36)$$

昇降圧コンバータの場合、(36)式の符号は負になる。

同じ昇降圧型に分類されるCuk及びSEPICコンバータのDC成分を表す等価回路もFig. 18 と同じになり、電圧変換比は(36)式で与えられる。但し、Cukの場合の符号は昇降圧コンバータと同じ負であるが、SEPICのそれは正になる。また、 $R_e(D)$ は次式になる。

$$R_e(D) = \frac{2(L_1 // L_2)}{D^2 T_s} \quad (37)$$

CCMとDCMの境界の負荷電流 I_{crit} は、CCMとDCMの電圧変換比を等しくして求められる。(13)式において小信号成分をゼロとして得られるCCMの電圧変換比を(36)式に用いると以下の I_{crit} を得る。

$$I_{crit} = \frac{1-D}{D} \frac{V_{in}}{R_e(D)} \quad (38)$$

負荷電流が I_{crit} より大きければCCMになり、小さければDCMになる。

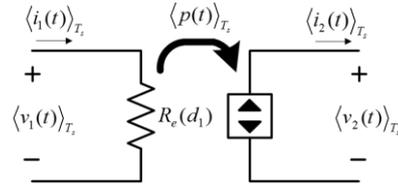


Fig. 16: Averaged switch equivalent circuit of the DCM buck-boost converter.

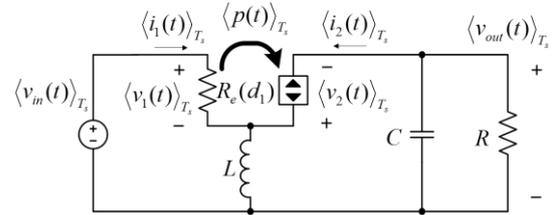


Fig. 17: DCM buck-boost converter circuit replaced with the averaged switch equivalent circuit of Fig. 16.

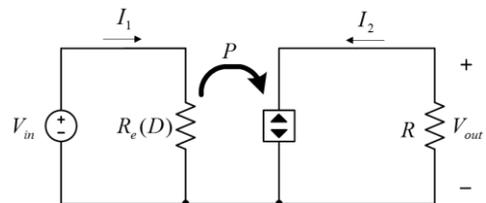


Fig. 18: DCM buck-boost converter equivalent circuit expressing DC component in the steady state.

3.2 DCM昇圧型コンバータ大信号回路モデル

3.1節で行なった同様の解析を昇圧型コンバータに行なうと、定常状態のDC成分を表す等価回路はFig. 19 になる。ここでの電力 P は以下で表される。

$$P = \frac{V_{in}^2}{R_e(D)} = I_2(V_{in} - V_{out}) \quad (39)$$

ここで、 $R_e(D)$ は(35)式と同じである。また、負荷において以下の関係がある。

$$I_2 = V_{out} / R \quad (40)$$

(39)と(40)式から I_2 を消去すると電圧変換比 M に対し、以下の関係を得る。

$$M^2 - M + \frac{R}{R_e} = 0 \quad (41)$$

これから M は以下になる。

$$M = \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{R}{R_e}} \right) / 2 \quad (42)$$

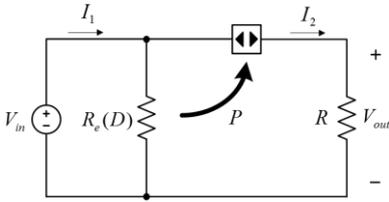


Fig. 19: DCM boost converter equivalent circuit expressing DC component in the steady state.

3.3 DCM降圧型コンバータ大信号回路モデル

3.1節で行なった同様の解析を降圧型コンバータに行なうと、定常状態のDC成分を表す等価回路はFig. 20になる。ここでの電力 P は以下で表される。

$$P = \frac{(V_{in} - V_{out})^2}{R_e(D)} = I_p V_{out} \quad (43)$$

ここでも、 $R_e(D)$ は(35)式と同じである。また、 I_1 は以下の関係を満たし、 I_2 は(40)式と同じである。

$$I_1 = (V_{in} - V_{out}) / R_e(D) \quad (44)$$

ノードAでは以下の電流の関係がある。

$$I_1 + I_p = I_2 \quad (45)$$

(40)、(43)、及び(44)式の電流を(45)式に代入することにより、以下の電圧変換比 M の関係を得る。

$$M^2 + \frac{R}{R_e} M - \frac{R}{R_e} = 0 \quad (46)$$

これから M は以下になる。

$$M = 2 / \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{R}{R_e}} \right) \quad (47)$$

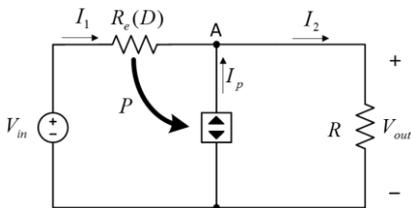


Fig. 20: DCM buck converter equivalent circuit expressing DC component in the steady state.

3.4 DCM昇降圧型コンバータのAC小信号回路モデル

AC小信号回路モデルでは、電流・電圧の平均値が2.1節と同様に、DCと線形化されたAC小信号成分から成るものとし、平均電流を表す(30)と(31)式を動作点の周りでテイラー展開する。(30)と(31)式は、 $\langle v_1(t) \rangle_{T_s}$ 、 $\langle v_2(t) \rangle_{T_s}$ 及び $d(t)(=d_1(t))$ を変数とする関数であるため、テイラー展開によるAC小信号成分は、それらの変数の偏微分による変化量の和で表され、それぞれ以下になる。

$$\begin{aligned} \tilde{i}_1(t) &= \tilde{v}_1(t) \left. \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \right|_{v_1=v_1} + \tilde{v}_2(t) \left. \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \right|_{v_2=v_2} + \tilde{d}(t) \left. \frac{\partial f_1}{\partial d} \right|_{d=D} \\ &= \tilde{v}_1(t) \frac{1}{r_1} + \tilde{v}_2(t) g_1 + \tilde{d}(t) j_1 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{i}_2(t) &= \tilde{v}_1(t) \left. \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \right|_{v_1=v_1} + \tilde{v}_2(t) \left. \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \right|_{v_2=v_2} + \tilde{d}(t) \left. \frac{\partial f_2}{\partial d} \right|_{d=D} \\ &= \tilde{v}_1(t) g_2 + \tilde{v}_2(t) \left(-\frac{1}{r_2} \right) + \tilde{d}(t) j_2 \end{aligned} \quad (49)$$

ここで、 $f_1 = \langle i_1(t) \rangle_{T_s}$ 、 $f_2 = \langle i_2(t) \rangle_{T_s}$ である。(48)と(49)式による2スイッチ回路のAC小信号等価回路は、Fig. 21になる。この等価回路を昇降圧型コンバータに組み込むとFig. 22になる。昇降圧型コンバータの場合の $r_1, g_1, j_1, r_2, g_2, j_2$ をTable 2の上段に示す。

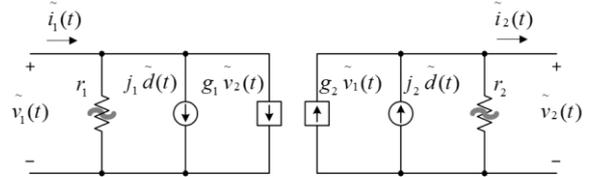


Fig. 21: AC small signal circuit model for the DCM two switch circuit.

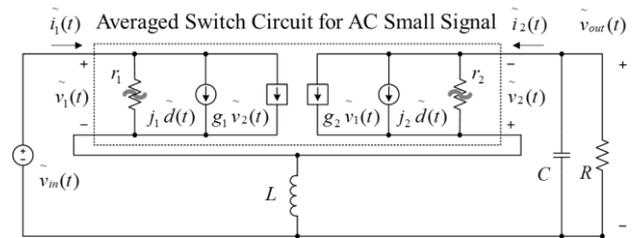


Fig. 22: AC small signal circuit model for the DCM buck-boost converter.

3.5 DCM昇圧と降圧型コンバータのAC小信号回路モデル

DCM昇圧型と降圧型コンバータのスイッチ回路として、CCMの場合と同じFig. 6とFig. 10をそれぞれ用いる。これらのスイッチ回路に対し3.4節と同様の解析を行なうと、AC小信号等価回路は、いずれのコンバータもFig. 21と同じになる。その等価回路を組み込んだ昇圧型と降圧型コンバータの等価回路をFig. 23とFig. 24にそれぞれ示す。また、昇圧型と降圧型コンバータの $r_1, g_1, j_1, r_2, g_2, j_2$ をTable 2の下段と中段にそれぞれに示す。

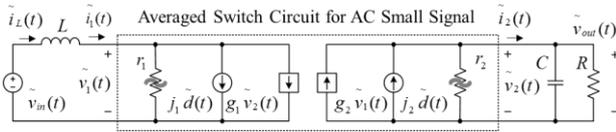


Fig. 23: AC small signal circuit model for the DCM boost converter.

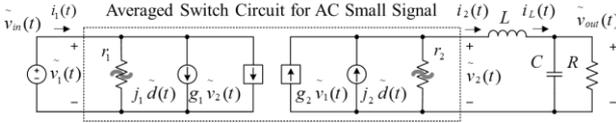


Fig. 24: AC small signal circuit model for the DCM buck converter.

Table 2: AC small signal parameters for the DCM two switch circuit.

Switch circuit	r_1	g_1	j_1	r_2	g_2	j_2
General Two-switch (buck-boost)	R_e	0	$\frac{2V_1}{DR_e}$	$M^2 R_e$	$\frac{2}{MR_e}$	$\frac{2V_1}{DMR_e}$
Two-switch for buck	R_e	$\frac{1}{R_e}$	$\frac{2(1-M)V_1}{DR_e}$	$M^2 R_e$	$\frac{2-M}{MR_e}$	$\frac{2(1-M)V_1}{DMR_e}$
Two-switch for boost	$\frac{(M-1)^2 R_e}{M^2}$	$\frac{1}{(M-1)^2 R_e}$	$\frac{2MV_1}{D(M-1)R_e}$	$(M-1)^2 R_e$	$\frac{2M-1}{(M-1)^2 R_e}$	$\frac{2V_1}{D(M-1)R_e}$

3.6 低周波領域での伝達関数

スイッチング周波数より十分低い回路の固有周波数領域では、インダクタは短絡と見なせ、昇降圧、昇圧、及び降圧型の各コンバータのAC小信号等価回路はいずれもFig. 25 になる。この等価回路を使って、伝達関数を求めてみる。

制御～出力の伝達関数 $G_{out,d}$ は、 $\tilde{v}_{in}(t) = 0$ として、Fig. 25 から以下になる。

$$G_{out,d} = \left. \frac{\tilde{v}_{out}}{\tilde{d}} \right|_{\tilde{v}_{in}=0} = \frac{G_{d0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (50)$$

ここで、 $G_{d0} = j_2(R//r_2)$ 、 $\omega_p = 1/[(R//r_2)C]$ であり、 ω_p は低周波側のポール角周波数を表す。また、入力～出力の伝達関数 $G_{out,in}$ は、 $\tilde{d}(t) = 0$ として、同じく Fig. 25 から以下になる。

$$G_{out,in} = \left. \frac{\tilde{v}_{out}}{\tilde{v}_{in}} \right|_{\tilde{d}=0} = \frac{G_{in0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (51)$$

ここで、 $G_{in0} = g_2(R//r_2) = M$ である。(50)と(51)式から制御～出力及び入力～出力の各伝達関数は、1つのポールを持ち、DCMでは回路固有の周波数領域において安定動作をすることが分かる。これは、リアクタンス素子が実質上容量だけからなることに起因する。

降圧、昇圧、及び昇降圧型コンバータの G_{d0} 、 G_{in0} 、 ω_p をTable 2の各パラメータを用いて求めて、それらをまとめてTable 3 に示す。

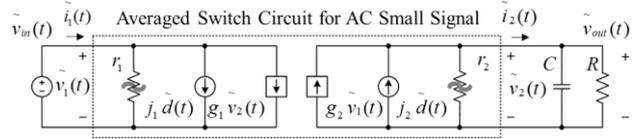


Fig. 25: Low frequency AC small signal circuit model for the DCM buck-boost, boost, and buck converters.

Table 3: Transfer function parameters for the DCM converters.

Converter	G_{d0}	G_{in0}	ω_p
Buck	$\frac{2V_1}{D} \frac{1-M}{2-M}$	M	$\frac{2-M}{(1-M)RC}$
Boost	$\frac{2V_1}{D} \frac{M-1}{2M-1}$	M	$\frac{2M-1}{(M-1)RC}$
Buck-boost	$\frac{V_1}{D}$	M	$\frac{2}{RC}$

3.7 高周波領域での伝達関数

低周波では、インダクタを短絡してモデル化したのが、高周波ではインダクタ電圧がスイッチング周期毎にゼロにならない。そのため、Fig. 14 の昇降圧型コンバータの場合、 $\langle v_1(t) \rangle_{T_s}$ と $\langle i_2(t) \rangle_{T_s}$ は以下になる⁷⁻¹⁰。

$$\langle v_1(t) \rangle_{T_s} = h_1 \langle v_{in}(t) \rangle_{T_s}, \langle v_{out}(t) \rangle_{T_s}, \langle i_L(t) \rangle_{T_s}, d(t) \quad (52)$$

$$\langle i_2(t) \rangle_{T_s} = h_2 \langle v_{in}(t) \rangle_{T_s}, \langle i_L(t) \rangle_{T_s}, d(t) \quad (53)$$

ここで、 h_1 と h_2 は関数である。 $\langle v_1(t) \rangle_{T_s}$ と $\langle i_2(t) \rangle_{T_s}$ の動作点におけるAC小信号成分は、3.4節と同様に各変数の偏微分による変化量の和で表され、等価回路はFig. 26になる。

高周波領域では、容量電圧のAC小信号成分をゼロ ($\tilde{v}_{out}(t) \equiv 0$) と見なすと、制御～インダクタ電流の伝達関数は、 $\tilde{v}_{in}(t) = 0$ として、Fig. 26 の $-\tilde{v}_{in}(t)$ 、 $\tilde{v}_1(t)$ 、 $sL\tilde{i}_L(t)$ からなるループ電圧の和がゼロになることから以下で与えられる。

$$\frac{\tilde{i}_L(t)}{\tilde{d}(t)} = -\frac{f_1}{r_1} \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_{ph}}} \quad (54)$$

ここで、 r_1 は h_1 の i_L による偏微分量で以下になる⁷。

$$r_1 = \left. \frac{\partial h_1}{\partial i_L} \right|_{i_L=i_L} = -\frac{V_{out}}{V_{in}} R_e D \quad (55)$$

f_1 は h_1 の d による偏微分量である。 ω_{ph} は高周波側のポール角周波数であり、以下で表される。

$$\omega_{ph} = 2\pi f_{ph} = r_1/L \quad (56)$$

(27)式から得られる定常状態での $V_{out}/V_{in} = -D/D_2$ と(35)式を(55)式に代入し、それを更に(56)式に代入すると、以下の f_{ph} を得る。

$$f_{ph} = \frac{f_s}{\pi D_2} \quad (57)$$

ここで、 $f_s (= 1/T_s)$ はスイッチング周波数である。 D_2 は $0 < D_2 < 1$ であるため、常に $f_{ph} \geq f_s/\pi$ である。

これはDCM動作の全ての基本コンバータで成り立つ。

Table 4 にDCM動作している基本コンバータの $G_{out,d}$ に関する高周波側での ω_{ph} とRHP (Right Half Plane) ゼロ ω_z を示す¹⁰⁾. f_{ph} 及び $f_z (= \omega_z/2\pi)$ は f_s 近辺或いはそれを超えているため、DCM動作の回路解析では、実質低周波側のポール ω_p を考慮すれば良い。

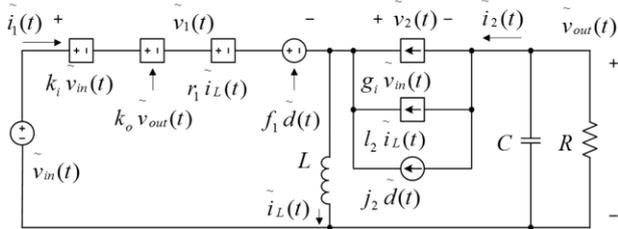


Fig. 26: High frequency AC small signal circuit model for the DCM buck-boost converter. Small signal model parameters $k_i, k_o, r_1, f_1, g_1, l_2, j_2$ are extracted from the partial derivatives of eqs. (52) and (53).

Table 4: High frequency pole and RHP zero of the DCM converter control-to-output transfer function.

Converter	High-frequency pole ω_{ph}	RHP zero ω_z
Buck	$\frac{2Mf_s}{D(1-M)}$	none
Boost	$\frac{2(M-1)f_s}{D}$	$\frac{2f_s}{D}$
Buck-boost	$\frac{2 M f_s}{D}$	$\frac{2f_s}{D}$

3.8 昇圧型コンバータの伝達関数の例

DCM昇圧型コンバータを例に挙げ、 $G_{out,d}$ の周波数応答特性を調べる。ここでの素子パラメータと動作条件を $R=5\Omega$, $L=10\mu\text{H}$, $C=100\mu\text{F}$, $V_{in}=5\text{V}$, $V_{out}=10\text{V}$, $I_{out}=100\text{mA}$, $f_s=250\text{kHz}$ とし、(50)式を用いて計算した $G_{out,d}$ の大きさと位相の周波数特性をFig. 27 に示す。 G_{d0} と $f_p (= \omega_p/2\pi)$ は、それぞれ26dBV, 955Hzである。Table 4 から f_{ph} と f_z はいずれも1.58MHzであり、 f_s を超えている。また、(38)式から $I_{crit}=216\text{mA}$ を得る。これは、 $I_{out} < I_{crit}$ であるため、DCM動作になっている。

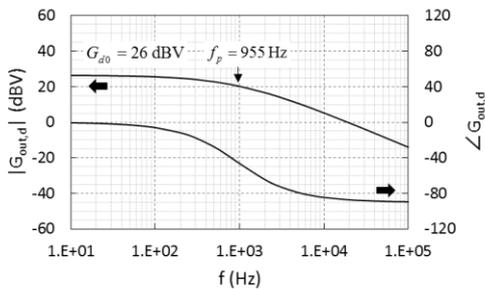


Fig. 27: Frequency dependence of control-to-output transfer function magnitude and phase for a DCM boost converter.

この様に簡単に回路解析ができるため、要求特性を満たす概略の素子パラメータと動作条件を短時間で得ることができる。この後に詳細な回路シミュレーションを行なうと、最適化のためのシミュレーション回数を減らすことができ、効率の良い回路設計になる。

4 まとめ

PWMで制御された基本DC-DCコンバータの回路平均化モデルをレビューした。このモデル化は、コンバータ内の2スイッチ回路の非線形な電流・電圧波形を定常状態で平均化し、それらをDCとAC小信号成分で表して行なわれる。

CCMではDCとAC小信号が理想変圧器によって変換され、DCMではトランジスタからダイオードへ実効的に無損失でエネルギーが転送され、ダイオードが電力源として寄与する物理モデルの等価回路ができる。これにより通常の線形回路解析ができ、電圧変換比、伝達関数、入出力インピーダンス等が得られる。

本手法は、PWM動作の降圧、昇圧、昇降圧、Cuk、及びSEPIC、更に共振型の各コンバータに適用でき、その適用範囲は広い。また、本手法を用いた回路解析は簡単であり、本解析により概略特性を押さえた後、詳細設計シミュレーションを行なうと、回路設計の効率が向上する。

参考文献

- 1) <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/tps92020.pdf>
- 2) A. Shrivastava, B. Singh, LLC series resonant converter based LED lamp driver with ZVS, IEEE Power India Conference, 5, 1/5, (2012)
- 3) R. D. Middlebrook, S. Cuk, A General Unified Approach to Modeling Switching-Converter Power Stages, International Journal of Electronics, 42-6, 521/550, (1977)
- 4) 原田耕介, 二宮保, 顧文建, スイッチングコンバータの基礎, 183/196, コロナ社, (2004)
- 5) G. W. Wester, R. D. Middlebrook, Low-Frequency Characterization of Switched Dc-Dc Converters, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 9, 376/385, (1973)
- 6) R. W. Erickson, D. Maksimovic, Fundamentals of Power Electronics, 226/241, Springer Science+Business Media (2001)
- 7) R. W. Erickson, D. Maksimovic, Fundamentals of Power Electronics, 409/434, Springer Science+Business Media (2001)
- 8) J. Sun, D. M. Mitchell, M. Greuel, P. T. Krein, R. M. Bass, Averaged Modeling of PWM Converters in Discontinuous Conduction Mode: a Reexamination, IEEE Power Electronics Specialists Conference, 615/622, 1998
- 9) S. Ben-Yaakov, D. Adar, Average Models as Tools for Studying Dynamics of Switch Mode DC-DC Converters, IEEE Power Electronics Specialists Conference, 1369/1376, 1994
- 10) J. Sun, D. M. Mitchell, M. Greuel, P. T. Krein, R. M. Bass, Averaged Models for PWM Converters in Discontinuous Conduction Mode, Proceedings of the 1998 International High Frequency Power Conversion Conference, 61/72, 1998