

# 波形サンプリング回路設計の本質的考察

栗原 圭汰\* (群馬大学) 小林 謙介 (技術コンサルタント)

新井 美保 上森 将文 小林 春夫 (群馬大学)

キーワード: サンプリングオシロスコープ, インパルスサンプリング, アナログ-デジタル変換器, トラック・ホールド回路, 信号雑音比, 利得帯域幅積

(Keywords: Sampling Oscilloscope, Impulse Sampling, ADC, Track/Hold Circuit, SNR, GB Product)

## 1. はじめに

近年, 通信システム及び電子計測システムにおける信号の高周波化が注目されており, 高いダイナミックレンジを持つ広帯域のサンプル・ホールド回路が必要とされる ((1)-(6)). この論文では, 広帯域かつ高精度のサンプリング回路を実現するためのサンプリング技術を検討する. 具体的には, 帯域幅一定の条件下で SNR が最大となるサンプリング条件を導出し, その最適条件は T/H 方式とインパルスサンプリング方式の中間に位置することを示す (ストロブサンプリング方式). また, 最適条件導出過程で, T/H 方式, インパルスサンプリング方式及びビストロブサンプリング方式を統一して扱える理論を展開する.

## 2. サンプル・ホールド回路

### (2-1) S/H 回路の構成と動作

スイッチ SW とホールド容量 C からなる S/H (Sample Hold) 回路の動作を考える (図 1). スイッチが ON の時, ホールド容量 C は入力電圧  $V_{in}$  によって充電される (サンプルモード). その後, スイッチが OFF になるとホールド容量に一定の入力電圧が保持される (ホールドモード).

SoC 上の ADC 前段の S/H 回路は通常入力バッファ  $A_1$  と出力バッファ  $A_2$  が用いられる (図 1). しかしながら, 入力バッファ  $A_1$  を高速動作させることは難しく, 広帯域サンプリングオシロスコープでは通常入力バッファ  $A_1$  を除いた構成が用いられる. 以下, 入力バッファを除いた構成の S/H 回路を考える.

### (2-2) S/H 回路の熱雑音

ホールドモードの S/H 回路の熱雑音パワーは,

$$V_{n.out}^2 = \int_0^{\infty} \frac{4k_B T R_{off}}{1 + (2\pi f)^2 R_{off}^2 C^2} df = \frac{k_B T}{C}.$$

で与えられる. 広帯域化のためホールド容量 C を小さくすると, 熱雑音は大きくなってしまふ.

### (2-3) S/H 回路での二つの時定数 $\tau_1, \tau_2$

S/H 回路で二つの時定数  $\tau_1, \tau_2$  を考える. 一つは回路の合成抵抗 R とホールド容量 C からなる時定数  $\tau_1 = RC$  で, もう一つはスイッチ SW を ON するスイッチング窓時間  $\tau_2$  である. ここで, R は信号源の内部抵抗  $R_{SG}$  とスイッチのオン抵

抗  $R_{ON}$  の和であり, 以下, 一定の値  $50\Omega$  として議論する.

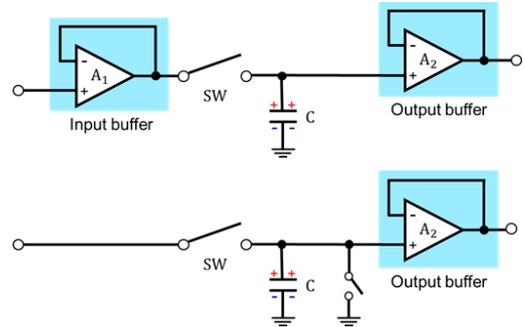


図 1 S/H 回路の構成,

入力バッファあり (上), 入力バッファなし (下)

Fig. 1. S/H circuits

with input buffer (top) and without it (bottom).

## 3. 2つの S/H 回路

### (3-1) トラック・ホールド回路 ( $\tau_1 \ll \tau_2$ の場合)

T/H (Track Hold) 回路はスイッチング時間窓  $\tau_2$  が十分長く二つの時定数が  $\tau_1 \ll \tau_2$  の関係にあり, SoC 上の ADC 前段等で用いられる (図 2). この方式では, スwitching 時間窓  $\tau_2$  は, 入力信号と出力信号の差が  $\frac{1}{2}$  LSB 以下になるまで必要である. すなわち, N ビット精度を得るためにはステップ入力を考えた際に次の関係を満たす必要がある.

$$1 - (1 - e^{-\tau_2/\tau_1}) = e^{-\tau_2/\tau_1} < 1/2^{N+1}.$$

よって,

$$\tau_2/\tau_1 > (N + 1) \cdot \ln 2.$$

T/H 回路はスイッチング時間窓  $\tau_2$  が RC 時定数  $\tau_1$  に比べて十分長い場合, 入力電圧に対して十分充電される (完全充電). このため, 単位ステップ入力に対して出力信号成分は  $S \approx 1$ , 出力熱雑音成分は  $N_{rms} = \sqrt{k_B T / C}$  で与えられるので, 信号雑音比 (SNR =  $V_{signal} / V_{noise}$ ) は,

$$SNR_1 = \sqrt{\frac{C}{k_B T}} \propto \sqrt{C}.$$

となる. 一方, 帯域幅  $\omega_{BW1}$  は,

$$\omega_{BW1} = \frac{1}{\tau_1} \propto \frac{1}{C}.$$

となり, SNR と帯域幅  $\omega_{BW1}$  はトレードオフの関係にあることが分かる. また, 伝達関数は次のようになる.

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau_1\omega}. \quad (1)$$

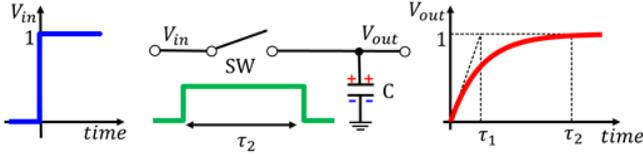


図2 T/H回路の入出力波形

Fig. 2. Input and output waveforms of T/H circuit.

### (3-2) インパルスサンプリング回路 ( $\tau_1 \gg \tau_2$ の場合)

インパルスサンプリング回路はスイッチング時間窓  $\tau_2$  がインパルス的に極めて短く二つの時定数が  $\tau_1 \gg \tau_2$  の関係にあり、広帯域サンプリングオシロスコープに用いられる (図3). この方式では、広帯域化を実現するため及び信号源へのホールド容量  $C$  の影響を低減させるためにスイッチング時間窓  $\tau_2$  は短く設計される.

インパルスサンプリング回路は、スイッチング時間窓  $\tau_2$  は RC 時定数  $\tau_1$  に比べて短く、入力信号に対して充分充電を行うことができない (不完全充電). このため、単位ステップ入力に対して出力信号成分は  $S \propto 1/C$ , 出力熱雑音成分は  $N_{rms} = \sqrt{k_B T/C}$  で与えられるので、SNR は、

$$SNR_2 \propto \frac{1/C}{\sqrt{k_B T/C}} \propto \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

と導ける. また、伝達関数は次のようになる.

$$H_2(j\omega) = \frac{\tau_2}{\tau_1} \text{sinc}\left(\frac{\tau_2\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\tau_2\omega}{2}}. \quad (2)$$

帯域幅  $\omega_{BW2}$  は、

$$\text{sinc}\left(\frac{\tau_2 \cdot \omega_{BW2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\omega_{BW2} \approx \frac{2.78}{\tau_2}.$$

と導け、スイッチング時間窓  $\tau_2$  のみに依存し  $\tau_2$  が短くなるほど、帯域は広がる.

つまり、SNR と帯域幅はトレードオフの関係にある. 更に、広帯域化のために極めて短いスイッチング時間窓を生成することは技術的に困難である.

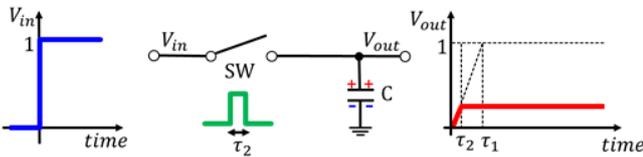


図3 インパルスサンプリング回路の入出力波形

Fig. 3. Input and output waveforms of impulse sampling circuit.

### (3-3) 広帯域信号サンプリング技術の問題設定

「ある帯域  $\omega_{BW}$  をもつ S/H 回路を設計する時、SNR を最大にする  $\tau_{1opt}, \tau_{2opt}$  を求める。」

この問題は非線形最適化問題であり、解析的に解くことは難しい. そこで理論式を導出し、数値計算を行って解を求め、SPICE による回路シミュレーションでその結果を検証

した. 以下、T/H 回路とインパルスサンプリング回路の中間領域に最適解  $\tau_{1opt}, \tau_{2opt}$  があることを示す.

## 4. 統一 S/H 回路の理論

### (4-1) 2つの S/H 回路の理論の統一化

この章では、現在個別に扱われている T/H 回路とインパルスサンプリング回路の理論を統一した理論を導く.

$\tau_1, \tau_2$  をパラメータにもつ S/H 回路のステップ応答 (図4) 及びインパルス応答は次のように導ける.

$$s(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} & (0 \leq t < \tau_2) \\ 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} & (\tau_2 \leq t) \end{cases} \quad (3)$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1/\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} & (0 \leq t < \tau_2) \\ 0 & (\tau_2 \leq t) \end{cases}$$

これらは等価時間サンプリングの考えを基に導出した (図5). 伝達関数  $H_3(s)$  は  $h(t)$  をラプラス変換することによって得られる.

$$H_3(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s} \left\{ 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}(1 + \tau_1 s)} \right\}. \quad (4)$$

式(4)で、 $\tau_1 \ll \tau_2$  とすると T/H 回路の伝達関数 (式(1)) に、 $\tau_1 \gg \tau_2$  とするとインパルスサンプリング回路の伝達関数 (式(2)) に収束する. また、 $s = j\omega$  と置けばゲイン特性が得られる (図6). 図からも、2つの S/H 回路の伝達関数を1つの伝達関数に統一化できていることが確認できる.

統一理論を用いて S/H 回路の SNR を考える. 単位ステップ入力に対して出力信号成分は  $S = 1 - e^{-\tau_2/\tau_1}$ , 出力熱雑音成分は  $N_{rms} = \sqrt{k_B T/C}$  で与えられるので、SNR は、

$$SNR_3 = \frac{1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}}{\sqrt{k_B T/C}} = \sqrt{\frac{\tau_1}{k_B T R}} \left( 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right). \quad (5)$$

次に統一 S/H 回路の帯域幅を考える. 帯域幅は一般に次のように定義される.

$$|H_3(j\omega_{BW3})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H_3(j0)|. \quad (6)$$

この式を解析的に解くことは困難であるため、数値シミュレーション  $\omega_{BW3}$  を得た.

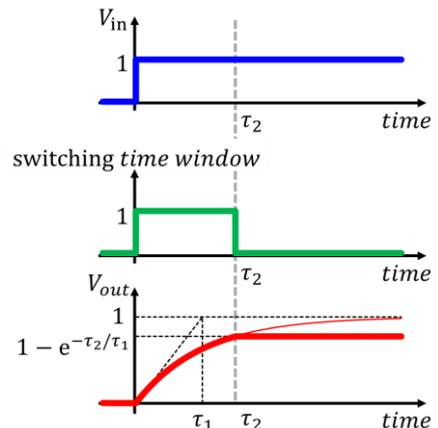


図4 S/H回路のステップ応答

Fig. 4. Step response of S/H circuit

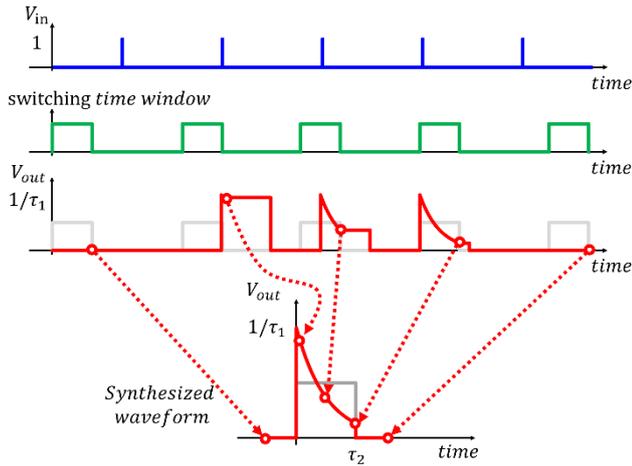


図5 S/H回路の等価時間サンプリングによるインパルス応答

Fig. 5. impulse response of S/H circuit obtained by equivalent-time sampling.

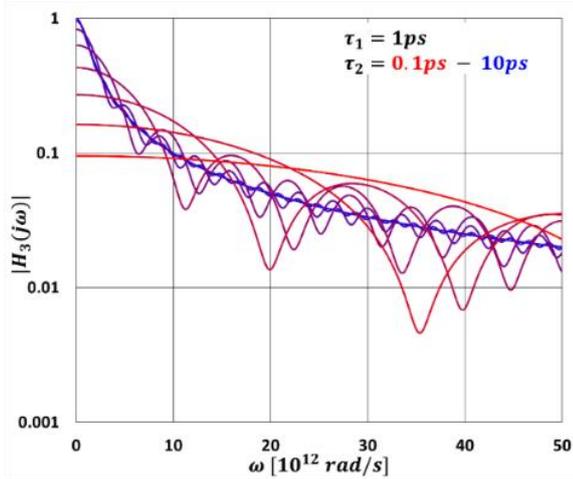


図6 S/H回路のゲイン特性

Fig. 6. Gain characteristics of S/H circuit.

#### (4-2) 統一理論を用いたS/H回路の特性解析

統一S/H回路のGB積の $\tau_2$ 依存性を考える(図7). 図より, インパルスサンプリング方式のGB積はT/H方式の2.8倍であることが分かる. このことは次の理論式からも確認できる.

$$\frac{GB \text{ Product}_2}{GB \text{ Product}_1} = \frac{DC \text{ Gain}_2 \cdot \omega_{BW2}}{DC \text{ Gain}_1 \cdot \omega_{BW1}} \approx \frac{(\tau_2/\tau_1) \cdot (2.78/\tau_2)}{(1) \cdot (1/\tau_1)} = 2.78. \quad (7)$$

T/H回路は, DCゲインは一定, 帯域幅は $\tau_1$ で定まり,  $\tau_2$ に依らない方式, またインパルスサンプリング回路は, DCゲインは $\tau_2$ に, 帯域幅は $1/\tau_2$ に比例する方式と捉え, 図7において各モードのGB積は一定になる. 従って, S/H回路は,  $\tau_2/\tau_1 < 10$ でインパルスサンプリングモードとして,  $\tau_2/\tau_1 > 5$ でT/Hモードとして動作すると解釈できる.

次に統一S/H回路のSNRの $\tau_1$ 依存性を考える(図8). 図8より, 統一S/H回路において $\tau_2/\tau_1 = 1.26$ の時, SNR

は最大になることが分かる. このことは次の理論式からも導ける.

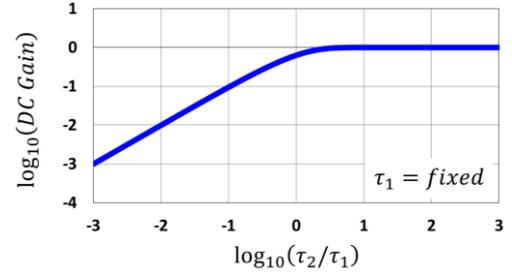
$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} SNR_3 = 0.$$

よって,

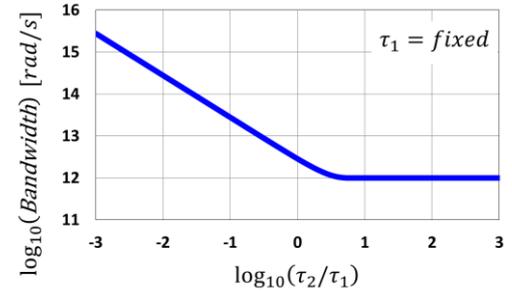
$$2 \frac{\tau_2}{\tau_1} + 1 = e^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}.$$

従って, 次式を得る.

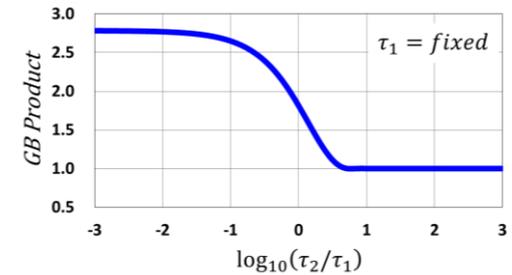
$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \approx 0, \quad 1.26. \quad (8)$$



(7-a) DC Gain



(7-b) Bandwidth



(7-c) GB Product

図7 GB積の $\tau_2$ 依存性( $\tau_1 = 10^{-12}$ )

Fig. 7. GB Product dependence on  $\tau_2$  ( $\tau_1 = 10^{-12}$ ).

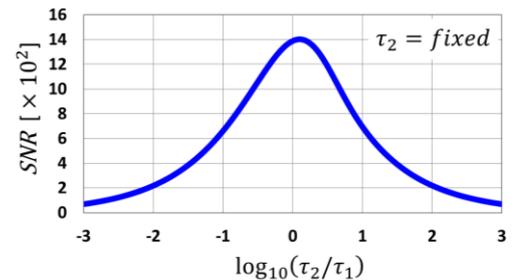


図8 SNRの $\tau_1$ 依存性( $\tau_2 = 10^{-12}$ )

Fig. 8. SNR dependence on  $\tau_1$  ( $\tau_2 = 10^{-12}$ ).

## 5. 帯域一定下での最大 SNR の条件

この章では、帯域一定の条件の下で SNR を最大にするための  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  を導出する。

式(6)が厳密な帯域の定義であるが、S/H 回路を一次系と仮定すると、ステップ応答の立上り時間  $t_{r10-90}$  から帯域を次のように求めることができる。以下、式(9)を用いる。

$$\omega_{BW3} \approx \frac{2.20}{t_{r10-90}}. \quad (9)$$

S/H 回路の出力が最終出力値の 10% になる時間  $t_{10\%}$  と 90% になる時間  $t_{90\%}$  はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{cases} t_{10\%} = -\tau_1 \ln \left\{ 1 - 0.1 \left( 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right) \right\} \\ t_{90\%} = -\tau_1 \ln \left\{ 1 - 0.9 \left( 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right) \right\} \end{cases}$$

従って、10% から 90% までの立上り時間  $t_{r10-90}$  は、

$$\begin{aligned} t_{r10-90} &= t_{90\%} - t_{10\%} \\ &= \tau_1 \ln \frac{1 - 0.1 \left( 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)}{1 - 0.9 \left( 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)}. \end{aligned} \quad (10)$$

となる。式(9)より、帯域が一定ならば 10% から 90% までの立上り時間  $t_{r10-90}$  も一定となる。よって、帯域一定の条件下では、 $\tau_2$  は  $\tau_1$  の関数として表せる (式(11))。

$$\tau_2 = -\tau_1 \ln \left\{ 1 - \frac{10 \left( 1 - e^{-\frac{t_{r10-90}}{\tau_1}} \right)}{1 - 9e^{-\frac{t_{r10-90}}{\tau_1}}} \right\}. \quad (11)$$

従って、SNR は、

$$SNR = 10 \sqrt{\frac{1}{k_B T R}} \sqrt{\tau_1} \frac{1 - e^{-\frac{t_{r10-90}}{\tau_1}}}{1 - 9e^{-\frac{t_{r10-90}}{\tau_1}}}. \quad (12)$$

与えられる。式(12)より、帯域一定の条件下では SNR は  $\tau_1$  の関数として与えられる。数値計算より SNR を最大にする  $\tau_{1opt}$  を求め、式(11)を用いて  $\tau_{2opt}$  を求める。

その結果、一定に設定する帯域に依らず、次の関係を満たす時、SNR は最大になることが明らかになった (図 9)。

$$\tau_{1opt} : \tau_{2opt} = 1.00 : 1.50. \quad (13)$$

SPICE シミュレーションを用いて式(13)の結果を検証した (図 10)。

## 6. 考察

図 11 に規格化した SNR と  $\tau_2/\tau_1$  の関係を示す。広帯域サンプリングオシロスコープで用いられるインパルスサンプリング ( $\tau_2/\tau_1 \ll 1$ ) の時は、SNR が劣化していることが分かる。また、T/H 回路 ( $\tau_2/\tau_1 \gg 1$ ) の時はトラック時に信号源からホールド容量が見えてしまうため反射が問題となる。そこで広帯域・高ダイナミックレンジの S/H 回路として  $\tau_2 \approx 1.50\tau_1$  のストローブサンプリングを提案する。

## 7. 結論

統一 S/H 回路の帯域幅と SNR の関係を示し、帯域一定の条件下において SNR が最大となる条件を明示した。

新しいサンプリング方式としてストローブサンプリング技術を提案した。ストローブサンプリング技術は T/H 回路とインパルスサンプリング回路の間に位置し、SNR はインパルスサンプリングより大幅に改善され、T/H 回路と同等以上である。

また、インパルスサンプリング回路の GB 積が T/H 回路の 2.8 倍であることを理論的に示した。

## 文 献

- (1) M. Arai, I. Shimizu, H. Kobayashi, K. Kurihara, et. al., "Finite Aperture Time Effects in Sampling Circuit," IEEE International Conference on ASIC, Chengdu, China (Nov. 2015).
- (2) M. Kahrs, "50 Years of RF and Microwave Sampling," IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol.51 (2003).
- (3) E. K. Miller (editor), Time-Domain Measurements in Electromagnetics, Van Nostrand Reinhold (1986).
- (4) H. Kobayashi, K. Kobayashi, et. al., "Sampling Jitter and Finite Aperture Time Effects in Wideband Data Acquisition Systems," IEICE Trans. Fundamentals, vol. E85-A, no. 2 (Feb. 2002).
- (5) M. Uemori, K. Kobayashi, et. al., "Wideband and Large Dynamic Range Sampling Method," IEICE Trans. vol.J90-C (Sept. 2007).
- (6) Keita Kurihara, Kensuke Kobayashi, et. al., "Fundamental Design Consideration of Sampling Circuit," IEEE International Symposium on VLSI-DAT, Hsinchu, Taiwan (April 2016).

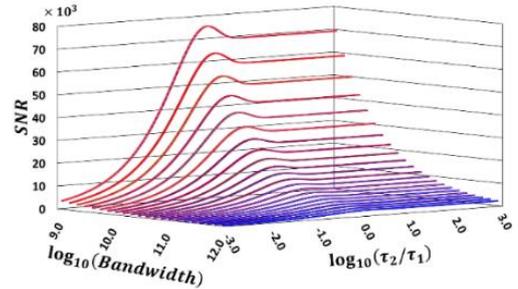


図 9 SNR と  $\tau_2/\tau_1$  と帯域幅の関係

Fig. 9. SNR vs.  $\tau_2/\tau_1$  vs. bandwidth in S/H circuit.

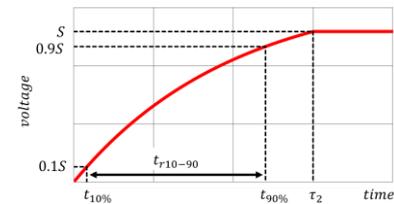


図 10 SPICE シミュレーションから得られたステップ応答合成波形

Fig. 10. Reconstructed step response obtained by SPICE simulation.

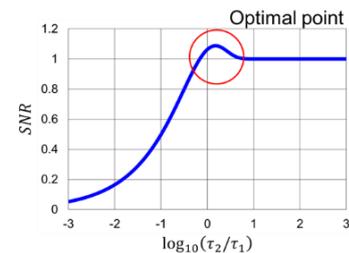


図 11 規格化した SNR と  $\tau_2/\tau_1$  の関係

Fig. 11: normalized SNR vs.  $\tau_2/\tau_1$  in S/H Circuit.