

RC ポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの 関係性の考察

関山 燎* 田村 善郎 浅見 幸司 小林 春夫 (群馬大学)

キーワード : RC ポリフェーズフィルタ、ヒルベルトフィルタ、複素信号、イメージ除去、I-Q 信号生成

Keyword : RC polyphaser filter , Hilbert filter, Complex signal, Image rejection, I-Q signal generation.

1. はじめに

RC ポリフェーズフィルタは、抵抗 R と容量 C から構成され、入出力が I, Q 信号の複素信号の受動アナログフィルタである。イメージ除去や I, Q 信号生成(位相が 90° 異なった \cos, \sin 波発生)を行うことができ、無線通信システムのアナログフロントエンド部に使用されている。⁽¹⁾

この論文では RC ポリフェーズフィルタをヒルベルトフィルタの観点から考察したので報告する。すなわち、RC ポリフェーズフィルタは入出力が複素信号の場合の理想ヒルベルトフィルタ特性の近似であることを示す。

2. RC ポリフェーズフィルタの役割

図 1 に差動信号入出力の 1 次 RC ポリフェーズフィルタを示す。RC ポリフェーズフィルタの一つ目の役割として、「単一入力信号からの、 I, Q 信号発生」が挙げられる。図 2 に示すように、入力に実数部である I_{in} だけを入力する。虚数部である Q_{in} にはゼロを入力する。このような信号をポリフェーズフィルタに入力すると、出力には、位相が 90° 異なった、 \cos, \sin 波が発生される。一つの入力に対し、位相の 90° 異なる二つの出力が得られることが特徴である。出力された二つの波は、ミキサに \cos, \sin 波を入力するときなどに使用される。

二つ目の役割として図 3 に示すような「イメージ信号(負の周波数成分)除去」である。複素入力には負の周波数成分が含まれ、RC ポリフェーズフィルタを用いることで負の周波数成分を取り除くことができる。

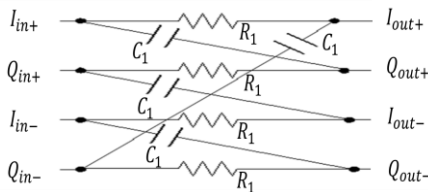


図 1 1 次 RC ポリフェーズフィルタ
Fig.1. The first-order RC polyphase filter.

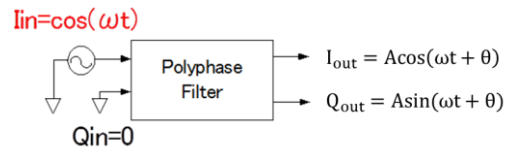


図 2 RC ポリフェーズフィルタによる余弦波、正弦波生成
Fig.2. Cosine and sine signal generation using an RC polyphaser filter.

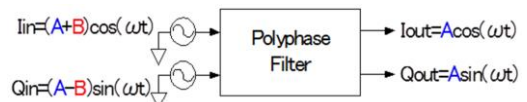


図 3 イメージ成分の除去
Fig.3. Removal of image components.

3. ヒルベルトフィルタ

ヒルベルトフィルタは、1 入力、2 出力のフィルタであり、位相が $\pi/2$ 遅れた信号を生成するフィルタである。式(1)に示す周波数特性を持つ。

$$H(\omega) = \begin{cases} -j & (\omega > 0) \\ j & (\omega < 0) \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\pi/2} & (\omega > 0) \\ e^{j\pi/2} & (\omega < 0) \end{cases} \quad (1)$$

デジタルフィルタで実装されることが多いが、この論文ではアナログフィルタの RC ポリフェーズフィルタでもその近似が実現できることを示す。Single Side Band(SSB)通信で 90° 移相を行う場合やデジタル通信の周波数シフト、ジッター計測などにも幅広く用いられる。⁽²⁾⁽³⁾

4. RC ポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関連性

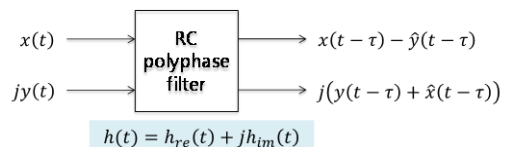


図 4 RC ポリフェーズフィルタの入出力
Fig.4. Input and output of the RC polyphase filter.

RC ポリフェーズフィルタのインパルス応答 $h(t)$ を実部 $h_{re}(t)$ 、虚部 $h_{im}(t)$ に分けて考察を行う。 $h_{re}(t)$ と $h_{im}(t)$ のフーリエ変換を各々 $H_{re}(\omega)$ 、 $H_{im}(\omega)$ とし、2つの入力のフーリエ変換を $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ とすると、フィルタ出力は、式(2)のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & (X(\omega) + jY(\omega)) \cdot (H_{re}(\omega) + H_{im}(\omega)) \\ &= (X(\omega)H_{re}(\omega) - Y(\omega)H_{im}(\omega)) \\ & \quad + j(Y(\omega)H_{re}(\omega) + X(\omega)H_{im}(\omega)) \end{aligned} \quad (2)$$

下線部がヒルベルト変換であり、 H_{re} を基準として H_{im} の位相特性が $\pi/2$ であればよいといえる。そこで、 $H(\omega)$ の伝達関数から $H_{re}(\omega)$ と $H_{im}(\omega)$ の伝達関数を抽出する。

RC ポリフェーズフィルタの伝達関数の定義式は式(3)であり、図1より1次RCポリフェーズフィルタの伝達関数は、式(4)ようになる。

$$H(j\omega) = \frac{I_{out}(j\omega) + jQ_{out}(j\omega)}{I_{in}(j\omega) + jQ_{in}(j\omega)} \quad (3)$$

$$H_1(j\omega) = \frac{1 + \omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1} \quad (4)$$

$$|H_1(j\omega)| = \frac{1 + \omega R_1 C_1}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C_1)^2}} \quad \tan(\angle H_1(j\omega)) = -\omega R_1 C_1 \quad (5)$$

H_{1re} と H_{1im} の導出

1. 式(4)で $s=j\omega$ (等価的に $\omega=-js$) とおき $H(s)$ を求める

$$H_1(s) = \frac{1 - jsR_1C_1}{1 + sR_1C_1} \quad (6)$$

2. $H(s) = H_{re}(s) + jH_{im}(s)$ から、より $H_{1re}(s)$ 、 $H_{1im}(s)$ を得る

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + sR_1C_1} - j \frac{sR_1C_1}{1 + sR_1C_1} \quad (7)$$

$$H_{1re}(s) = \frac{1}{1 + sR_1C_1} \quad H_{1im}(s) = -\frac{sR_1C_1}{1 + sR_1C_1} \quad (8)$$

3. $s=j\omega$ と置いて、 $H_{1re}(j\omega)$ 、 $H_{1im}(j\omega)$ を得る

$$H_{1re}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} \quad H_{1im}(j\omega) = -j \frac{\omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1} \quad (9)$$

式(4),(9)より、 $H_1(j\omega)$ 、 $H_{1re}(j\omega)$ 、 $H_{1im}(j\omega)$ の振幅特性を図5、位相特性を図6に示す。

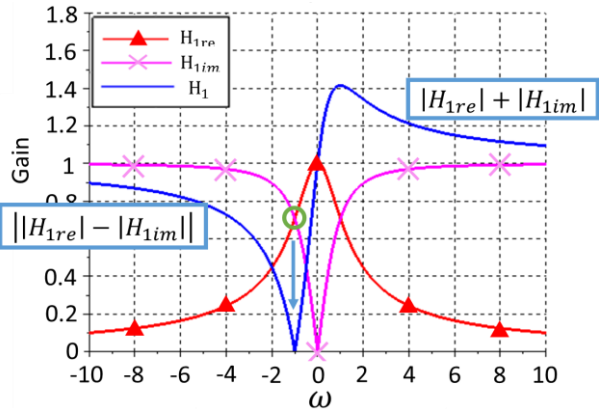


図5 1次RCポリフェーズフィルタの振幅特性

Fig.5. Gain characteristics of the first-order RC polyphase filter.

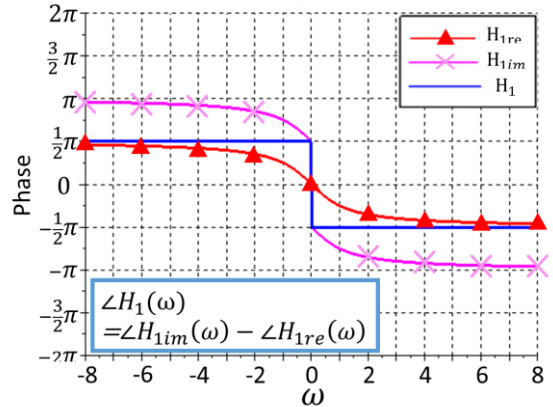


図6 1次RCポリフェーズフィルタの位相特性

Fig.6. Phase characteristics of the first-order RC polyphase filter.

H_{re} と H_{im} の相特性において、 90° ずれておりヒルベルトフィルタと同じ特徴である。幅特性は H_{re} と H_{im} が等しい場合以外は完璧なヒルベルトフィルタになっていない。そこで、よりヒルベルトフィルタに近い特性を持つRCポリフェーズフィルタは、ゼロ点が多い、つまり次数が高いフィルタではないかと考えた。

次節で高次のRCポリフェーズフィルタの検討を行う。

5. 高次RCポリフェーズフィルタ

<5-1>2次RCポリフェーズフィルタ

2次RCポリフェーズフィルタの伝達関数は、図7より求めることができ、式(10)ようになる。

$$H_2(j\omega) = \frac{(1 + \omega R_1 C_1)(1 + \omega R_2 C_2)}{1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2 + 2R_1 C_2)} \quad (10)$$

伝達関数より、振幅、位相特性が式(11)になる。

$$\begin{aligned} |H_2(j\omega)| &= \frac{|1 + \omega R_1 C_1| |1 + \omega R_2 C_2|}{\sqrt{(1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2)^2 + \omega^2 (R_1 C_1 + R_2 C_2 + 2R_1 C_2)^2}} \\ \tan(\angle H_2(j\omega)) &= \frac{\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2 + 2R_1 C_2)}{\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1} \end{aligned} \quad (11)$$

H_{2re} 、 H_{2im} は1次RCポリフェーズフィルタと同様に求めることができ式(12)ようになる。

$$\begin{aligned} H_{2re}(j\omega) &= \frac{1 + \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2}{1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2 + 2R_1 C_2)} \\ H_{2im}(j\omega) &= -\frac{j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2 + 2R_1 C_2)} \end{aligned} \quad (12)$$

式(10),(12)より、 $H_2(j\omega)$ 、 $H_{2re}(j\omega)$ 、 $H_{2im}(j\omega)$ の振幅特性を図8、位相特性を図9に示す。

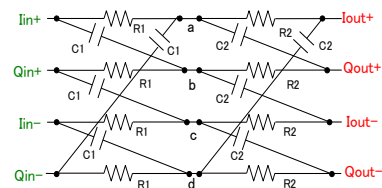


図7 2次RCポリフェーズフィルタ

Fig.7. The second-order RC polyphase filter.

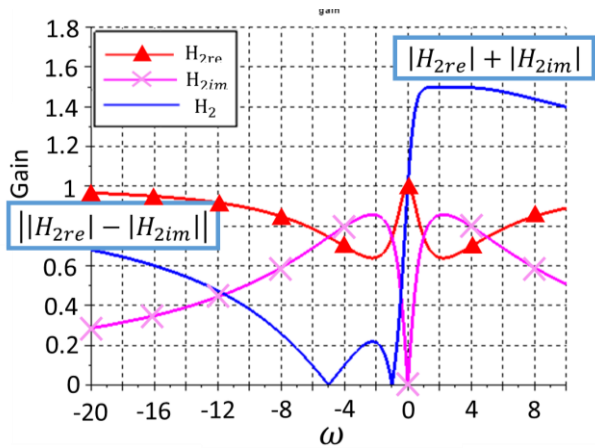


図8 2次RCポリフェーズフィルタの振幅特性
Fig.8. Gain characteristics of the second-order RC polyphase filter.

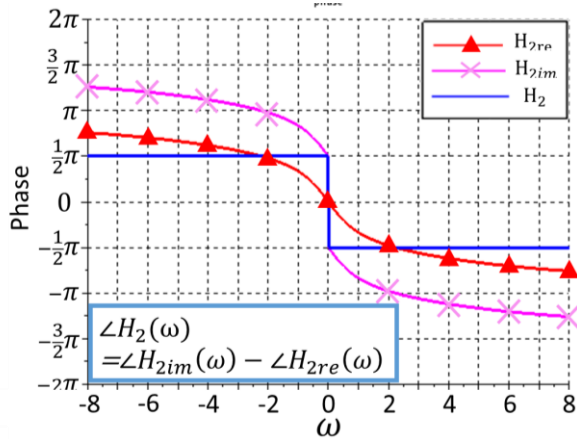


図9 2次RCポリフェーズフィルタの位相特性
Fig.9. Phase characteristics of the second-order RC polyphase filter.

<5-2>3次RCポリフェーズフィルタ

3次RCポリフェーズフィルタの伝達関数は、図10より求めることができ、式(13)のようになる。

$$H_3(j\omega) = \frac{N_3(\omega)}{D_{3R}(\omega) + jD_{3I}(\omega)} \quad (13)$$

$$N_3(\omega) = (1 + \omega R_1 C_1)(1 + \omega R_2 C_2)(1 + \omega R_3 C_3)$$

$$D_{3R}(\omega) =$$

$$1 - \omega^2 [R_1 C_1 R_2 C_2 + R_2 C_2 R_3 C_3 + R_1 C_1 R_3 C_3 + 2R_1 C_3 (R_2 C_2 + R_2 C_1 + R_3 C_2)]$$

$$D_{3I}(\omega) =$$

$$\omega [R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_3 C_3 + 2(R_1 C_2 + R_2 C_3 + R_1 C_3)] - \omega^3 R_1 C_1 R_2 C_2 R_3 C_3$$

伝達関数より、振幅、位相特性が式(14)になる。

$$|H_3(j\omega)| = \frac{|N_3(\omega)|}{\sqrt{D_{3R}(\omega)^2 + D_{3I}(\omega)^2}} \quad \tan(\angle H_3(j\omega)) = -\frac{D_{3I}(\omega)}{D_{3R}(\omega)} \quad (14)$$

H_{3re}, H_{3im} は1次RCポリフェーズフィルタと同様に求めることができ、式(15)のようになる。

$$H_{3re}(j\omega) = \frac{1 + \omega^2 (R_1 C_1 R_2 C_2 + R_2 C_2 R_3 C_3 + R_3 C_3 R_1 C_1)}{D_{3R}(\omega) + jD_{3I}(\omega)} \quad (15)$$

$$H_{3im}(j\omega) = -j \frac{\omega (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_3 C_3) + \omega^3 R_1 C_1 R_2 C_2 R_3 C_3}{D_{3R}(\omega) + jD_{3I}(\omega)}$$

式(13),(15)より、 $H_3(j\omega), H_{3re}(j\omega), H_{3im}(j\omega)$ の振幅特性を図11、位相特性を図12に示す。

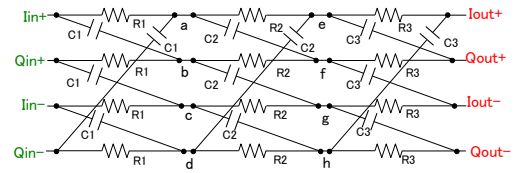


図10 3次RCポリフェーズフィルタ
Fig.10. The third-order RC polyphase filter.

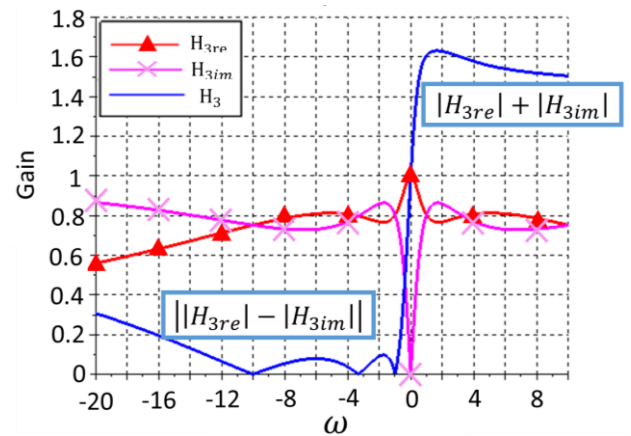


図11 3次RCポリフェーズフィルタの振幅特性
Fig.11. Gain characteristics of the third-order RC polyphase filter.

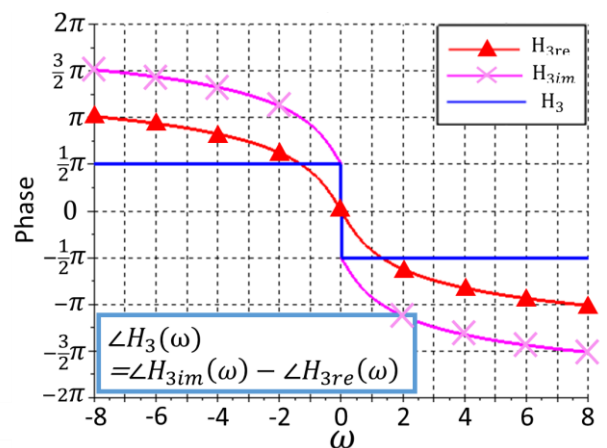


図12 3次RCポリフェーズフィルタの位相特性
Fig.12. Phase characteristics of the third-order RC polyphase filter.

<5-3>4次RCポリフェーズフィルタ

4次RCポリフェーズフィルタの伝達関数は、図13より求めることができ、式(16)のようになる。

$$H_4(j\omega) = \frac{N_4(\omega)}{D_{4R}(\omega) + jD_{4I}(\omega)} \quad (16)$$

$$N_4(\omega) = (1 + \omega R_1 C_1)(1 + \omega R_2 C_2)(1 + \omega R_3 C_3)(1 + \omega R_4 C_4)$$

$$D_{4R}(\omega) = 1 - \omega^2 [R_1 R_2 (C_1 C_2 + 2C_1 C_3 + 2C_1 C_4 + 2C_2 C_3 + 2C_2 C_4) + R_2 R_3 (C_2 C_3 + 2C_2 C_4 + 2C_3 C_4) + R_3 R_4 C_3 C_4 + R_1 R_3 (C_1 C_3 + 2C_1 C_4 + 2C_2 C_3 + 4C_2 C_4 + 2C_3 C_4) + R_1 R_4 (C_1 C_4 + 2C_2 C_4 + 2C_3 C_4) + R_2 R_4 (C_2 + 2C_3) C_4] + \omega^4 R_1 R_2 R_3 R_4 C_1 C_2 C_3 C_4$$

$$D_{4I}(\omega) = \omega [R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_3 C_3 + R_4 C_4 + 2R_1 C_2 + 2R_1 C_3 + 2R_1 C_4 + 2R_2 C_3 + 2R_2 C_4 + 2R_3 C_4] - \omega^3 [R_1 R_2 R_3 (C_1 C_2 C_3 + 2C_1 C_2 C_4 + 2C_1 C_3 C_4 + 2C_2 C_3 C_4) + R_2 R_3 R_4 C_2 C_3 C_4 + R_1 R_2 R_4 (C_1 C_2 C_4 + 2C_1 C_3 C_4 + 2C_2 C_3 C_4) + R_1 R_3 R_4 (C_1 C_3 C_4 + 2C_2 C_3 C_4)]$$

伝達関数より、振幅、位相特性が式(17)になる。

$$|H_4(j\omega)| = \frac{|N_4(\omega)|}{\sqrt{D_{4R}(\omega)^2 + D_{4I}(\omega)^2}} \quad \tan(\angle H_4(j\omega)) = -\frac{D_{4I}(\omega)}{D_{4R}(\omega)} \quad (17)$$

H_{4re}, H_{4im} は1次RCポリフェーズフィルタと同様に求めることができ式(18)のようになる。

$$H_{4re}(j\omega) = \frac{1}{D_{4R}(\omega) + jD_{4I}(\omega)} \{ 1 + \omega^2 (R_1 C_1 R_2 C_2 + R_2 C_2 R_3 C_3 + R_3 C_3 R_4 C_4 + R_4 C_4 R_1 C_1 + R_1 C_1 R_3 C_3 + R_2 C_2 R_4 C_4) + \omega^4 R_1 C_1 R_2 C_2 R_3 C_3 R_4 C_4 \}$$

$$H_{4im}(j\omega) = -\frac{1}{D_{4R}(\omega) + jD_{4I}(\omega)} \{ j\omega (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_3 C_3 + R_4 C_4) - j\omega^3 (R_1 C_1 R_2 C_2 R_3 C_3 + R_2 C_2 R_3 C_3 R_4 C_4 + R_3 C_3 R_4 C_4 R_1 C_1 + R_4 C_4 R_1 C_1 R_2 C_2) \}$$

式(16),(18)より、 $H(j\omega)$, $H_{4re}(j\omega)$, $H_{4im}(j\omega)$ の振幅特性を図14、位相特性を図15に示す。

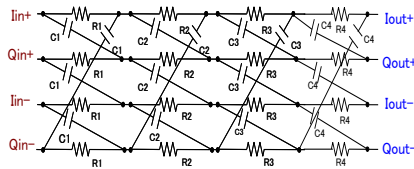


図13 4次RCポリフェーズフィルタ
Fig.13. The fourth-order RC polyphase filter.

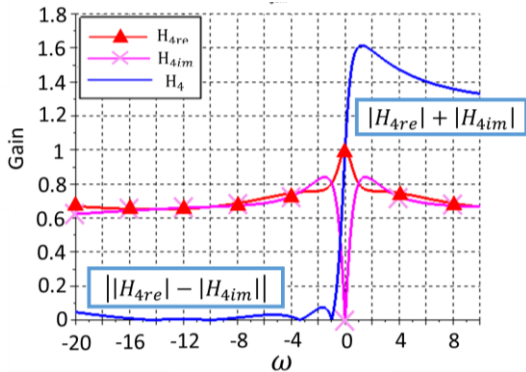


図14 4次RCポリフェーズフィルタの振幅特性
Fig.14. Gain characteristics of the fourth-order RC polyphase filter.

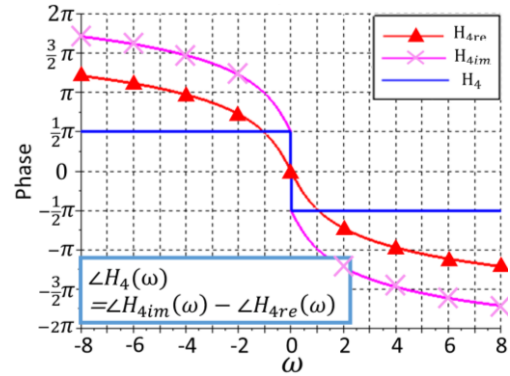


図15 4次RCポリフェーズフィルタの位相特性
Fig.15. Phase characteristics of the fourth-order RC polyphase filter.

6. まとめ

本論文では、RCポリフェーズフィルタは入出力が複素信号の場合の理想ヒルベルトフィルタ特性の近似であることを考察し、1~4次までのRCポリフェーズフィルタの数式、シミュレーションでの検証を行った。

振幅特性において、ゼロ点の場所では Real part と Imaginary part の特性が一致し、高次であるほどゼロ点の数が増加し、広範囲で Real part と Imaginary part の振幅特性が近くなることを確認した。

位相特性において1~4次のRCポリフェーズフィルタ回路の伝達関数から入力出力間に完全な90度位相差であり、広域でヒルベルト変換が可能であることを確認した。

二つの特性より、RCポリフェーズフィルタは高次になるほどヒルベルトフィルタの理想特性に近づくことを確認した。

「RCポリフェーズフィルタがヒルベルト変換の近似」であることを示したことから、将来的にこのフィルタを用いて複素信号処理をアナログ信号のままでもできる、という可能性がある。高速、広帯域な通信や第5世代で検討されているミリ波通信で、(デジタル処理が追いつかないような高周波・高速信号処理で)特に役に立つことが期待できる。

参考文献

- (1) 山口 宣 他: 「RCポリフェーズ・フィルタの解析-高次フィルタ伝達関数、ナイキスト線図の導出、寄生容量の影響の解析-」電子情報通信学会技術研究報告. 回路とシステム 102(572), 29-34, 2003-01-15
- (2) 高橋康宏 他: 「CSD表現FIRフィルタを用いたヒルベルト変換器の設計」電気学会研究会資料. ECT, 電子回路研究会 2001(42), 7-12, 2001-06-29
- (3) T. Yamaguchi, M. Soma, M. Ishida, T. Watanabe, T. Ohmi, "Extraction of Instantaneous and RMS Sinusoidal Jitter Using an Analytic Signal Method," IEEE Trans. Circuits and Systems-II, vol. 50, no. 6, pp. 288-298, June 2003.