サンプルホールド回路の統一理論の検討

栗原 圭汰*(群馬大学) 小林 謙介(技術コンサルタント) 新井 美保 上森 将文 小林 春夫(群馬大学)

Study on Unified Theory of S/H Circuit Keita Kurihara (Gunma University), Kensuke Kobayashi (Consultant) Miho Arai, Masafumi Uemori, Haruo Kobayashi (Gunma University)

This paper describes fundamental design consideration of sampling circuits for acquiring a high-frequency waveform with high accuracy, and tries to establish a unified theory for track/hold and impulse sampling circuits. We investigate the condition for maximum SNR with a given bandwidth and discuss gain-bandwidth (GB) product.

キーワード:サンプリング回路,トラックホールド回路,インパルスサンプリング回路,統一理論, 信号雑音比, GB 積 (Sampling Circuit, Track Hold Circuit, Impulse Sampling Circuit, Unified Theory, Signal to Noise Ratio, GB product)

<u>1. はじめに</u>

近年,携帯電子機器の小型軽量化が進み,電子回路を1チ ップ上に集積回路として実現することが望まれている.ま た,低コストで1チップ化をするために,アナログ・ディジ タル混載LSIの需要が高まっている.このLSIの重要な回路 としてアナログ・ディジタル(A/D)変換器がある.A/D変換器 には有限の変換時間が必要となる.そこで,アナログ信号を 一時的に保持することのできるサンプリング回路が必要と なる.サンプリング回路で発生した誤差はA/D変換器の誤差 となり,最終的なディジタル値にまで影響を与えてしまう. そのため,サンプリング回路の高性能化の要求が著しい. サンプリング回路は次の2つに大別できる.

 トラックホールド(Track Hold: T/H)回路: システムLSI 等でのA/D変換器前段に用いる
インパルスサンプリング回路:

広帯域オシロスコープに用いる

これらはサンプリング方式が異なり,どちらの回路もSNR と帯域がトレードオフの関係にあり,高周波信号を高精度 に取得することが技術的チャレンジである.

本論文では、2 つのサンプリング回路の統一理論を確立 し、設計トレードオフを示す.特に「SNR が極大値をとる 条件」及び「ある条件下でインパルスサンプリング回路の GB 積が T/H 回路の約 2.8 倍となる」ことを示す.

2. S/H 回路

〈2-1〉S/H回路の動作

波形サンプリングとは、時間軸に対しても振幅軸に対し

ても連続的な信号から,一定時間ごとに信号の大きさを抽 出することで時間的に離散化された信号に変換する技術で ある (図 1).

サンプリングは、スイッチ SW とホールドキャパシタ C からなる回路で行われる.図2のようにSW がオンの時は、 入力電圧によりホールドキャパシタが充電されるため、出 力電圧は入力電圧に追従する(サンプルモード).次に図3 のようにスイッチ SW がオフになると、オフになる直前の 入力電圧がホールドキャパシタに保持され、その保持電圧 が出力電圧となる(ホールドモード).このようにサンプル モードとホールドモードを交互に切り替えることでサンプ リングを行う回路のことを S/H (Sample Hold)回路と呼ぶ.



図 1 サンプリング Fig.1 Sampling



Fig.2 Sample mode



Fig.3 Hold mode

〈2-2〉抵抗と容量で構成される回路の雑音

S/H 回路の基本構成はスイッチ SW とホールドキャパシ タ C で成り立つが,ホールド状態のときのこのスイッチの オフ抵抗 Roff と容量 C との並列回路からなる S/H 回路の出 力雑音パワーは次のように表せる (図 4).

$$V_{n.out}^2 = \int_0^\infty \frac{4k_B T R_{off}}{1 + (2\pi f)^2 R_{off}^2 C^2} df = \frac{k_B T}{C}$$
(1)

ここでk_Bはボルツマン定数である.S/H 回路のホールド状態で発生しているこのノイズが問題となる.広帯域信号を取り扱うために容量 C を小さくすると,熱雑音は大きくなってしまう.



図 4 抵抗と容量からなる回路の熱雑音 Fig.4 Thermal noise in RC circuit

〈2-3〉S/H回路の2つの時定数τ1, τ2

時定数は、対象となるシステムの応答の速さを表す時間 的な尺度となるが、この S/H 回路には2つの時定数が存在 する.1つは、信号源の抵抗 Rsg とスイッチのオン抵抗 Ron の合成抵抗 R (=Rsg+Ron) とホールド容量 C から構成さ れる時定数 τ_1 =RC,もう1つは、スイッチ SW を ON する スイッチング時間窓 τ_2 である.

・時定数τ₁ (RC) の影響

信号源の抵抗とスイッチのオン抵抗の合成抵抗 R とホール ド容量 C から構成される時定数 τ_1 =RC の影響について考え る. 直感的に,容量 C が小さければ容量に対し素早い充電 が可能になると考えられるので τ_1 が小さければ帯域は広が る. しかしながら,先ほど述べたように抵抗と容量からなる 回路の熱雑音は式(1)より, $V_{noise} = \sqrt{k_B T/C}$ で与えられるの で,容量 C を小さくすると雑音が大きくなってしまうため SNR は劣化する (図 5).

・スイッチング時間窓τ2の影響

次にスイッチング時間窓τ2の影響を考える.パルス幅が短く なると、出力が素早く定まるため帯域は広くなる.しかしな がら、信号成分は 1/C に比例するので、パルス幅が短くな ると信号成分が小さくなり SNR は劣化する.



Fig.5 Influence of 2 time constants τ_1 , τ_2 in S/H circuit

3. 2つの S/H 回路

前述したように S/H 回路は 2 つの時定数 τ_1 , τ_2 の関係に より異なった特性を示す.この章では, S/H 回路を次の様 に分類し,各々の説明を行う.

 $\tau_1 \ll \tau_2 \sigma$ 場合・・・トラックホールド回路 $\tau_1 \gg \tau_2 \sigma$ 場合・・・インパルスサンプリング回路

$(3\cdot1)$ トラックホールド回路 ($\tau_1 \ll \tau_2$ の場合)

トラックホールド(Track Hold: T/H)回路はスイッチング 時間窓 τ_2 が十分長く 2 つの時定数が $\tau_1 \ll \tau_2$ の関係にあり システム LSI 上の ADC 等に用いられる. そこでは実時間 サンプリングが行われることが多く,単発信号の測定が行 える. この方式では,トラック時間(スイッチング時間窓 τ_2) は,入力信号と出力信号の差が $\frac{1}{2}$ LSB以下になるまで必要で ある. すなわち,Nビット精度を得るためにはステップ入力 を考えた際に次の関係を満たす必要がある.

$$1 - \left(1 - e^{-\tau_2/\tau_1}\right) = e^{-\tau_2/\tau_1} < 1/2^{N+1} \tag{2}$$

したがって、次の関係を得る.

$$\tau_2/\tau_1 > (N+1) \cdot ln2 \tag{3}$$

高周波信号を扱うためにはサンプリング定理に従い高速サ ンプリング動作が必要となる.

T/H 回路では、スイッチング時間窓 τ_2 が RC 時定数 τ_1 に比べて十分に長い($\tau_1 \ll \tau_2$)ので、入力信号に対してホールド容量 C は十分な充電が行われる (図 6). よって、T/H 回路を用いてサンプリング動作を行ったときの伝達関数は、次のようになる.

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau_1\omega} \tag{4}$$

これより, T/H 論のゲイン・周波数特性を得る (図 7). この 際, 回路の RC 積 $\tau_1 = 0.1$ psec, スイッチング時間窓 $\tau_2 = 1$ psecとした.

また、単位ステップ入力に対して、出力信号成分Sは

$$V_{signal1} = H_1(j0) \approx 1 \tag{5}$$

出力熱雑音成分は式(1)より、 $V_{noise} = \sqrt{k_B T/C}$ で与えられる ので、信号雑音比(SNR = V_{signal}/V_{noise})は、

$$SNR_1 = \sqrt{\frac{C}{k_B T}} \propto \sqrt{C}$$
 (6)

となり、 \sqrt{C} に比例する. 一方、帯域 (ω_{BW}) は、 $\omega_{BW1} = \frac{1}{\tau_1} \propto \frac{1}{C}$ (7)

となり、C に反比例する. 広帯域のためには C を小さくし なければならないが、C を小さくすると熱雑音が大きくな り SNR が劣化する.





図 7 T/H 回路のゲイン・周波数特性 Fig.7 Gain - frequency characteristics of T/H circuit

$\langle 3-2 \rangle$ インパルスサンプリング回路 ($\tau_1 \gg \tau_2$ の場合)

インパルスサンプリング回路はスイッチング時間窓τ₂が インパルス的に極めて短く,2 つの時定数がτ₁ »τ₂の関係 にあり,サンプリングオシロスコープに用いられる.そこで は測定対象は繰り返し生起する広帯域信号を測定するため 等価時間サンプリングが用いられる.この方式では,信号源 へのホールド容量Cの影響をできるだけ減らすため及び高 周波信号を扱うために,スイッチング時間窓τ₂が小さく設計 されている.

インパルスサンプリング回路では、スイッチ時間窓 τ_2 が RC 時定数 τ_1 に比べて短い($\tau_1 \gg \tau_2$)ので、入力信号に対し てホールド容量 C は十分な充電を行うことができない(図 8).よって、インパルスサンプリング回路を用いてサンプリ ング動作を行ったときの伝達関数は次のようになる.

$$H_2(j\omega) = \frac{\tau_2}{\tau_1} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau_2\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\tau_2\omega}{2}}$$
(8)

これより, インパルスサンプリング論のゲイン-周波数特性 を得る (図 9). この際, 回路の RC 積 $\tau_1 = 10$ psec, スイッ チング時間窓 $\tau_2 = 1$ psecとした. また、単位ステップ入力に対して、出力信号成分Sは

$$V_{signal2} = H_2(j0) \propto 1/C \tag{9}$$

出力熱雑音成分は式(1)より、 $V_{noise} = \sqrt{k_B T/C}$ で与えられるので、信号雑音比は、

$$SNR_2 \propto \frac{1/C}{\sqrt{k_B T/C}} \propto \frac{1}{\sqrt{C}}$$
 (10)

となり、 \sqrt{C} に反比例する. 一方、帯域(ω_{BW}) は、ゲインが DC ゲインから 3dB 落ちる時で定義されるので、

$$|H_2(j\omega_{BW2})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H_2(j0)| \tag{11}$$

よ

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{\tau_2 \cdot \omega_{BW2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

よって,

$$\omega_{BW2} \approx \frac{2.78}{\tau_2} \tag{13}$$

となり、スイッチング時間窓 τ_2 に反比例する.広帯域化の ためには τ_2 を小さくしなければならないが,信号ゲインは小 さくなり SNR は劣化する.また広帯域化のため極短パルス (時間幅 τ_2)を生成することは技術的に難しい.



図8インパルスサンプリング回路の入出力信号波形

Fig. 8 Input and output waveforms of impulse sampling circuit





(3・3) 広帯域化信号サンプリング技術の問題

上述したように T/H 回路($\tau_1 \ll \tau_2$) とインパルスサンプ リング回路($\tau_1 \gg \tau_2$) のどちらでも,広帯域,高 SNR を実 現することは困難である.以下,これらの理論を統一化し, 中間領域($\tau_1 \approx \tau_2$) について考える.

<u>4. 2つの S/H 回路を統一した理論</u>

〈4-1〉2 つの S/H 回路を統一した理論の導出

本章では現在別々に扱われている T/H 回路の理論と、インパルスサンプリング回路の理論を統一した理論を導く.

パラメータ τ_1, τ_2 のサンプリング回路でのステップ応答 s(t) (図 10), インパルス応答h(t)は次のように導ける.

$$s(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} & (0 \le t < \tau_2) \\ 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} & (\tau_2 \le t) \end{cases}$$
(14)
$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1/\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} & (0 \le t < \tau_2) \\ 0 & (\tau_2 \le t) \end{cases}$$
(15)

これらの導出の際には、サンプリング動作を考慮して等価 時間サンプリングの考え方を用いた(図 11).

伝達関数H₃(jω)は h(t)をラプラス変換して得る.

$$H_3(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau_1\omega} \left\{ 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}(1+j\tau_1\omega)} \right\}$$
(16)

この式は、 τ_1, τ_2 がどのような値でも成り立つ S/H 回路の伝 達関数、すなわち 2 つの S/H 回路を統一化した伝達関数と なる.式(16)において、 $\tau_1 \ll \tau_2$ 時は T/H 回路の伝達関数 (式 (4)) に、また $\tau_1 \gg \tau_2$ 時はインパルスサンプリング回路の伝 達関数 (式(8)) に収束することが分かる.また、式(16)より、 S/H 回路の統一理論のゲイン・周波数特性が得られる (図 12).この際、スイッチング時間窓 $\tau_2 = 1$ psecとし、回路の RC 積 τ_1 をパラメータとして0.1 – 10psecの範囲で変化させ た.この図からも、2 つの S/H 回路の伝達関数を 1 つの伝 達関数に統一化できていることが確認できる.

次に統一した S/H 回路の SNR を考える. S/H 回路の単 位ステップ入力に対する出力信号成分は式(16)より,

$$V_{signal3} = H_3(j0) = 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau_1}}$$
(17)

である. また, 抵抗 R と容量 C の回路の出力熱雑音は, 式 (1)より, $V_{\text{noise}} = \sqrt{k_B T/C}$ で与えられる. したがって S/H 回路の SNR は次のようになる.

$$SNR_{3} = \frac{1 - e^{-\frac{\tau_{2}}{\tau_{1}}}}{\sqrt{k_{B} T/C}} = \sqrt{\frac{\tau_{1}}{k_{B} TR}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_{2}}{\tau_{1}}}\right)$$
(18)

次に統一した S/H 回路の帯域について考える.帯域はゲ インが DC ゲインから 3dB 落ちる時で定義されるので,

$$|H_3(j\omega_{BW3})| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H_3(j0)|$$
(19)

で与えられる.この式を解析に解くことは困難であるので 数値計算により解ω_{BW3}を求める.

〈4-3〉統一した S/H 回路の特性

図 13, 14 は統一した S/H 回路の各特性((a)直流利得, (b)帯域幅,(c)熱雑音,(d)GB 積,(e)SNR,(f)帯域幅と SNR の積)の τ_1, τ_2 依存性である.また,図 15 は τ_2 をパラメータ とし、 τ_1 を変数とした時の帯域幅、 τ_2/τ_1 ,SNRの関係を表 したグラフである.この際, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$,T = 300, R = 50として熱雑音を計算した.以下もこの値で議論する.

図 13,14 において、 $\tau_2/\tau_1 \ll 1$ 、すなわち、 $\tau_2 \ll \tau_1$ の領域 では従来のインパルスサンプリング論を、 $\tau_2/\tau_1 \gg 1$ 、すな わち、 $\tau_2 \gg \tau_1$ の領域では従来の T/H 論を表している. これ より各領域の特性を見ていく.

・インパルスサンプリング領域 $(\tau_2/\tau_1 \ll 1)$

インパルスサンプリング領域では、DC Gain は τ_2/τ_1 に比例 し、帯域は τ_2 に反比例していることが分かる. 熱雑音は $1/\sqrt{\tau_1}$ に比例するので、SNR は $\tau_2/\sqrt{\tau_1}$ に比例し、GB 積及び Bandwidth*SNR は $1/\sqrt{\tau_1}$ に比例する.

・T/H 領域($\tau_2/\tau_1 \gg 1$)

T/H 領域では、DC Gain は 2 つの時定数 τ_1, τ_2 に依存せず、 帯域は1/ τ_1 に比例することが分かる. 熱雑音は1/ $\sqrt{\tau_1}$ に比例 するので、SNR は1/ $\sqrt{\tau_1}$ に反比例、GB 積は1/ τ_1 に比例し、 Bandwidth*SNR は1/ $\sqrt{\tau_1}$ に比例する.

・中間領域 $(\tau_2/\tau_1 \approx 1)$

統一理論により明らかとなった中間領域の特性を考える. インパルスサンプリング領域と T/H 領域では τ_1, τ_2 依存性が 異なり,中間領域ではそれらの中間の特性が見られる.特に SNR に関しては, τ_1 のみを変数とした場合,中間領域で極 大値をもつことが分かる (図 13(e)).

インパルスサンプリング領域及び T/H 領域の特性は従来 のインパルスサンプリング論と T/H 論による特性と整合性 がある.また,図 14(d),(f)より, τ_2 のみを変数とした場合, インパルスサンプリング領域と T/H 領域の GB 積及び Bandwidth*SNR は一定値であり,インパルスサンプリン グ領域は T/H 領域の約 2.8 倍となることが分かる.

図 15 からは、 τ_1, τ_2 の値に依らず、 $\tau_2/\tau_1 \approx 1$ 付近で SNR の最大値が分布することが分かる.

〈4-3〉回路動作との整合性

回路動作から S/H 回路の特性のτ₁,τ₂依存性を考える.

・インパルスサンプリング領域 $(\tau_2/\tau_1 \ll 1)$

帯域はスイッチング時間窓 τ_2 に反比例し、出力は τ_2 に比例するので GB 積は τ_2/τ_1 に依らず一定である.

 τ_2 を一定として帯域を固定し、 τ_1 を減少させて τ_2/τ_1 を増大 させれば、出力は $1/\tau_1$ に比例して増加する.一方、雑音は $\sqrt{1/\tau_1}$ に比例して増加するので Bandwidth*SNR は $\sqrt{\tau_2/\tau_1}$ に比例して増大する.

一方, τ_1 を一定としてゲート時間 τ_2 を増大した場合, 雑音は 一定なので, Bandwidth*SNR も一定である.

・中間領域 $(\tau_2/\tau_1 \approx 1)$

 $\tau_2/\tau_1 \ll 1$ の前提が崩れた場合,ホールドキャパシタ C は1 – exp(-t/\tau_1) (0 ≤ t ≤ τ_2) でチャージされる. この時スルーレ -トはチャージ開始時の1/ τ_1 を維持できなくなる.

 τ_1 を一定として τ_2 を増大した場合, Gain は増加するものの, 立ち上り時間は Gain 増大分以上に増加するので, GB 積は 低下する. 一方ホールド容量 C が一定なので雑音は一定で あり, τ_2/τ_1 増加に伴い Bandwidth*SNR は低下する. 反対にゲート時間 τ_2 を一定とし τ_1 の減少で τ_2/τ_1 を増大した 場合,より小さなホールド容量 C を一定期間 τ_2 でチャージ するので,t= τ_2 時のサンプリング出力は増大する.また等 価時間的ステップ応答はより高速に立ち上がるので帯域は 広がり,GB積は増大する.

・T/H 領域(τ₂/τ₁ ≫ 1)

まず τ_1 を固定し十分に大なる τ_2 を更に増大する状況を考える. この時ホールド容量 C は1 – exp(-t/ τ_1)でチャージされ、 τ_2 時以降のサンプリング出力は 1、 帯域は $\omega = 1/\tau_1$ で一定、熱雑音も一定なので、GB 積、Bandwidth*SNR 共に一定である.

しかし、 $\tau_2/\tau_1 \gg 1$ 領域で τ_2 を一定、 τ_1 を 1/2 にした場合、 τ_2 時以降のサンプリング出力は 1、 帯域は ω =2/ τ_1 で増加、熱 雑音は $\sqrt{2}$ に増加するので、GB 積、Bandwidth*SNR 共に増 加する.

このことから,図13,14に示す特性は上述のような回路 動作から得られる特性とも整合が取れていることが確認で きる.

5. GB積, SNR の理論解析

前章で S/H 回路の回路特性,特に「SNR が極大値をとる 条件」及び「インパルスサンプリング回路の GB 積が T/H 回 路の約 2.8 倍となる条件」が明らかとなった.本章では,そ れらを統一理論を用いて数式的に証明する.

図 13(e)において, 横軸 $\tau_2/\tau_1 \approx 1$ 付近で SNR にピークが 見られるが,式(18)を用いてSNR₃が極大値となる τ_1, τ_2 の関 係を示す.式(18)において τ_1 に関する極値を考えると,

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} SNR_3 = 0 \tag{20}$$

より,

$$1 + 2\frac{\tau_2}{\tau_1} = e^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}$$
(21)

よって,

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 0, \quad 1.26 \tag{22}$$

 $(\tau_1, \tau_2$ はそれぞれ有限の値であるため、 $\frac{\tau_2}{\tau_1} = 0$ は不適)

となり,これが最大 SNR を得るための τ_1, τ_2 の条件となる. これは数値シミュレーションの結果とも一致している.この時のSNR₃の最大値SNR_{3 max}の値は

$$SNR_{3_max} = \sqrt{\frac{C}{k_B T}} \cdot (1 - e^{-0.126})$$
$$\approx 1.11 \times 10^{10} \cdot \sqrt{C}$$
(23)

となり、 τ_1 を変数とした時、SNR_{3_max}は \sqrt{C} に比例する. つまり、 τ_1 が τ_2 に対して 約 0.8 倍の時 SNR は極大値となり、 τ_1 の絶対値が大きいほどSNR_{3_max}は大きくなる. 次に図 14(d)において,インパルスサンプリング回路の GB 積が T/H 回路の約 2.8 倍となることが分かるが,その 比の τ_1, τ_2 依存性を調べる.インパルスサンプリング回路と T/H 回路の GB 積の比を考えると,

$$\frac{H_2(j\omega)\mathcal{O} \text{ GB } \bar{\mathfrak{A}}}{H_1(j\omega)\mathcal{O} \text{ GB } \bar{\mathfrak{A}}} = \frac{DC \ Gain_2 \cdot \omega_{BW2}}{DC \ Gain_1 \cdot \omega_{BW1}}$$
$$\approx \frac{(\tau_2/\tau_1) \cdot (2.78/\tau_2)}{(1) \cdot (1/\tau_1)} = 2.78 \tag{24}$$

となり、 τ_1 を一定として τ_2 を変化させた場合、インパルスサンプリング回路の GB 積は回路パラメータに依らず T/H 回路の約 2.8 倍となることが確認できる.

<u>6. まとめ</u>

本論文では、2つの回路時定数に注目し、T/H 回路の理論 とインパルスサンプリング回路の理論を統一的に扱える理 論を導いた.従来のT/H 論及びインパルスサンプリング論 では、広帯域かつ高精度に信号を取得することは困難であ ったが、今回導出した統一理論を用いることで、「ステップ 応答での出力信号と熱雑音による SNR が極大値をとる条 件」及び「ある条件下でインパルスサンプリング回路のGB 積がT/H 回路の約2.8 倍となる」ことを示した.

今後の方針として、S/H 回路において RC 積からなる時 定数 τ_1 ,スイッチング時間窓 τ_2 に加えてスイッチング時間窓 の有限の立下がり時間 τ_3 の影響も考慮してサンプリング回 路の解析を行う.

文 献

- M. Uemori, K. Kobayashi, M. Kono, K. Shimizu, H. Kobayashi, T. Tobari, "Wideband and Large Dynamic Range Sampling Method," IEICE Trans. vol. J90-C, no.9, pp.625-633 (Sept. 2007).
- [2] M. Arai, I. Shimizu, H. Kobayashi, K. Kurihara, S. Sasaki, S. Shibuya, K. Niitsu, K. Kubo, "Finite Aperture Time Effects in Sampling Circuit", IEEE 11th International Conference on ASIC, Chengdu, China (Nov. 3-6, 2015).



図 10 S/H 回路のステップ応答 Fig.10 Step response of S/H circuit



図 11 S/H 回路のインパルス応答

Fig.11 Impulse response of S/H circuit



using our unified theory

Fig.15 Maximum SNR and bandwidth

