

フィボナッチ数列重み付け 逐次比較近似ADCと 単峰関数の黄金分割法との関係

新井 宏崇 小林 佑太朗 小林 春夫

群馬大学 理工学部 電子情報理工学科

小林研究室 学部4年

新井 宏崇

OUTLINE

1. はじめに
2. 逐次比較近似ADCについて
3. 黄金分割法とフィボナッチ探索法
4. フィボナッチ数列重み付けSAR ADC
5. 黄金分割探索SAR ADC
6. 回路を軽量化した黄金分割探索SAR ADC
7. 数式での証明・シミュレーション
8. まとめ

OUTLINE

1. はじめに
2. 逐次比較近似ADCについて
3. 黄金分割法とフィボナッチ探索法
4. フィボナッチ数列重み付けSAR ADC
5. 黄金分割探索SAR ADC
6. 回路を軽量化した黄金分割探索SAR ADC
7. 数式での証明・シミュレーション
8. まとめ

研究背景

自動車に付加価値や競争力をつける
車載用エレクトロニクス技術に注目が集まる



著しい発展



車載用マイコンに組み合わせて利用する
AD変換器への要求が厳しい

当研究室では

フィボナッチ数列を用いたAD変換器の
様々な優れた性質を明らかにしてきた

研究成果

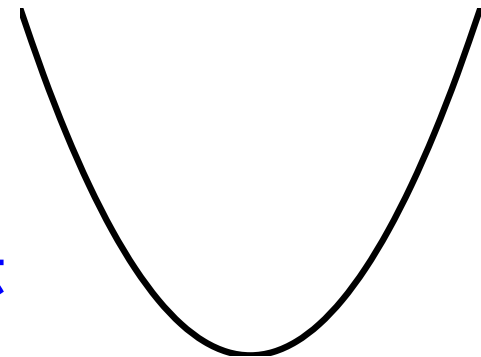
- 単峰性評価関数の最小値を探索する
効果的アルゴリズム → 黄金分割探索法
- 逐次比較近似ADCの誤差の絶対値をとる
→ 単峰性関数となる
- この単峰関数に黄金分割探索法を適用したSAR ADC



等価

フィボナッチ数列重みづけSAR ADC

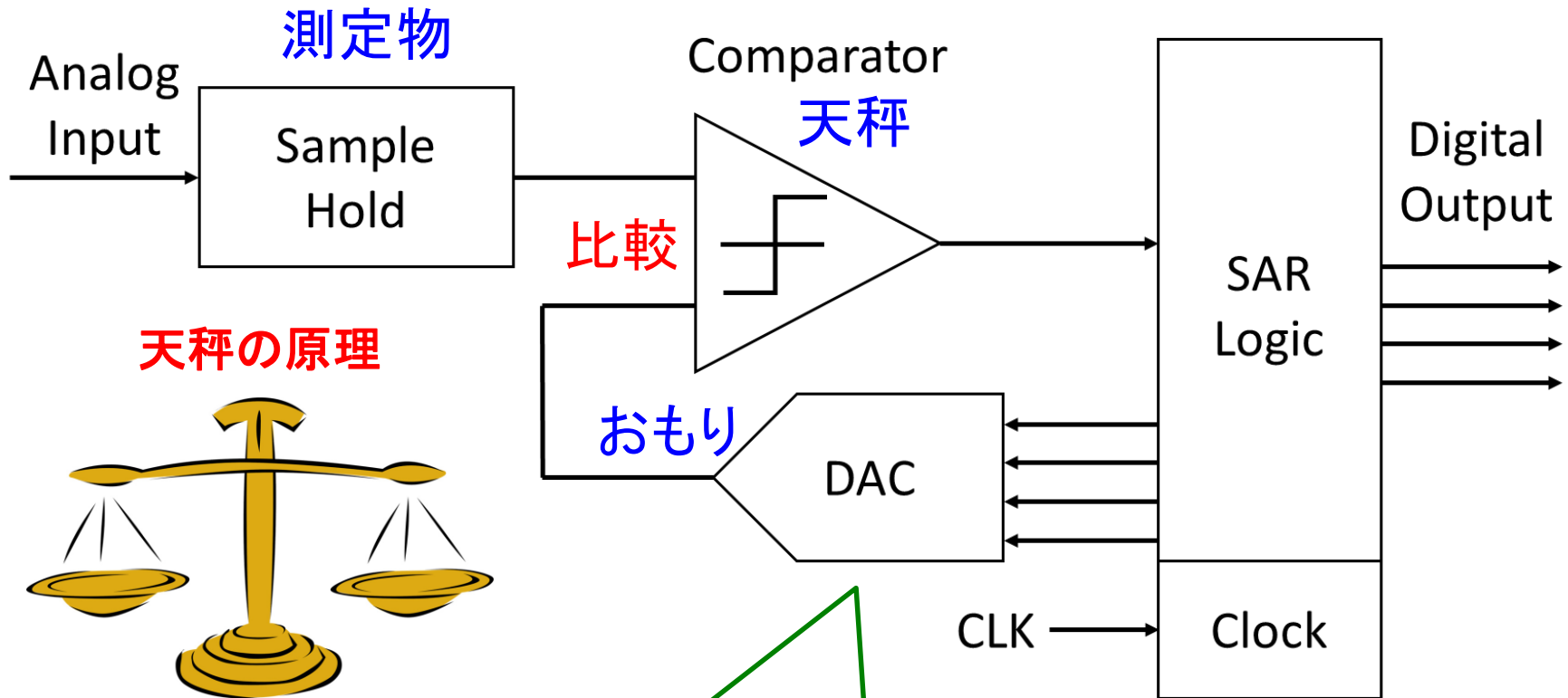
という性質を発見した。



OUTLINE

1. はじめに
2. 逐次比較近似ADCについて
3. 黄金分割法とフィボナッチ探索法
4. フィボナッチ数列重み付けSAR ADC
5. 黄金分割探索SAR ADC
6. 回路を軽量化した黄金分割探索SAR ADC
7. 数式での証明・シミュレーション
8. まとめ

逐次比較近似ADC(SAR ADC)



天秤の原理



一般的には二進重みを利用
(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ...)



SAR: Successive Approximation Register

二進探索SAR ADCの動作

一般的なSAR ADC

実際の例

5bit5step ADC

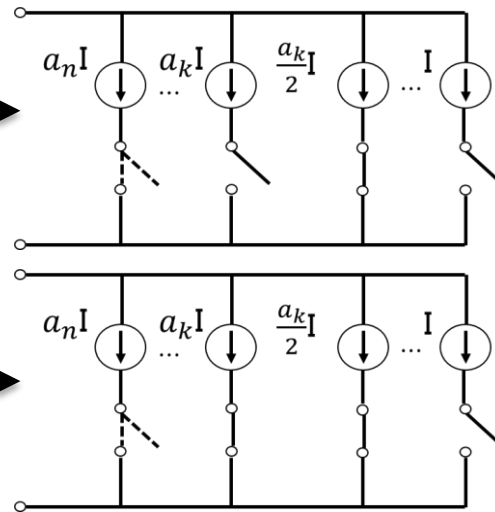
input 10.7

output 11

入力と比較点を比較

入力 < 比較点

入力 > 比較点



step	1st	2nd	3rd	4th	5th	output
31						31
30						30
29						29
28						28
27						27
26						26
25						25
24						24
23						23
22						22
21						21
20						20
19						19
18						18
17						17
16						16
15						15
14						14
13						13
12						12
11						11
10						10
9						9
8						8
7						7
6						6
5						5
4						4
3						3
2						2
1						1
0						0

Legend:
 — : 比較点 (Comparison point)
 ■ : 解存在範囲 (Solution range)

Level

入力 (Input)

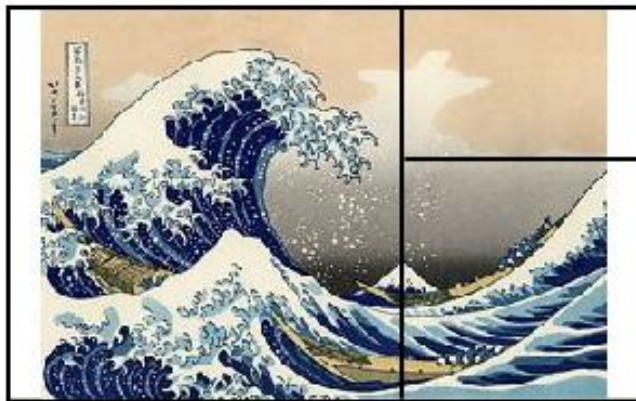
OUTLINE

1. はじめに
2. 逐次比較近似ADCについて
3. **黄金分割法とフィボナッチ探索法**
4. フィボナッチ数列重み付けSAR ADC
5. 黄金分割探索SAR ADC
6. 回路を軽量化した黄金分割探索SAR ADC
7. 数式での証明・シミュレーション
8. まとめ

黄金比

- $a:b = b:(a+b)$ を満たす比のこと
- 最も美しい比とされ $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 約5:8
- $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ と表す

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

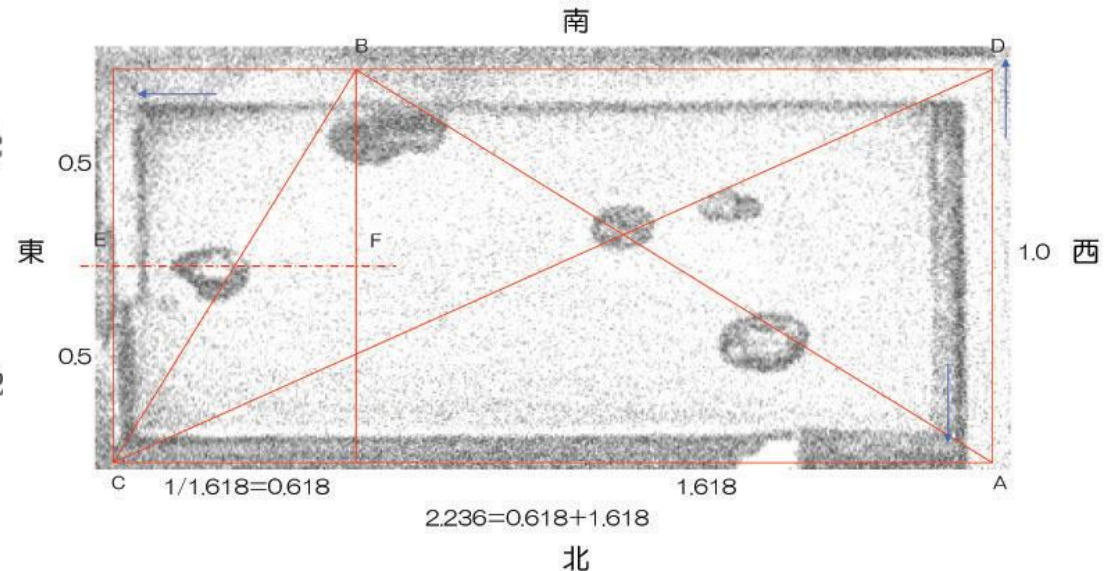


1

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



フィボナッチ数列

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$



フィボナッチ数列は

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

と続く

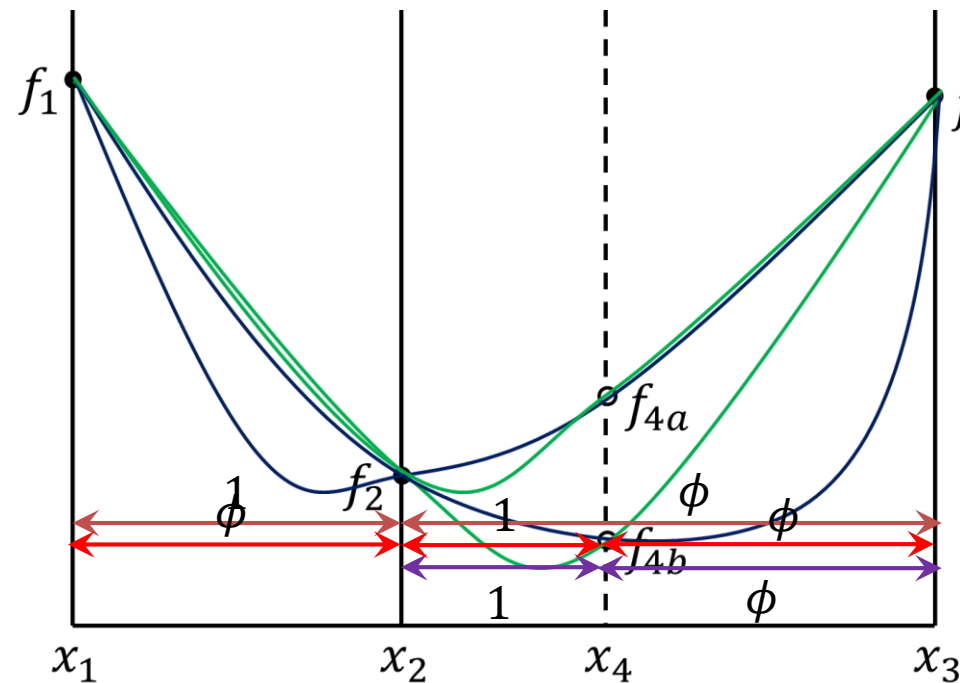
フィボナッチ数列で隣り合う数は黄金比に収束する

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1.618033988749895 \dots = \phi$$

黄金分割法

- 単峰関数の極値を効率的に求める方法
- 分割の比が黄金比となる

f_2 と f_4 を比較



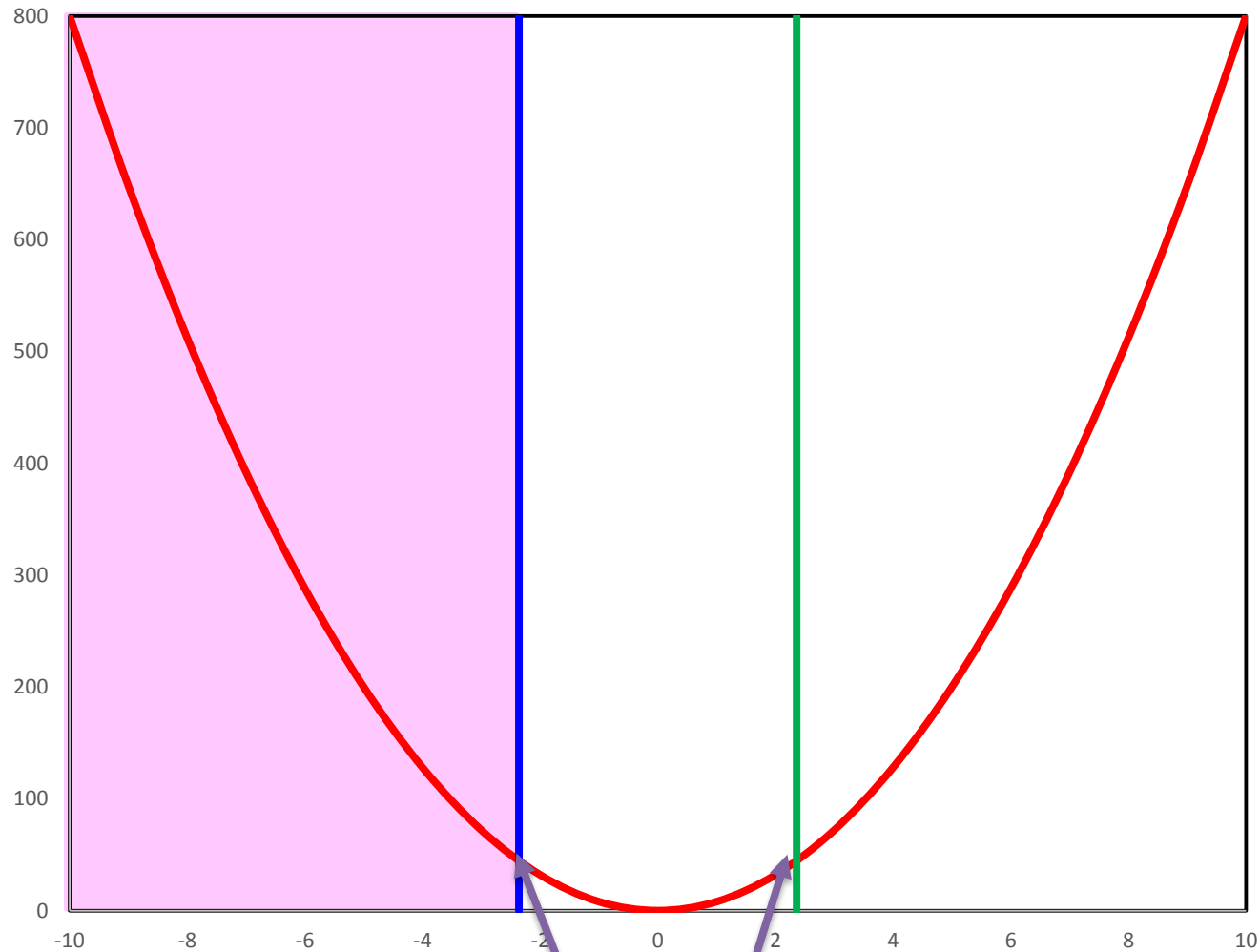
$f_4 = f_{4a}$ のとき

$f_2 < f_{4a}$ となるので $x_3 \sim x_4$ を削除

$f_4 = f_{4b}$ のとき

$f_2 < f_{4b}$ となるので $x_1 \sim x_2$ を削除

黄金分割法 具体例

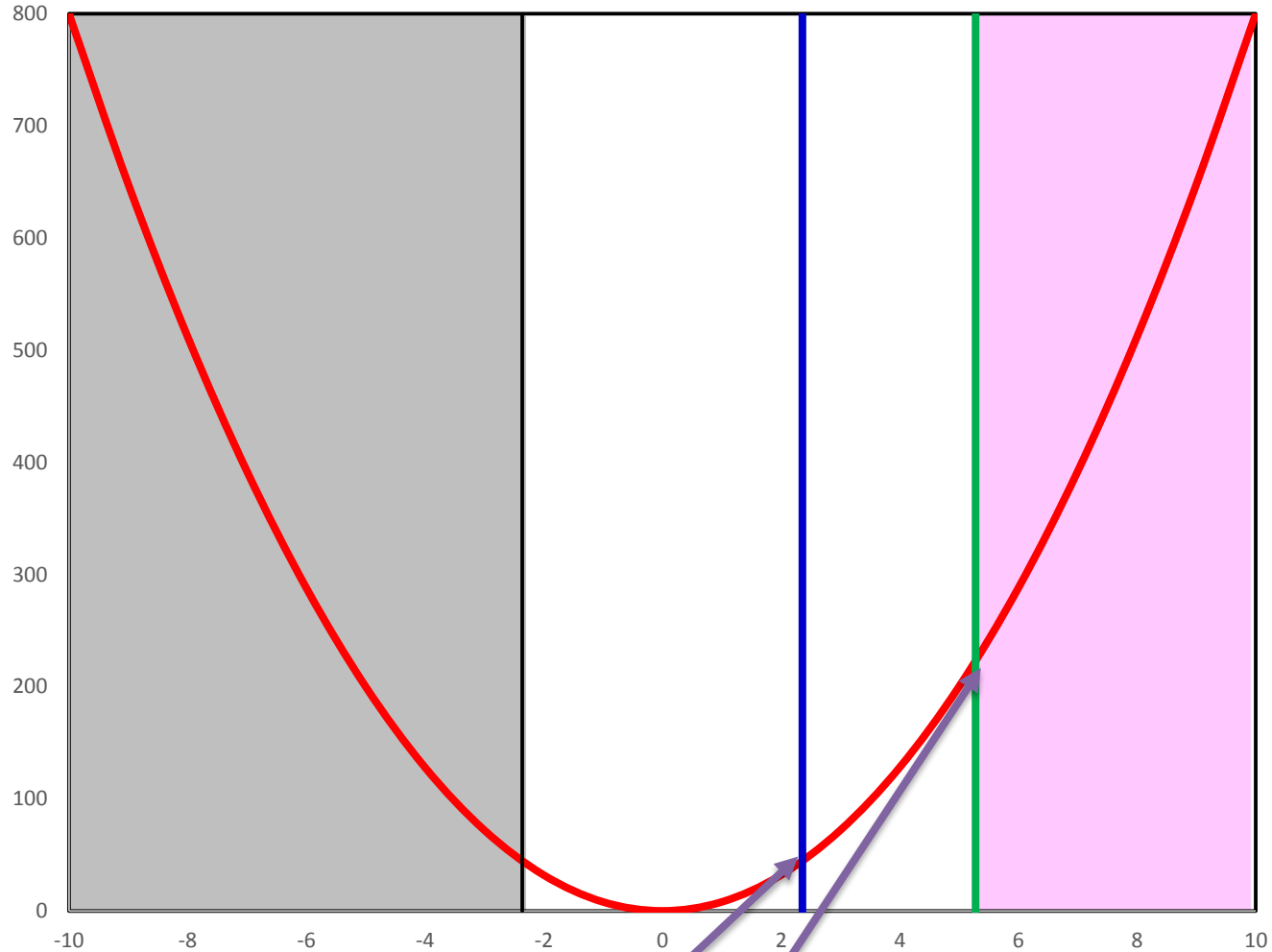


比較



同じなので今回は青の線より左の部分を消去

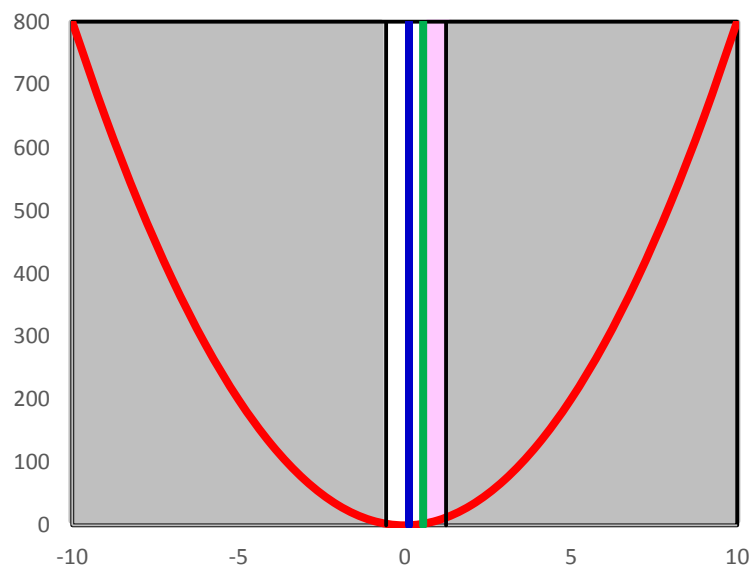
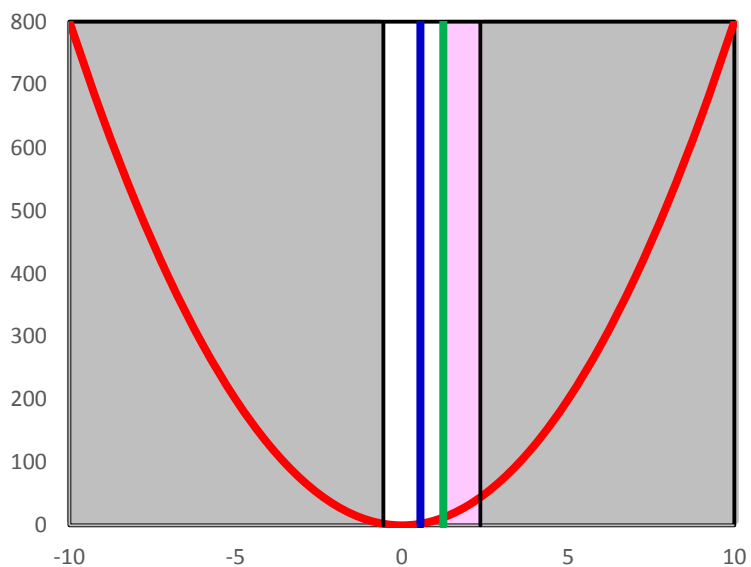
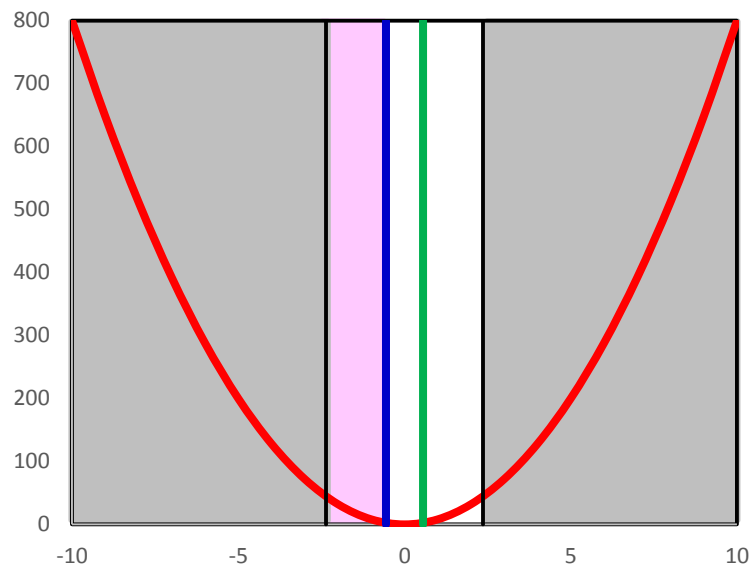
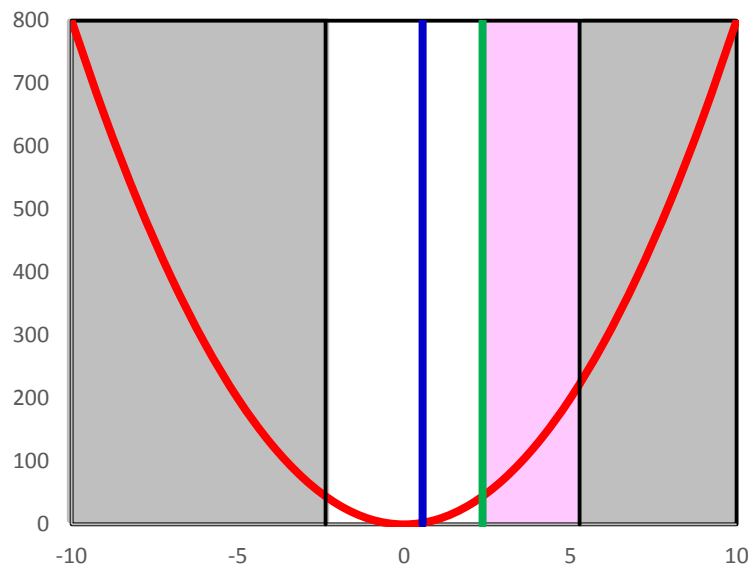
黄金分割法 具体例



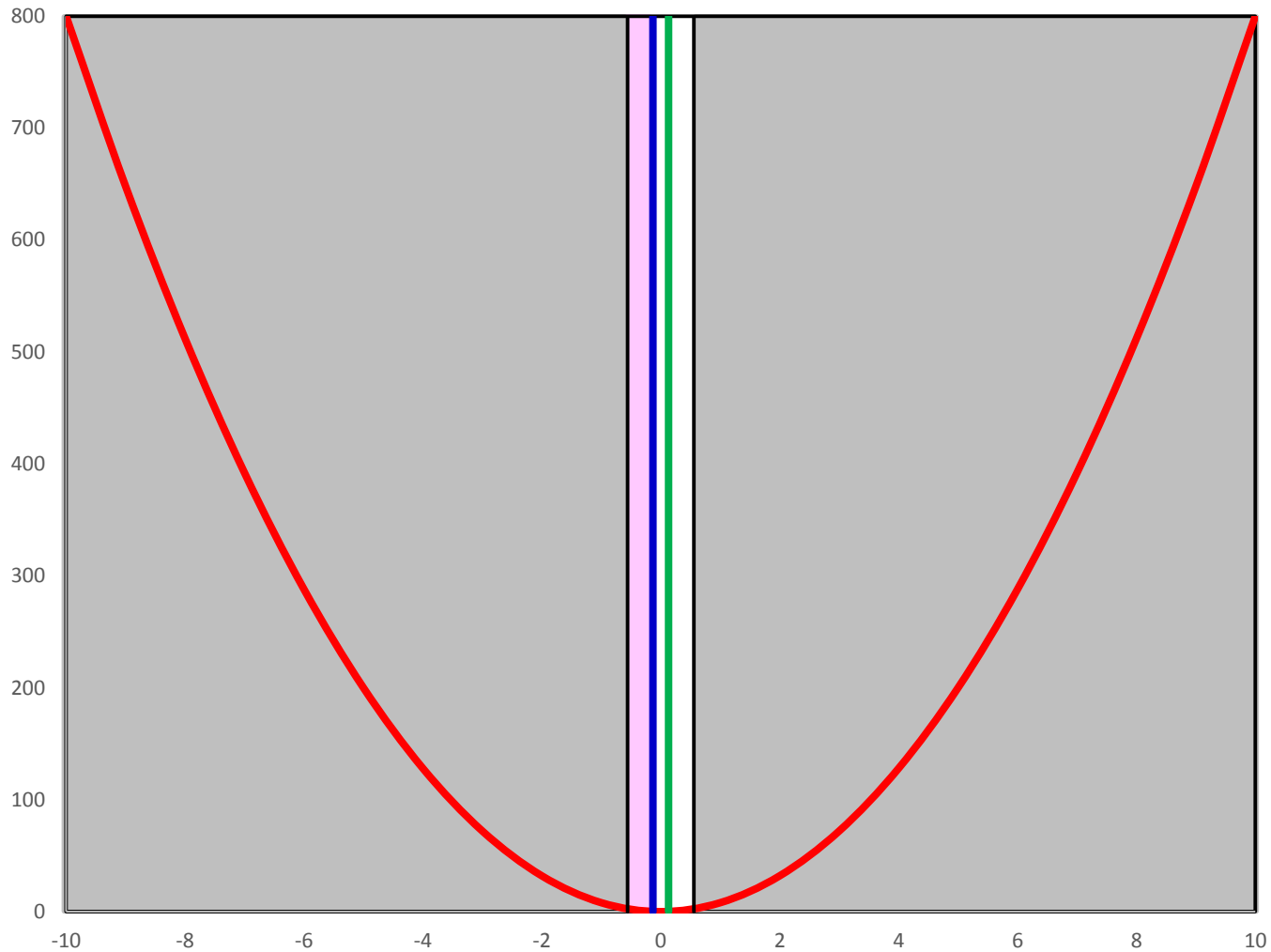
比較

右のほうが大きいので緑の線より右の部分を削除

黄金分割法 具体例



黄金分割法 具体例

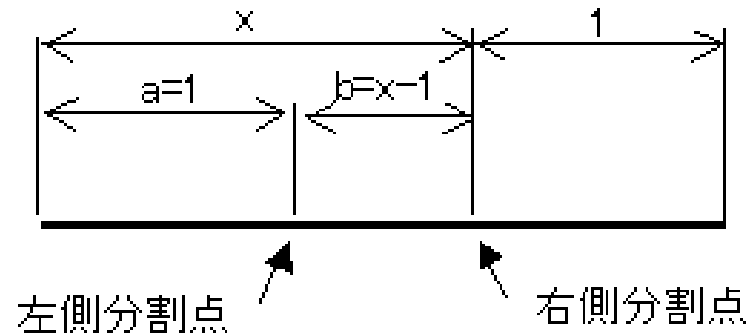


フィボナッチ探索法

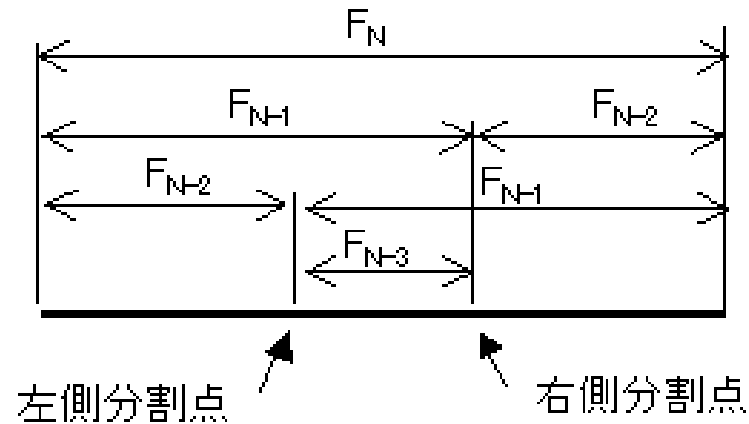
ADCは整数のみ扱う

- 黄金分割法を整数のみで行う方法
- フィボナッチ数列を使用

黄金分割法
(x :黄金比)



フィボナッチ探索法
(F_X :フィボナッチ数)



OUTLINE

1. はじめに
2. 逐次比較近似ADCについて
3. 黄金分割法とフィボナッチ探索法
4. **フィボナッチ数列重み付けSAR ADC**
5. 黄金分割探索SAR ADC
6. 回路を軽量化した黄金分割探索SAR ADC
7. 数式での証明・シミュレーション
8. まとめ

冗長性を持つSAR ADC

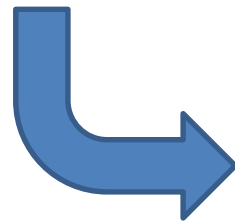
冗長: 余分や余裕のこと

↓ SAR ADCに適用

時間の冗長性を利用
判定ステップ数を増加

↓ 5step ⇒ 6step など

デジタルコードによる表現方法増加



SAR ADC { 誤り耐性向上
変換速度向上

二進重み 1,2,4,8,16



フィボナッチ数列 1,1,2,3,5,8



フィボナッチ数列重み付けSAR ADC

フィボナッチ数列重み付けSAR ADC

3点の性質を発見！

- ① 許容値 $q(k)$ は必ずフィボナッチ数
- ② 許容できる範囲が必ず接する
- ③ 内部DA変換器出力の不完全整定を考慮すると最速のSAR ADCになる

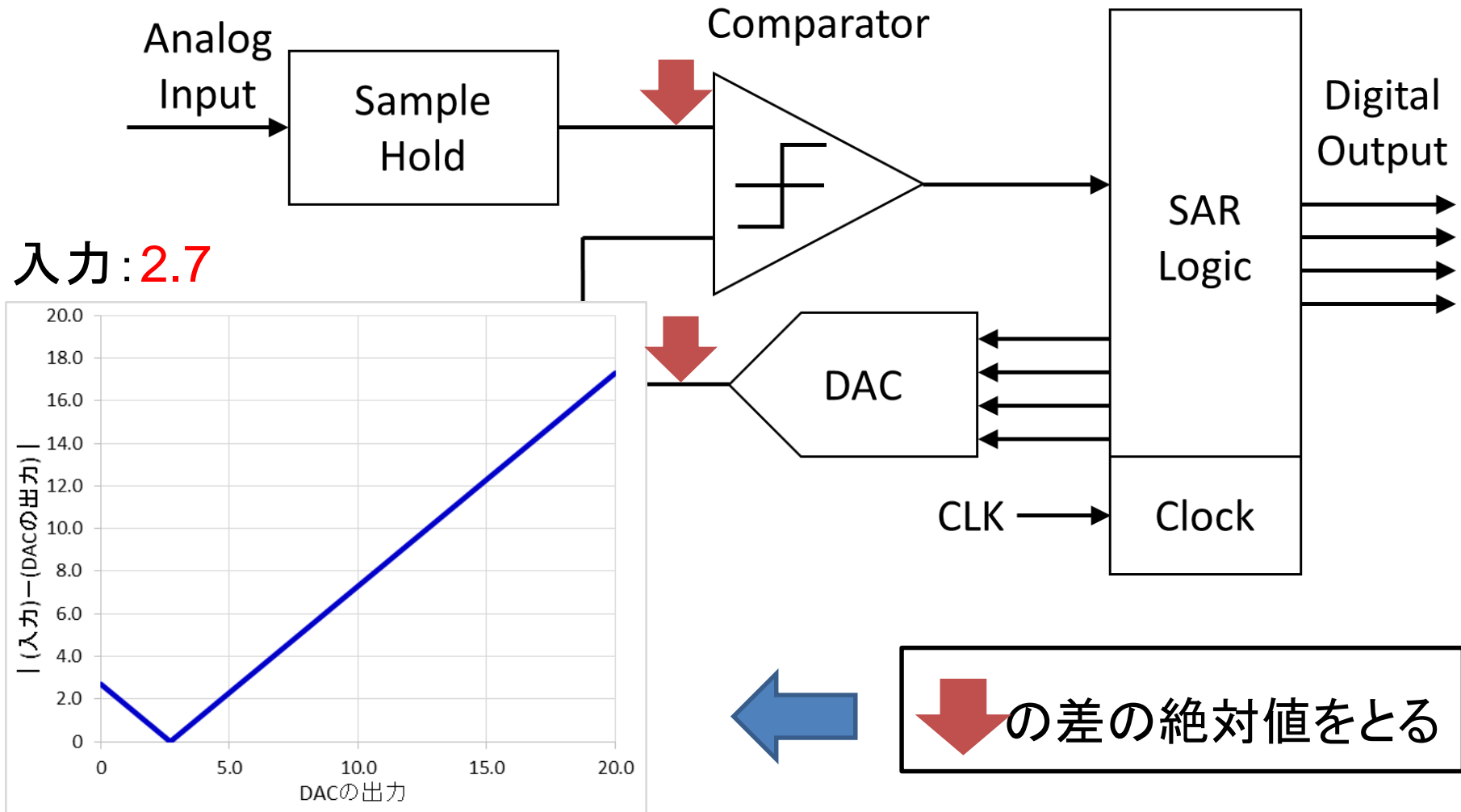
Step	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
Weight p(k)	16	8	5	3	2	1	1
33					↓		
32				↕			
31				↕			
30			↕		↕		
29			↕		↕		
28			↕		↕		
27			↕		↕		
26		↕		↕			
25		↕		↕			
24		↕		↕			
23		↕		↕			
22		↕		↕			
21		↕		↕			
20	↕	↕		↕			
19	↕	↕		↕			
18	↕	↕		↕			
17	↕	↕		↕			
16	↕	↕		↕			
15	↕	↕		↕			
14	↕	↕		↕			
13	↕	↕		↕			
12	↕	↕		↕			
11	↕	↕		↕			
10	↕	↕		↕			
9	↕	↕		↕			
8	↕	↕		↕			
7	↕	↕		↕			
6	↕	↕		↕			
5	↕	↕		↕			
4	↕	↕		↕			
3	↕	↕		↕			
2	↕	↕		↕			
1	↕	↕		↕			
0	↕	↕		↕			
-1	↕	↕		↕			
-2	↕	↕		↕			

Level

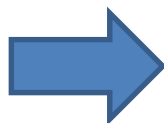
OUTLINE

1. はじめに
2. 逐次比較近似ADCについて
3. 黄金分割法とフィボナッチ探索法
4. フィボナッチ数列重み付けSAR ADC
5. **黄金分割探索SAR ADC**
6. 回路を軽量化した黄金分割探索SAR ADC
7. 数式での証明・シミュレーション
8. まとめ

考え方

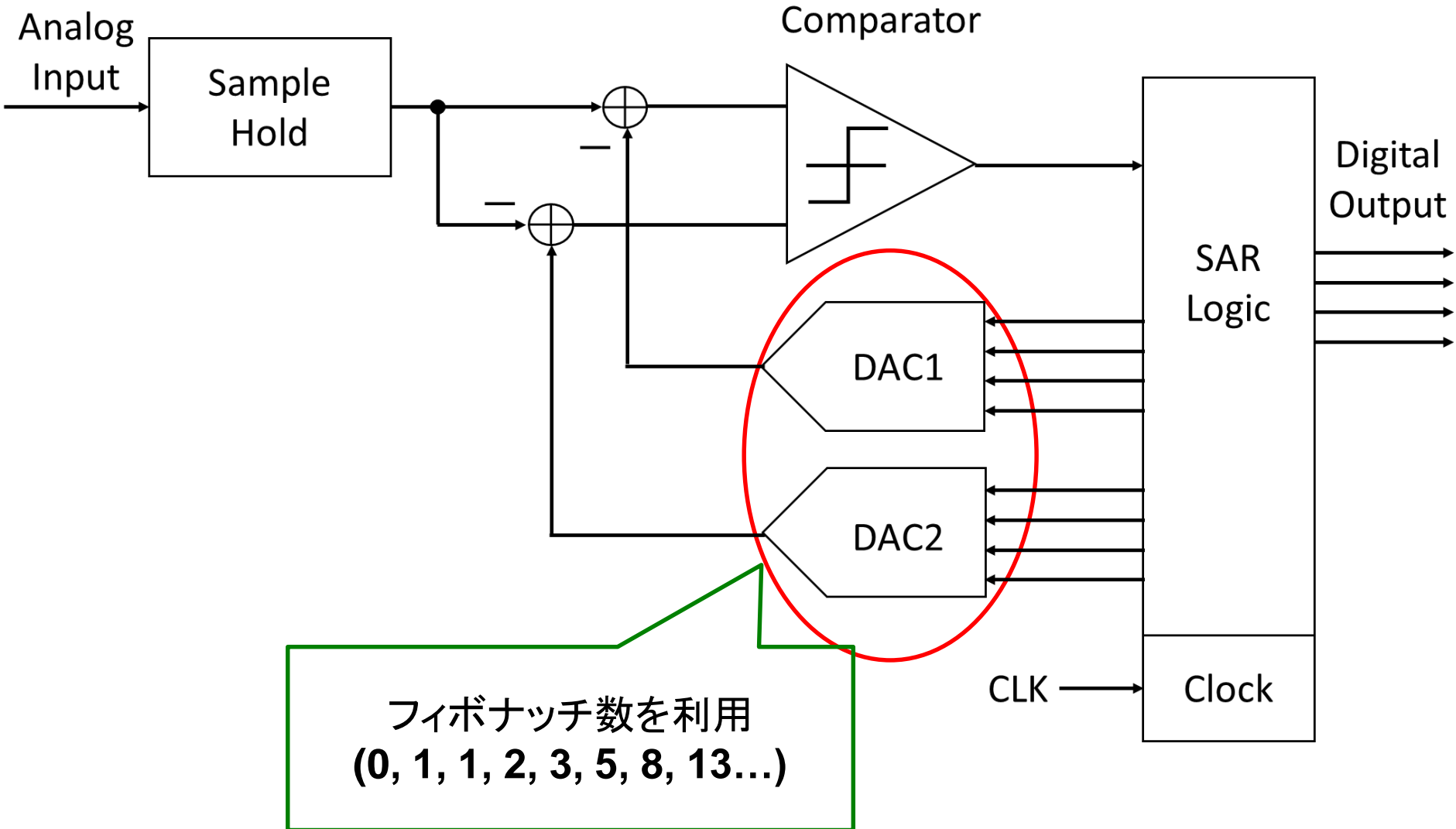


極小値を持つ単峰関数

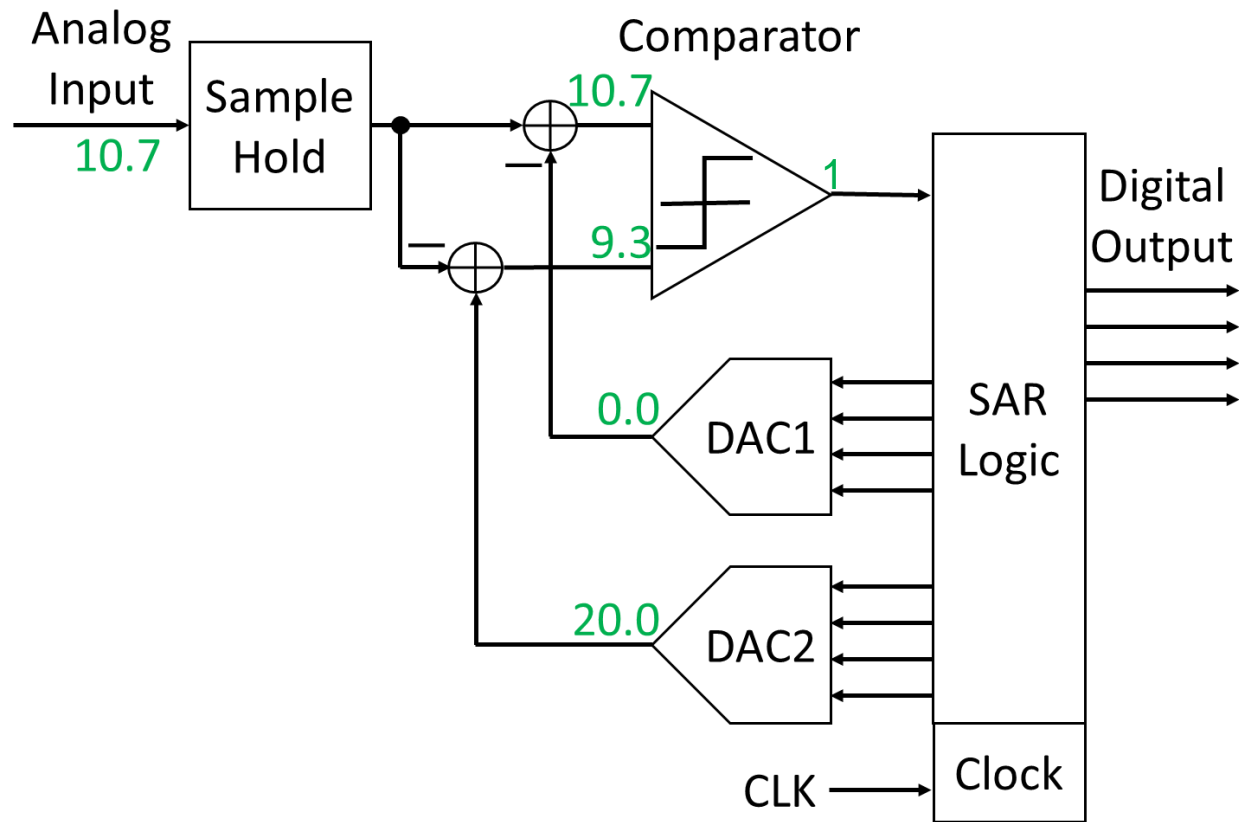


黄金分割法を用いることができる!?

黄金分割探索SAR ADC

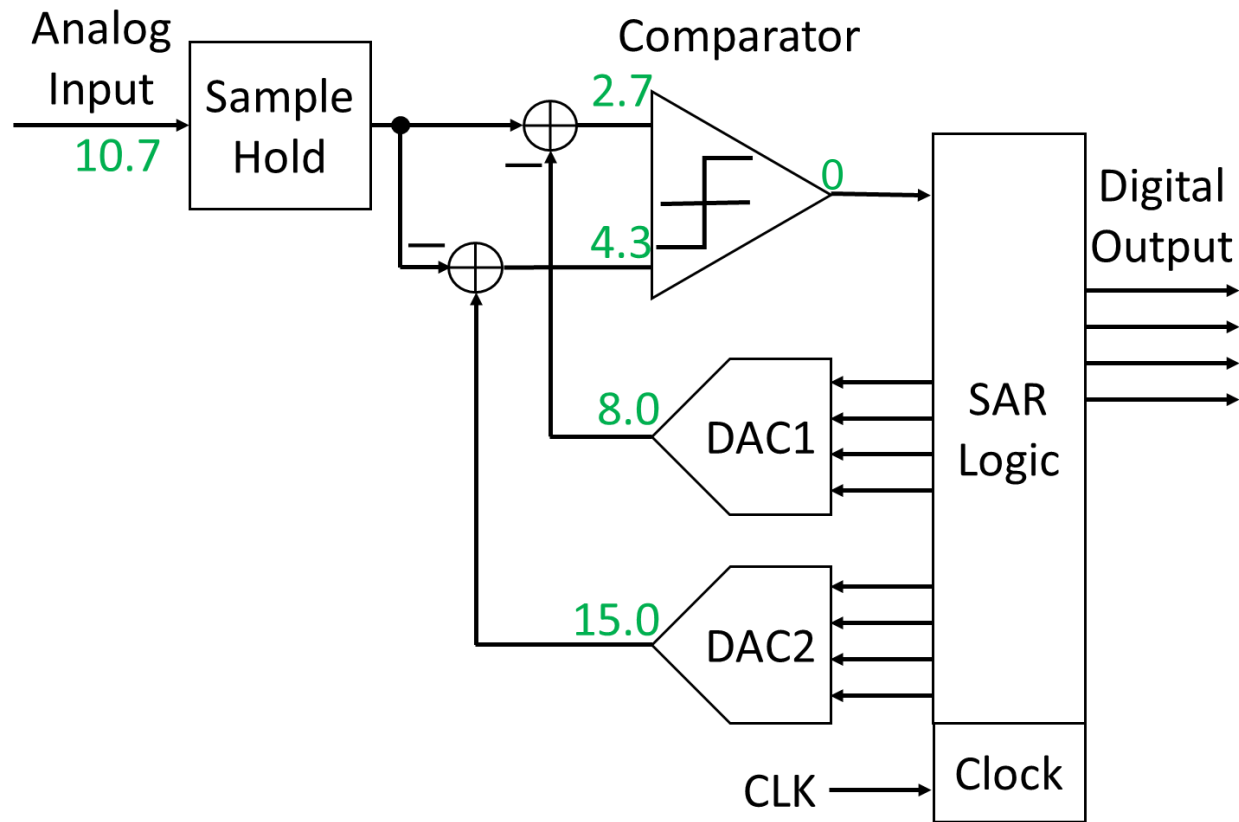


黄金分割探索SAR ADCの動作



	step	1st	2nd	3rd	4th	5th	output
	20						20
	19						19
	18						18
	17						17
	16	9.3					16
	15						15
	14						14
	13						13
	12						12
	11						11
	10						10
Level	9						9
	8						8
	7						7
	6						6
	5						5
	4	10.7					4
	3						3
	2						2
	1	1					1
	0						0
	-1						-1

黄金分割探索SAR ADCの動作

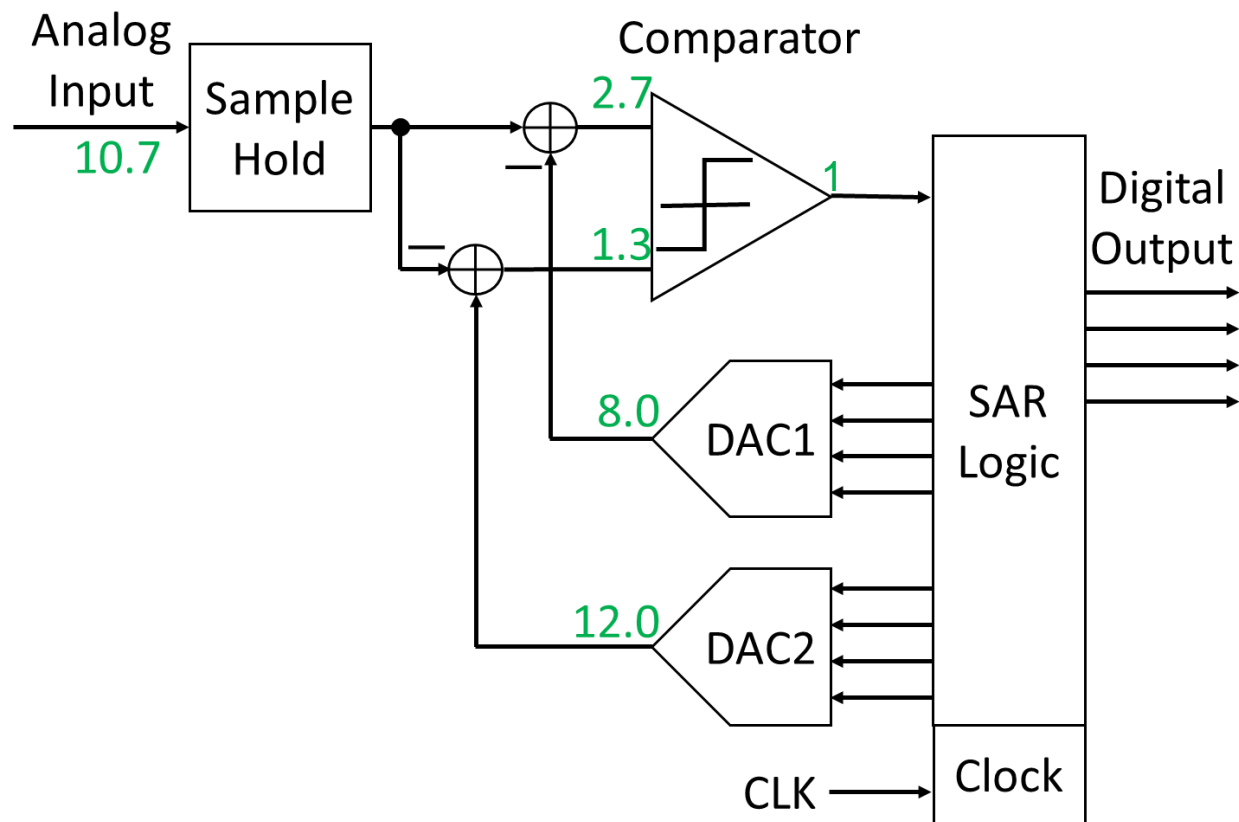


step	1st	2nd	3rd	4th	5th	output
20						20
19						19
18						18
17						17
16						16
15						15
14						14
13						13
12						12
11						11
10						10
9						9
8						8
7						7
6						6
5						5
4						4
3						3
2						2
1	1	0	0			1
0						0
-1						-1

Level

Detailed description of the table: The table shows the step-by-step operation of the SAR ADC. The 'step' column ranges from 20 down to -1. The 'output' column shows the current level. The '1st', '2nd', '3rd', '4th', and '5th' columns show the results of the comparisons. A blue vertical bar highlights the 3rd step. A green double-headed arrow indicates a range of 4.3 between levels 10 and 14. A green double-headed arrow indicates a range of 2.7 between levels 8 and 10. Red horizontal bars are present at levels 0, 1, 7, 8, 14, 15, and 20.

黄金分割探索SAR ADCの動作



step	1st	2nd	3rd	4th	5th	output
20						20
19						19
18						18
17						17
16						16
15						15
14						14
13						13
12						12
11						11
10						10
9						9
8						8
7						7
6						6
5						5
4						4
3						3
2						2
1	1	0	0	1		1
0						0
-1						-1

Level

Vertical scale markers: 1.3, 2.7

OUTLINE

1. はじめに
2. 逐次比較近似ADCについて
3. 黄金分割法とフィボナッチ探索法
4. フィボナッチ数列重み付けSAR ADC
5. 黄金分割探索SAR ADC
6. 回路を軽量化した黄金分割探索SAR ADC
7. 数式での証明・シミュレーション
8. まとめ

軽量化した黄金分割探索SAR ADC

現在の比較方法

$$V_{in} - DAC1 (\geq \text{or } \leq) DAC2 - V_{in}$$



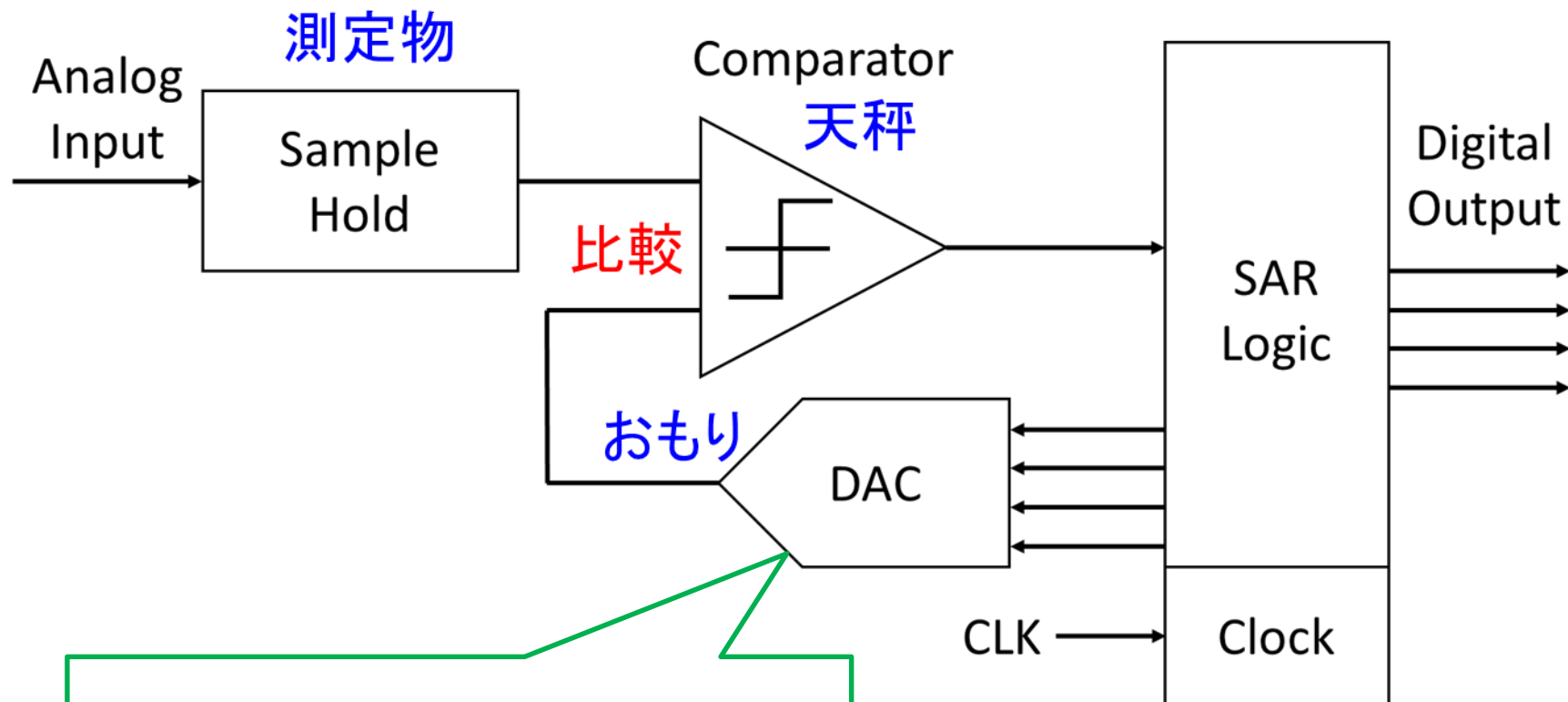
$$2V_{in} (\geq \text{or } \leq) DAC1 + DAC2$$



新しい比較方法

$$V_{in} (\geq \text{or } \leq) \frac{1}{2} (DAC1 + DAC2)$$

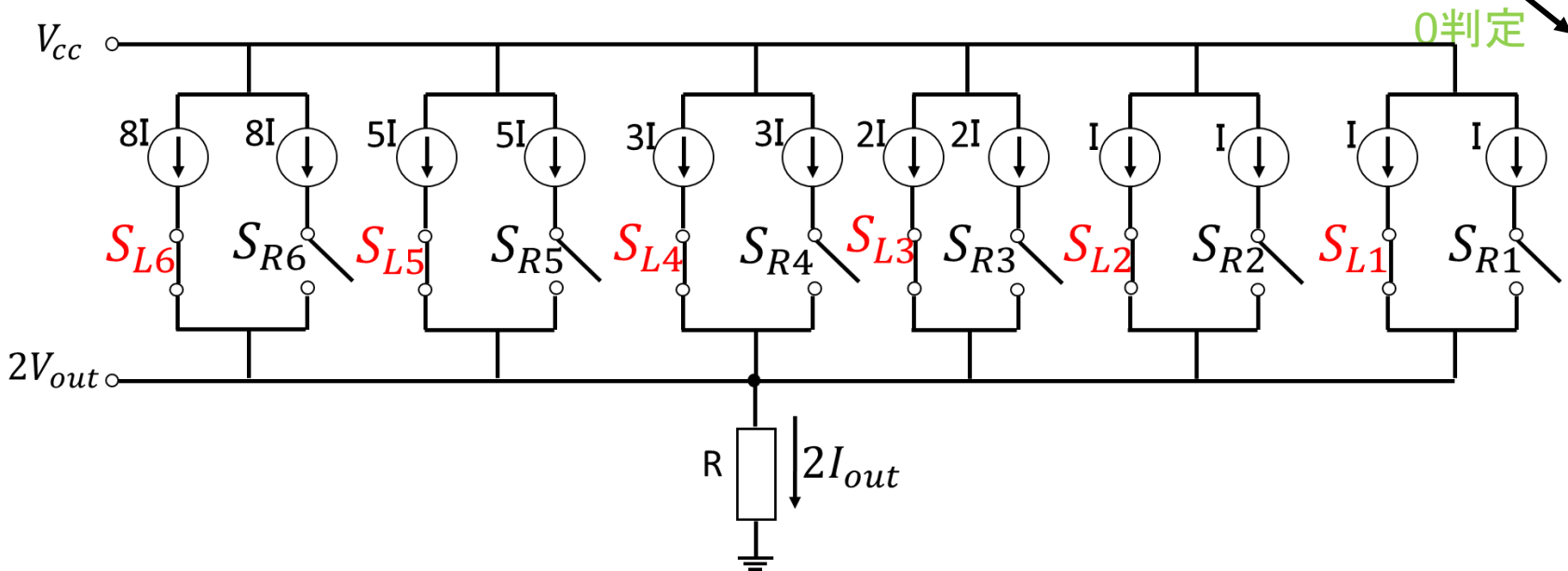
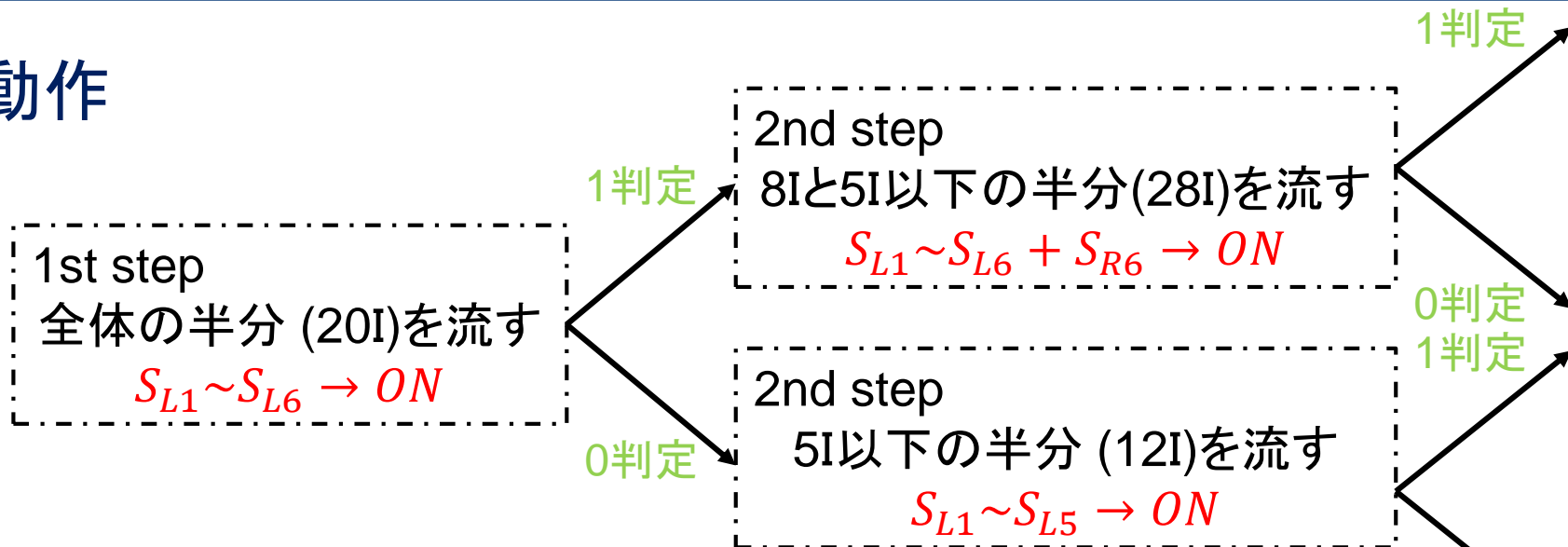
軽量化した黄金分割探索SAR ADC



フィボナッチ数を利用して用いる

軽量化した黄金分割探索SAR ADC

動作



軽量化黄金分割探索SAR ADC まとめ

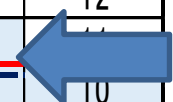
軽量化黄金分割探索SAR ADC

Input 10.7

Output 10

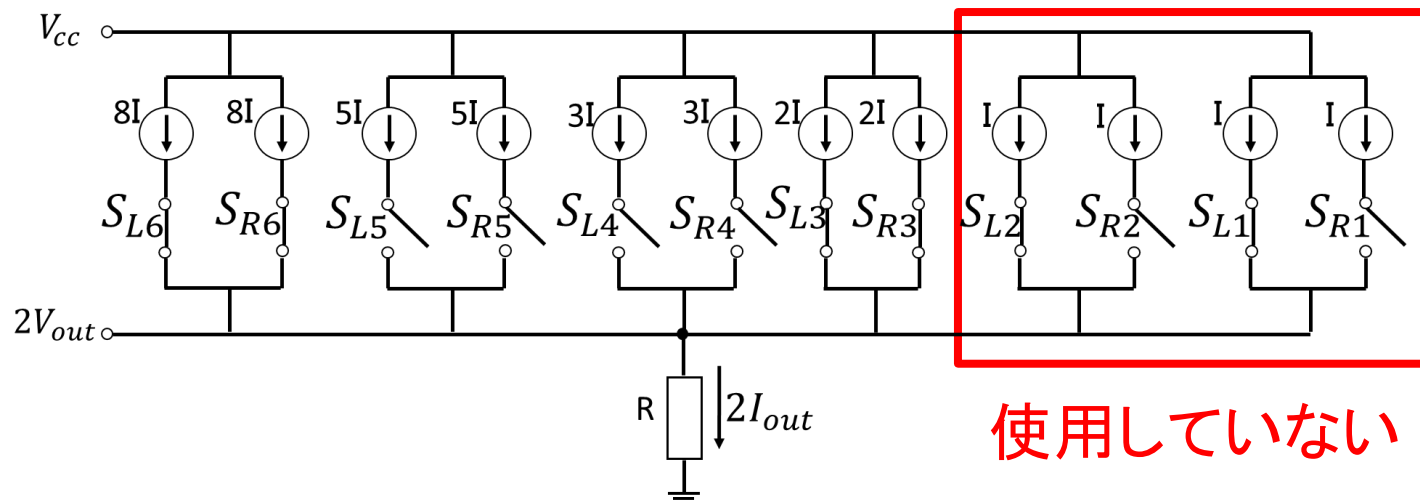
	step	1st	2nd	3rd	4th	5th	output
Level	20			-----: 入力			20
	19						19
	18			-----: 比較点			18
	17						17
	16			■: 解存在範囲			16
	15						15
	14		-----				14
	13		-----				13
	12						12
	11			-----			11
	10	-----			-----		10
	9						9
	8						8
	7						7
	6						6
	5						5
	4						4
	3						3
	2						2
	1						1
0						0	
-1						-1	

DACの
構成図は

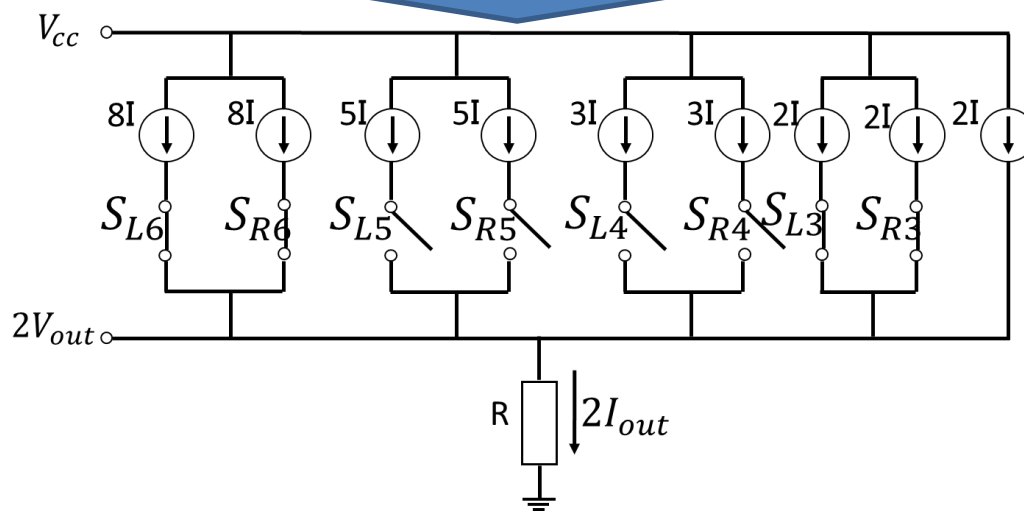


軽量化した黄金分割探索SAR ADC

最終(5)stepのDAC



さらに軽量化



OUTLINE

1. はじめに
2. 逐次比較近似ADCについて
3. 黄金分割法とフィボナッチ探索法
4. フィボナッチ数列重み付けSAR ADC
5. 黄金分割探索SAR ADC
6. 回路を軽量化した黄金分割探索SAR ADC
7. **数式での証明・シミュレーション**
8. まとめ

数式での証明

フィボナッチ数列

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

フィボナッチ数列の最大値から累算を行った数列

$$S_1 = F_n$$

$$S_2 = F_n + F_{n-1}$$

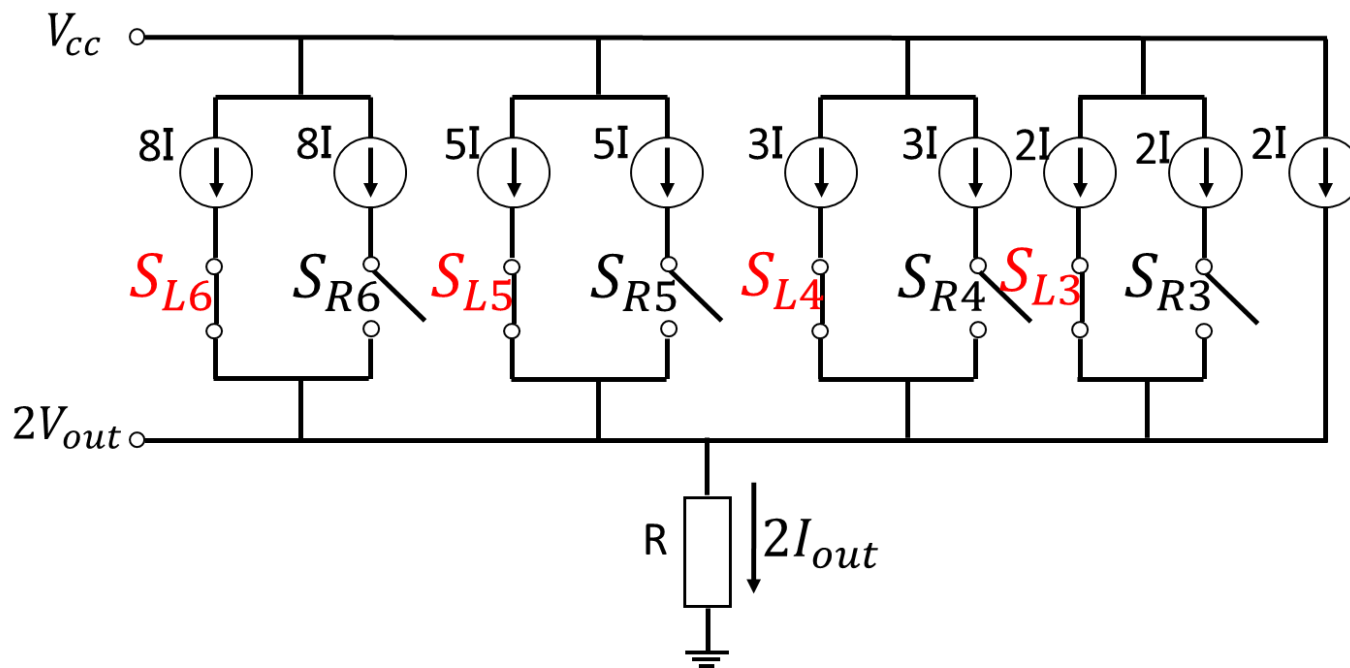
$$S_n = F_n + F_{n-1} + \cdots + F_1$$

数式での証明

k番目の比較点 a_k

1回目の判定は全体の半分の電流を流しているので

$$a_1 = \frac{S_n}{2}$$



数式での証明

入力 V_{in}

$a_k < V_{in}$ のとき

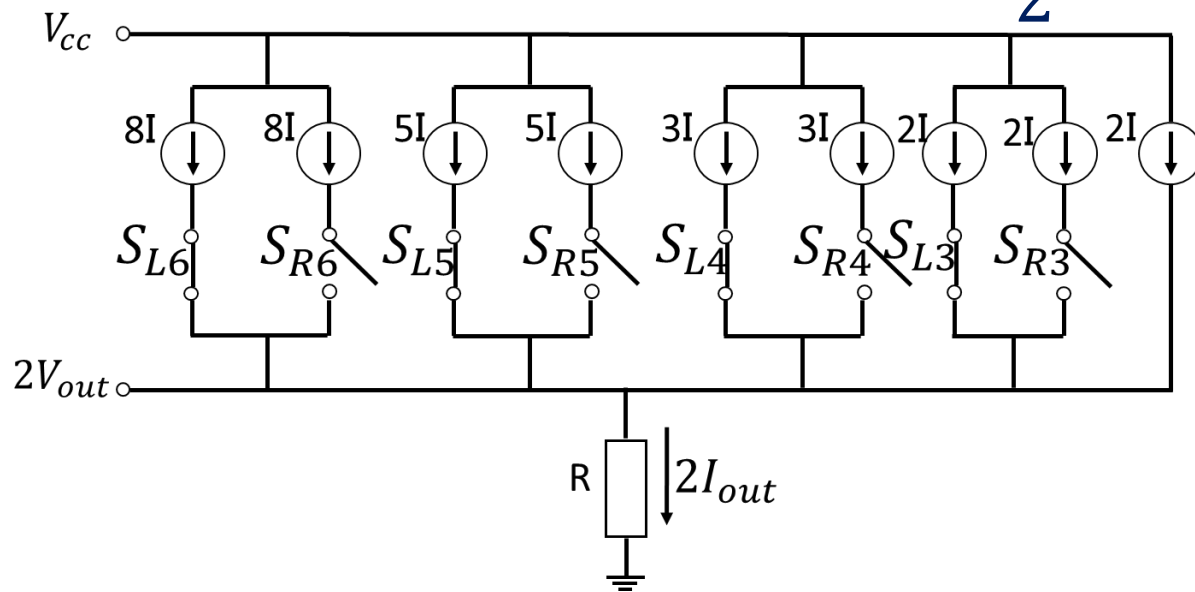
S_{Lk} が OFF なので

$$a_{k+1} = a_k - \frac{F_{n-k+1}}{2}$$

$a_k > V_{in}$ のとき

S_{Rk} が ON なので

$$a_{k+1} = a_k + \frac{F_{n-k+1}}{2}$$



数式での証明

以上の結果より

$$V_{in} = 0 \text{ のとき} \quad a_k = \frac{S_n}{2} - \frac{S_k}{2}$$

$$V_{in} = S_n \text{ のとき} \quad a_k = \frac{S_n}{2} + \frac{S_k}{2}$$



$$2a_k = (F_n + F_{n-1} + \dots + F_1) + (\pm F_n \pm F_{n-1} \pm \dots \pm F_1)$$

隣り合う比較電圧の差は
フィボナッチ数列



フィボナッチ数列重み付け
SAR ADCと一致する

$n = 6$ のときの比較電圧

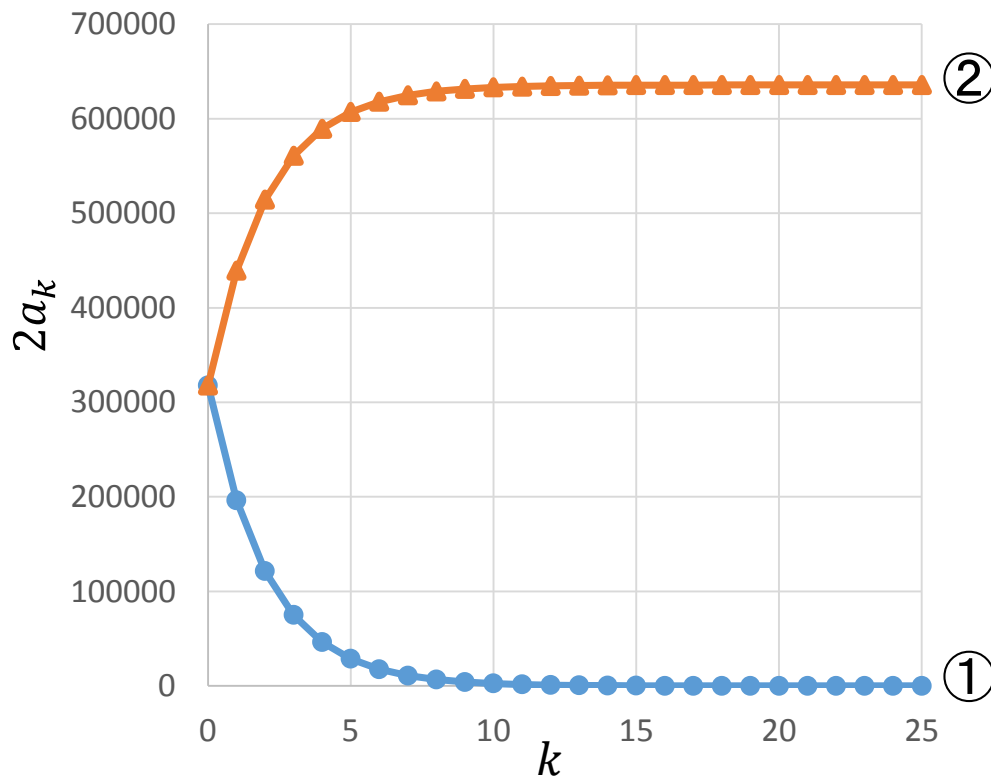
Step	1	2	3	4	5	6
39						1
38						
37						
36					2	
35						
34				3		
33						
32						
31						
30						
29						
28						
27						
26						
25						
24						
23						
22						
21						
20						
19						
18						
17						
16						
15						
14						
13						
12						
11						
10						
9						
8						
7						
6						
5						
4						
3						
2						
1						
0						

Diagram illustrating the comparison voltages for $n = 6$. The vertical axis is labeled $2a_k$ and ranges from 0 to 39. The horizontal axis is labeled Step and ranges from 1 to 6. Blue arrows indicate the differences between adjacent comparison voltages: 1 (between steps 5 and 6), 2 (between steps 4 and 5), 3 (between steps 3 and 4), 5 (between steps 2 and 3), and 8 (between steps 1 and 2).

シミュレーションでの確認

① $V_{in} = 0$ 、② $n = 26$ のとき $V_{in} = S_n = 317810$
 のシミュレーション結果

①は0、②は $2S_n = 635620$ に収束と予想



グラフから
 比較電圧がフィボナッチ数列
 の加減算となっている

期待通りの動作をしている

シミュレーションでの確認

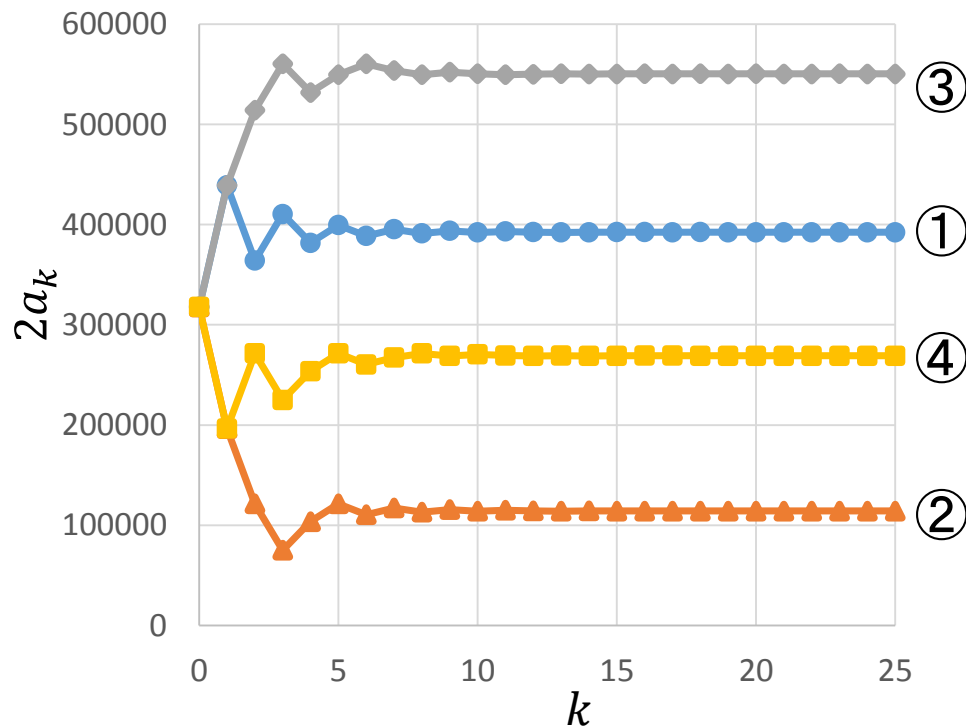
① $V_{in} = (1.2349/2)S_n = 196231.78$ 、

② $V_{in} = (0.35931/2)S_n = 57096.156$ 、

③ $V_{in} = (1.7325/2)S_n = 275302.91$ 、

④ $V_{in} = (0.8469/2)S_n = 134576.64$ のときのシミュレーション結果

①392462、②114192、③550604、④269152に収束と予想



すべて意図した値に収束している

OUTLINE

1. はじめに
2. 逐次比較近似ADCについて
3. 黄金分割法とフィボナッチ探索法
4. フィボナッチ数列重み付けSAR ADC
5. 黄金分割探索SAR ADC
6. 回路を軽量化した黄金分割探索SAR ADC
7. 数式での証明・シミュレーション
8. まとめ

まとめ

得られた発見

入力電圧とDACの出力の差の絶対値を取った単峰関数に、
黄金分割法を適用したSAR ADCは
フィボナッチ重み付けSAR ADC
と一致する。

黄金比パワーか？

フィボナッチ重み付け逐次近似ADC

➡ 様々な面白い性質を発見

掘れど尽きぬ金鉱



汲めど渴させぬ泉



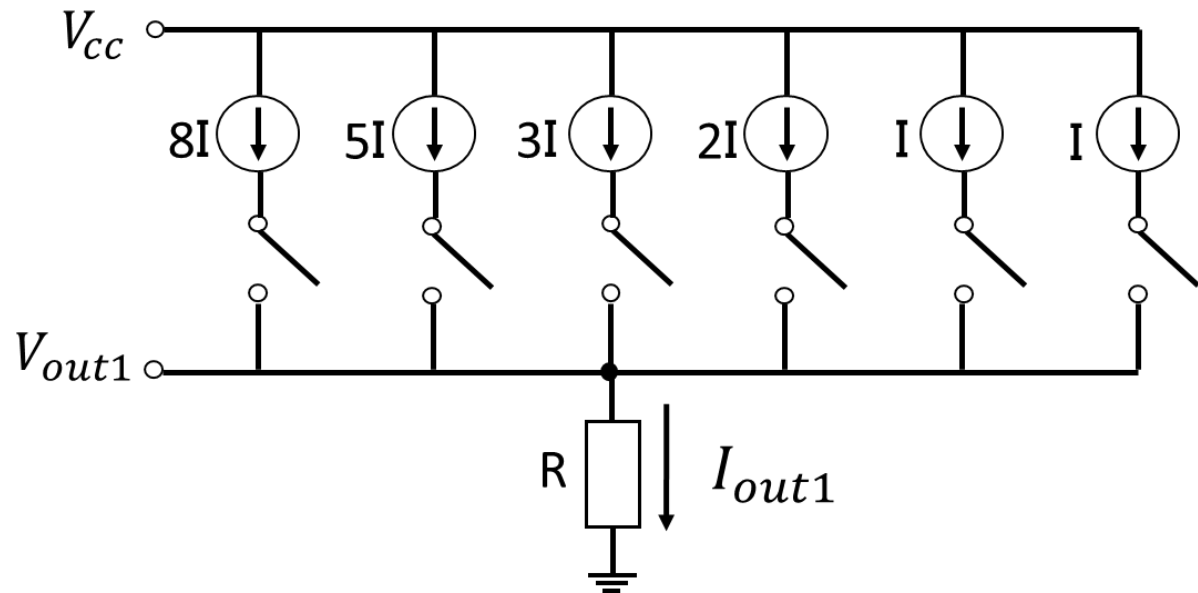
今後も黄金比、フィボナッチ数列の
電子回路応用への研究を行う

付録

黄金分割探索SAR ADCの動作

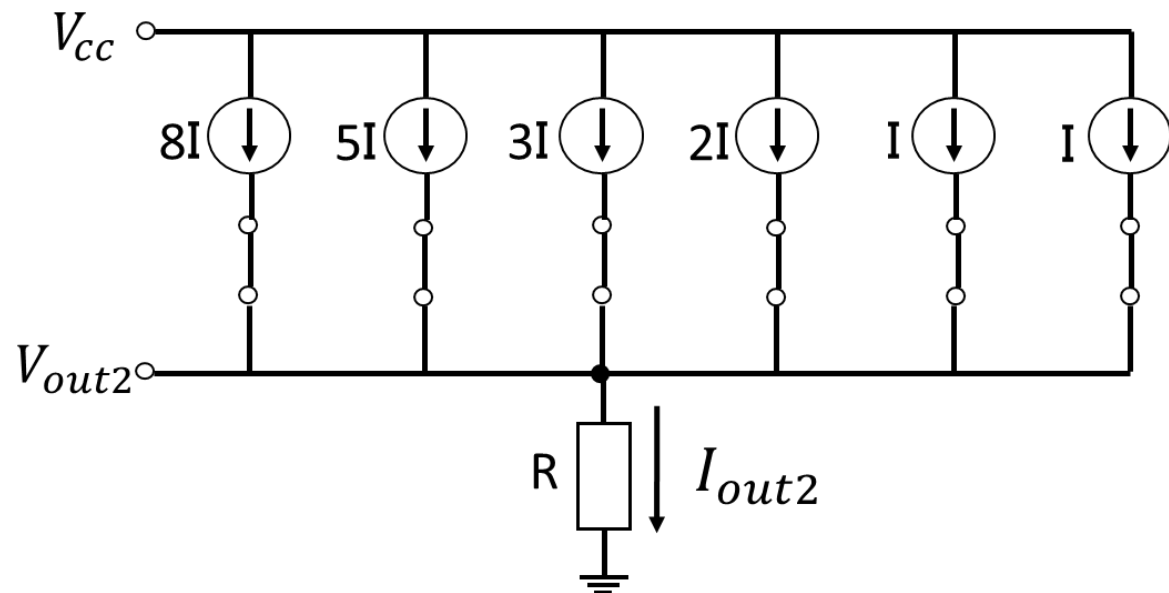
DAC1

$$I_{out1} = 0$$



DAC2

$$I_{out2} = 20I$$



黄金分割探索SAR ADCの動作

	step	1st	2nd	3rd	4th	5th	output
Level	20						20
	19						19
	18						18
	17						17
	16						16
	15						15
	14						14
	13						13
	12						12
	11						11
	10						10
	9						9
	8						8
	7						7
	6						6
	5						5
	4						4
	3						3
	2						2
	1						1
0						0	
-1						-1	

-----: 入力

-----: 比較点

■: 解存在範囲

Comparatorの出力

0→

(DAC1の出力)

1→

(DAC1の出力)+1

フィボナッチ数を用いたDAC 動作

$1 \leq k \leq n$ 段目において

	DAC1	DAC2
Comparatorの出力 ↓ 0		
Comparatorの出力 ↓ 1		

回路とシステム研究会 Q&A

- ① DACやSARを作るとき、VDECの試作について
 - 今回試作は行ってない 機会があれば行いたい
- ② 黄金分割法とバイナリ型で比較回数は減るか？
 - 冗長性があるため黄金分割法の方がstepが多い
- ③ V_{in} の精度によって出力が変化するのは？
 - V_{in} の精度を考えてシミュレーションを行っていない
- ④ ベストなbit比は存在するのか？
 - 単峰関数には黄金比を用いると効率が良いとあり、黄金比を用いたため、他の比率は考えてない
- ⑤ フィボナッチ数列重み付けSAR ADCで何が最速？
 - 自分が研究してないため詳しくは文献を