RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性の考察

群馬大学電気電子工学科 小林研究室

関山燎　田村善郎　浅見幸司　小林春夫

目次

- 研究の動機
- RCポリフェーズフィルタ
- ヒルベルトフィルタ
- RCポリフェーズフィルタ特性解析手法
- RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性
  - 1次
  - 2次
  - 3次、4次
  - 一般のn次
- まとめ

目次

- 研究の動機
- RCポリフェーズフィルタ
- ヒルベルトフィルタ
- RCポリフェーズフィルタ特性解析手法
- RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性
  - 1次
  - 2次
  - 3次、4次
  - 一般のn次
- まとめ

研究の動機

RCポリフェーズフィルタ

- 無線通信回路で使用
- 特性に未知の部分あり
- ヒルベルトフィルタの特性に類似性ありと考察

▼

RCポリフェーズフィルタの特性を解析

▼

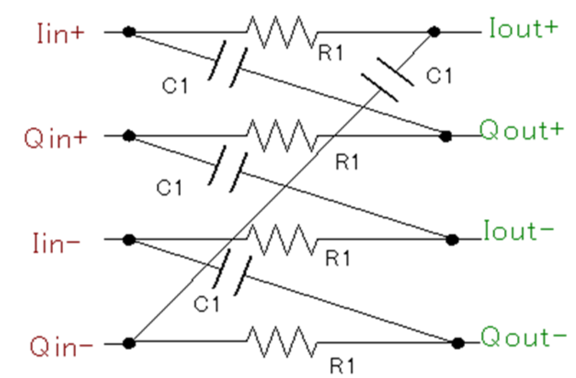
ヒルベルトフィルタとの関連性を示す

目次

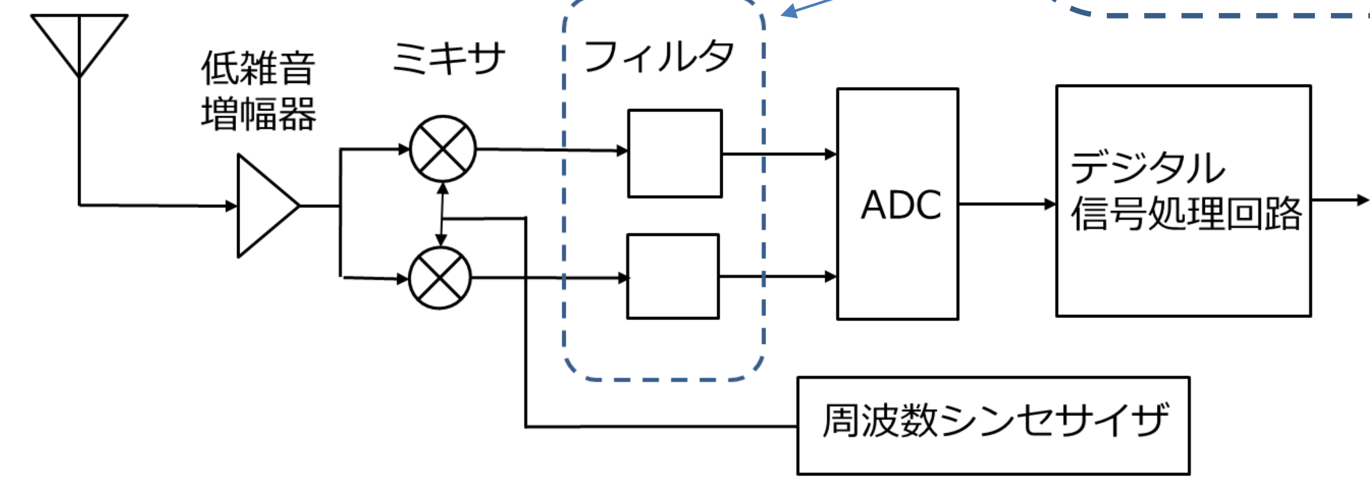
- 研究の動機
- RCポリフェーズフィルタ
- ヒルベルトフィルタ
- RCポリフェーズフィルタ特性解析手法
- RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性
  - 1次
  - 2次
  - 3次、4次
  - 一般のn次
- まとめ

RCポリフェーズフィルタとは

- RCポリフェーズフィルタ
  - 受動素子R, Cで構成
  - アナログバンドパスフィルタ
  - 多入力多出力で複素信号処理



1次RCポリフェーズフィルタ

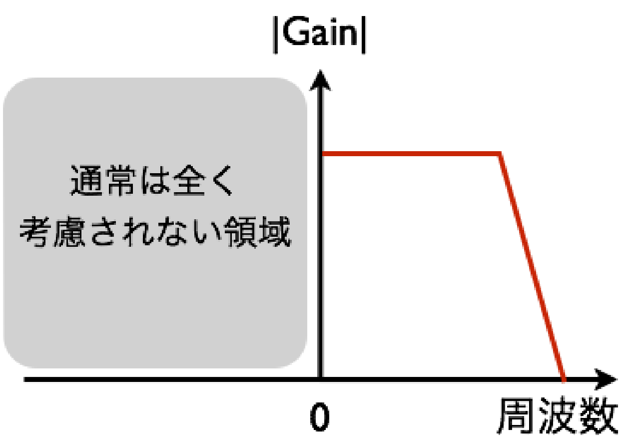


無線通信システム：受信回路

なぜRCポリフェーズフィルタを用いるか

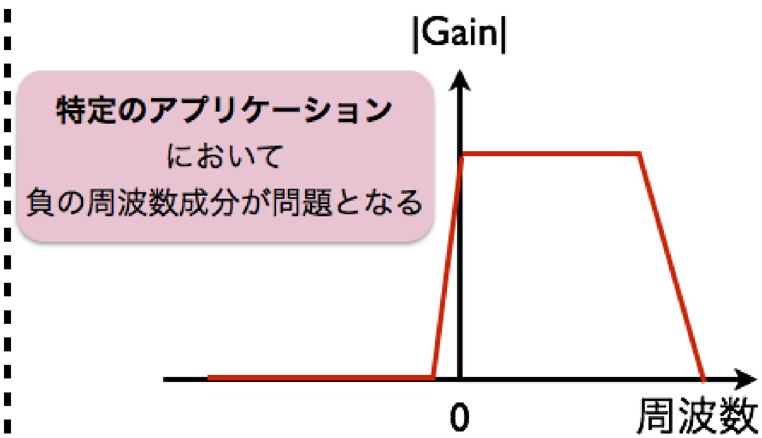
■ 重要な役割
・直交波形生成
・イメージ信号の除去

→通常のフィルタでは扱わない負の周波数の問題を考慮



通常の実フィルタ回路

正の周波数を取り扱う



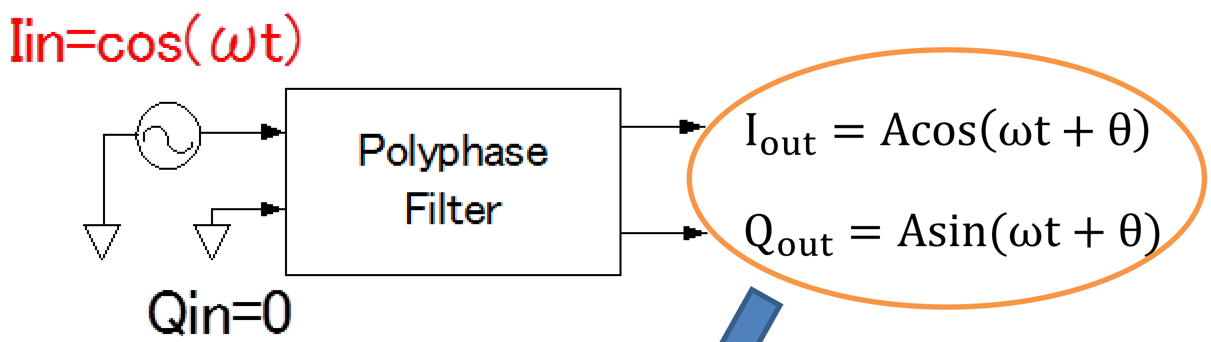
複素フィルタ回路

正の周波数と負の周波数を取り扱う

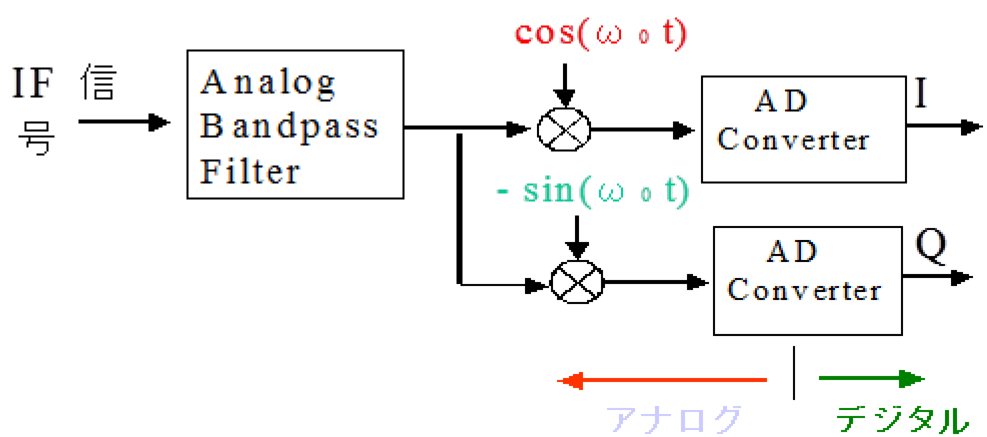
RCポリフェーズフィルタの役割1

■ 単一信号からのI, Q 信号（直交信号）発生

入力に実数部であるI_{in}のみ入力
→出力には、位相が90°異なったcos波, sin波を生成

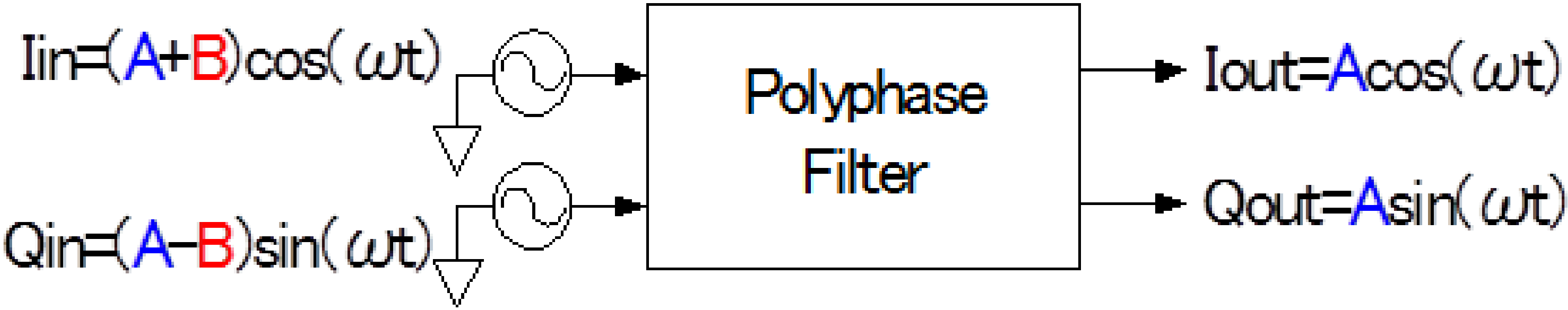


出力信号は、ミキサー等に使用



RCポリフェーズフィルタの役割2

■ イメージ信号（負の周波数成分）除去



$$\underline{A}e^{j\omega t} + \underline{B}e^{-j\omega t} \Rightarrow \underline{A}e^{j\omega t}$$

信号成分　イメージ成分　　信号成分

目次

- 研究の動機
- RCポリフェーズフィルタ
- ヒルベルトフィルタ
- RCポリフェーズフィルタ特性解析手法
- RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性
  - 1次
  - 2次
  - 3次、4次
  - 一般のn次
- まとめ

ヒルベルトフィルタ

■ 特徴

・もとの信号($\omega \geq 0$)から位相がπ/2遅れた信号を生成
→ ヒルベルト変換

・1入力2出力

・デジタルフィルタで実装されることが多い

■ 用途

・Single Side Band通信の90度移相

・デジタル通信の周波数シフト

・ジッタ測定アルゴリズムの複素信号導出

ヒルベルト変換

実数信号$x(t)$から複素信号を求めたい

$$x(t) \rightarrow x(t) + jy\,(t)$$

ヒルベルト変換

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

インパルス応答をフーリエ変換

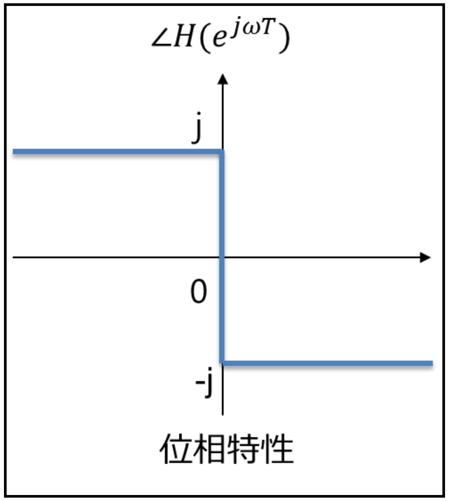
$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad \overset{Fourier}{\Longleftrightarrow} \quad H(\omega) = \begin{cases} -j & (\omega \geq 0) \\ j & (\omega < 0) \end{cases}$$

周波数特性$H(\omega)$

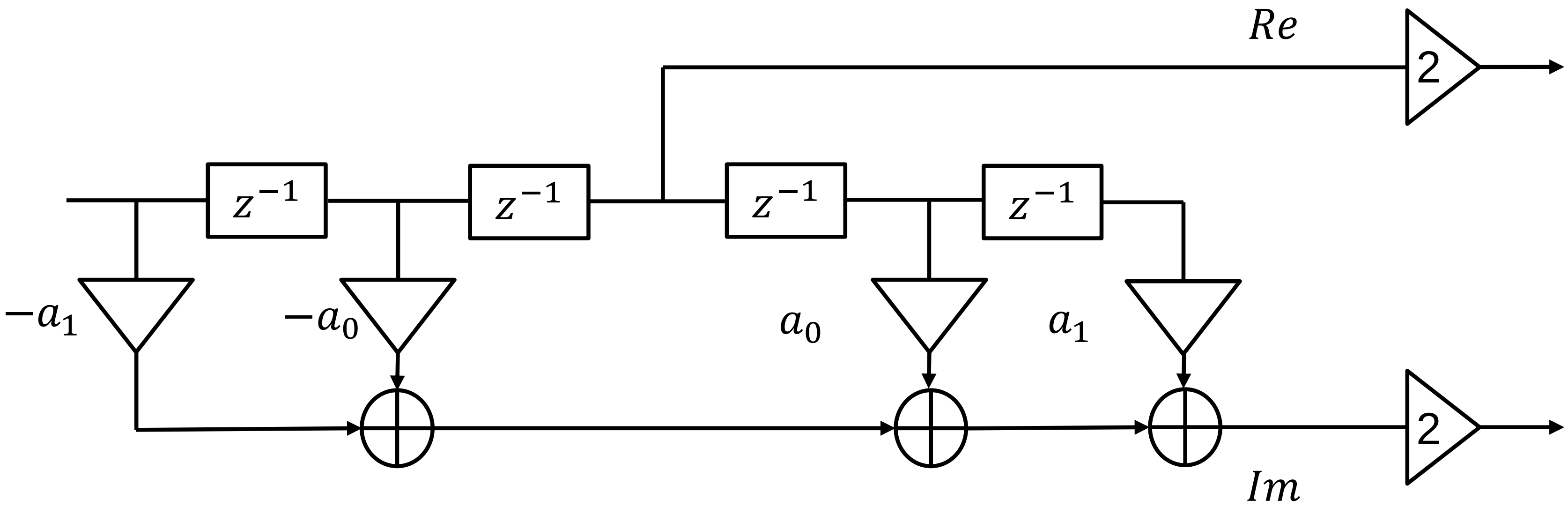
$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \begin{cases} -jX(\omega) & (\omega \geq 0) \\ jX(\omega) & (\omega < 0) \end{cases}$$

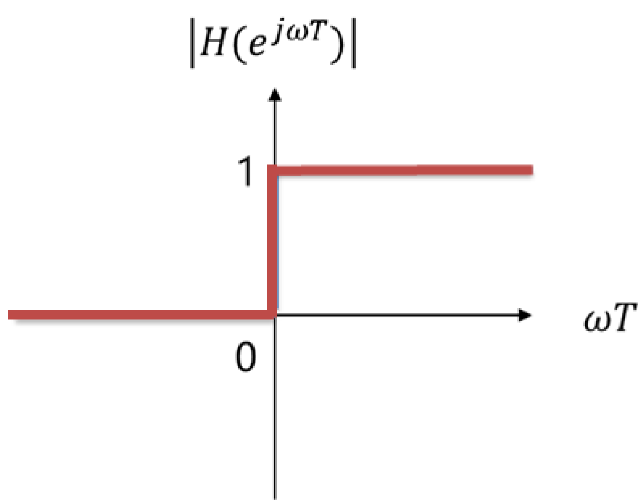
David Hilbert（独）
1862-1843

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}, -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

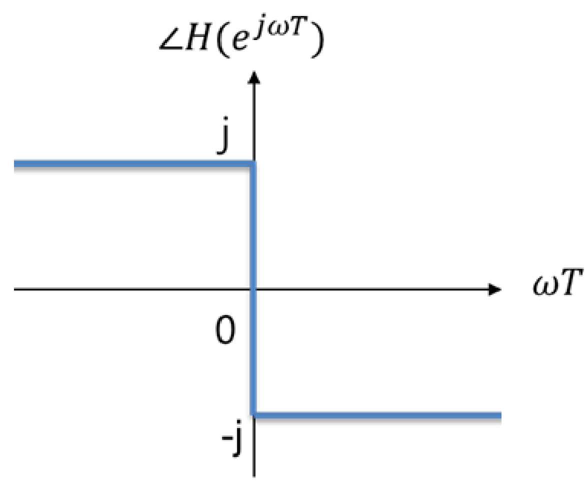


ヒルベルトフィルタ　デジタル構成例





振幅特性

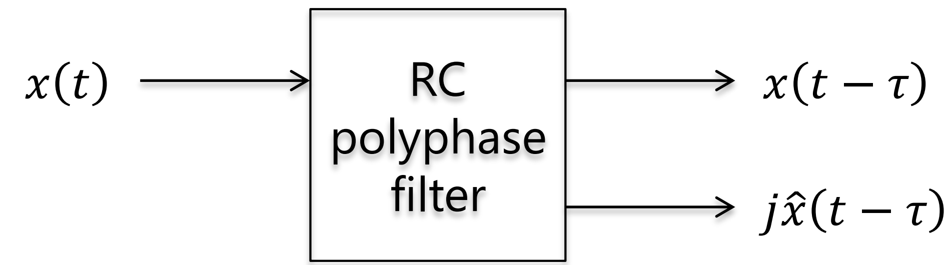


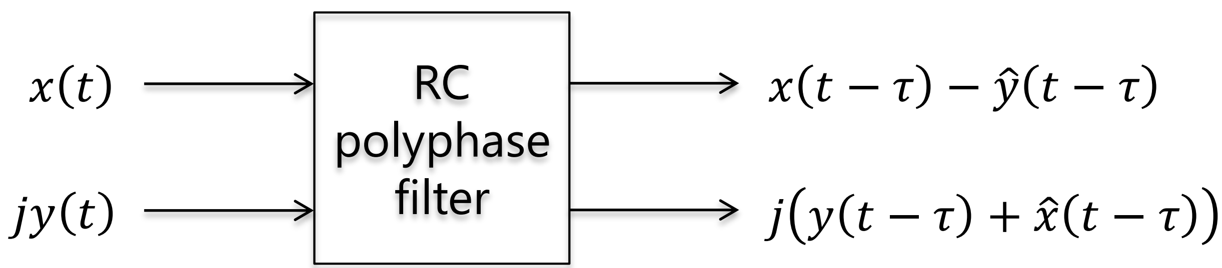
位相特性

目次

- 研究の動機
- RCポリフェーズフィルタ
- ヒルベルトフィルタ
- RCポリフェーズフィルタ特性解析手法
- RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性
  - 1次
  - 2次
  - 3次、4次
  - 一般のn次
- まとめ

RCポリフェーズフィルタ：解析手法





$$h(t) = h_{re}(t) + jh_{im}(t)$$

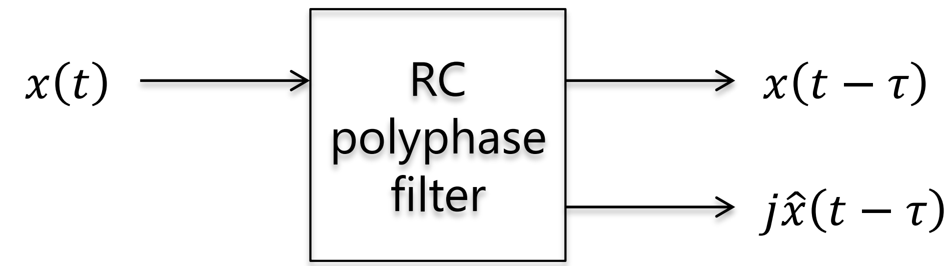
インパルス応答

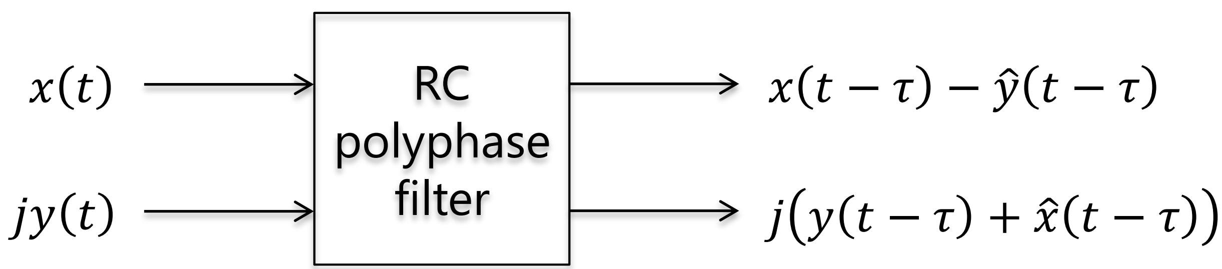
フィルタ出力

$$\big(x(t)+jy(t)\big) \otimes \left(h_{re}(t)+jh_{im}(t)\right)$$
$$= \big(x(t) \otimes h_{re}(t) - y(t) \otimes h_{im}(t)\big) + j\big(y(t) \otimes h_{re}(t) + x(t) \otimes h_{im}(t)\big)$$

$\otimes$は畳込み演算

RCポリフェーズフィルタ: 周波数解析





$$H(j\omega) = H_{re}(j\omega) + jH_{im}(j\omega)$$

フィルタ出力

$$\big(X(j\omega) + jY(j\omega)\big)\cdot\left(H_{re}(j\omega) + jH_{im}(j\omega)\right)$$
$$= \big(X(j\omega)H_{re}(j\omega) - Y(j\omega)H_{im}(j\omega)\big) + j\left(Y(j\omega)H_{re}(j\omega) + X(j\omega)H_{im}(j\omega)\right)$$

$X(\omega), Y(\omega), H_{re}(\omega), H_{im}(\omega)$は、複素関数

伝達関数：実部と虚部の導出

フィルタ出力

$X(\omega), Y(\omega), H_{re}(\omega), H_{im}(\omega)$は、複素関数

$$(X(j\omega)+jY(j\omega))\cdot(H_{re}(j\omega)+H_{im}(j\omega))$$
$$=(X(j\omega)H_{re}(j\omega)-Y(j\omega)H_{im}(j\omega))+j(Y(j\omega)H_{re}(j\omega)+X(j\omega)H_{im}(j\omega))$$

$H(j\omega)$の特性(伝達関数)から$H_{re}(j\omega)$と$H_{im}(j\omega)$の特性を抽出

$$H_{re}(j\omega)=\frac{1}{2}(H(j\omega)+H^*(-j\omega))$$
$$jH_{im}(j\omega)=\frac{1}{2}(H(j\omega)-H^*(-j\omega))$$
$$\left(H_{im}(j\omega)=-j\frac{1}{2}(H(j\omega)-H^*(-j\omega))\right)$$

⇩

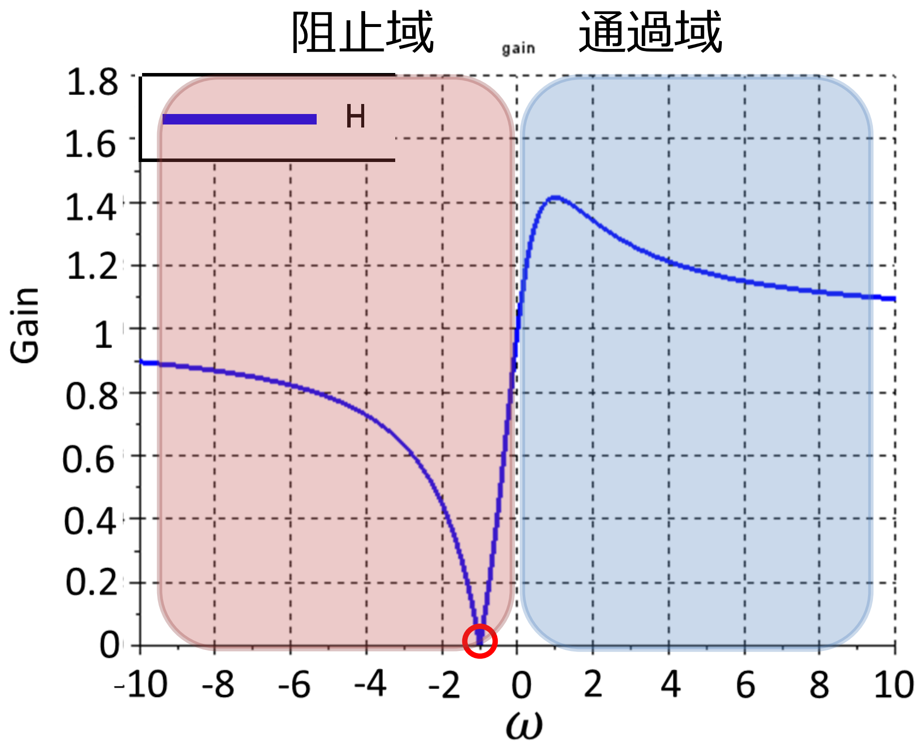
$H_{re}(j\omega)$と$H_{im}(j\omega)$のふるまいを調べる

目次

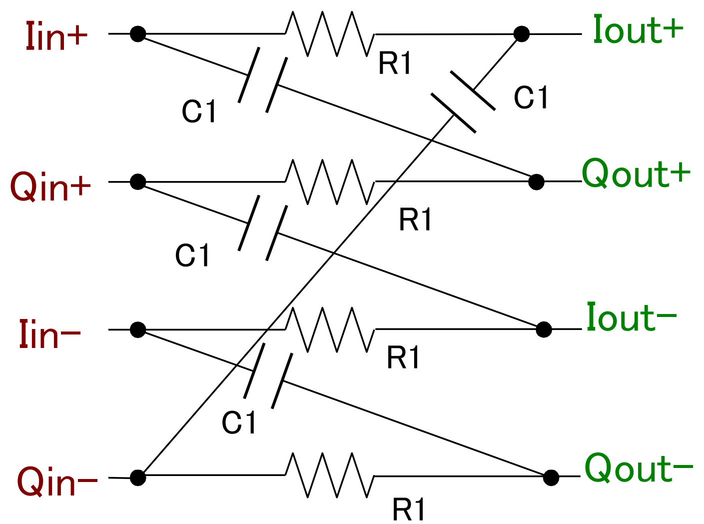
- 研究の動機
- RCポリフェーズフィルタ
- ヒルベルトフィルタ
- RCポリフェーズフィルタ特性解析手法
- RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性
  - 1次
  - 2次
  - 3次、4次
  - 一般のn次
- まとめ

1次RCポリフェーズフィルタ：伝達関数

$$H_1(j\omega)=\frac{1+\omega R_1C_1}{1+j\omega R_1C_1}$$



ゼロ点：$\omega=-\frac{1}{R_1C_1}$



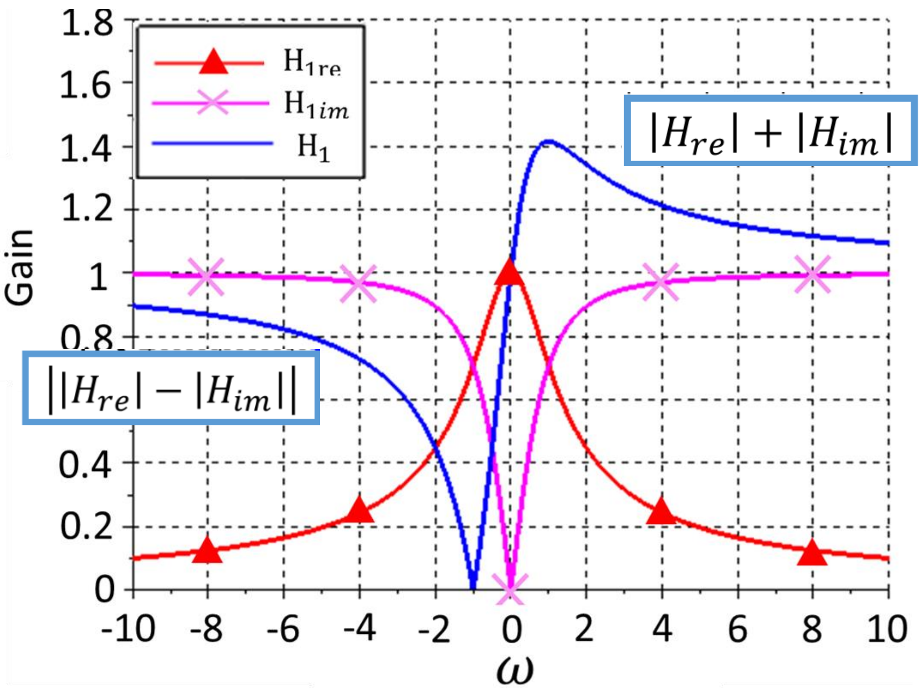
$R_1 = 1k\Omega \qquad C_1 = 10pF$

1次RCポリフェーズフィルタ：周波数特性

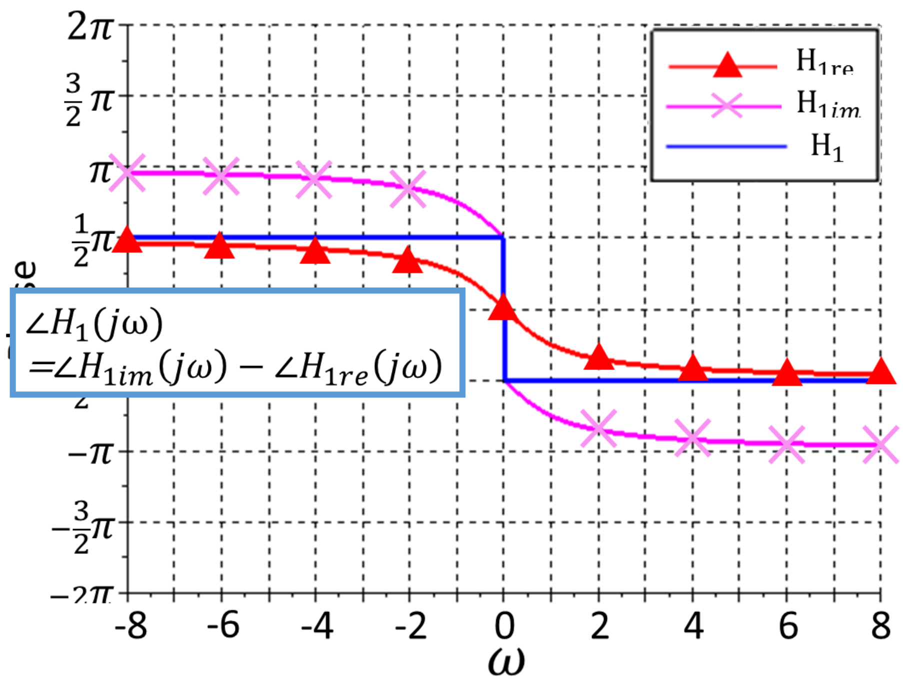
$$H(j\omega) = H_{re}(j\omega) + jH_{im}(j\omega)$$

実部： $H_{re}(j\omega) = \dfrac{H(j\omega) + H^*(-j\omega)}{2} = \dfrac{1}{1 + j\omega RC}$

虚部： $H_{im}(j\omega) = \dfrac{H(j\omega) - H^*(-j\omega)}{2} = -j\dfrac{\omega RC}{1 + j\omega RC}$



振幅特性



位相特性

1次RCポリフェーズフィルタの解析

- Hの振幅特性は

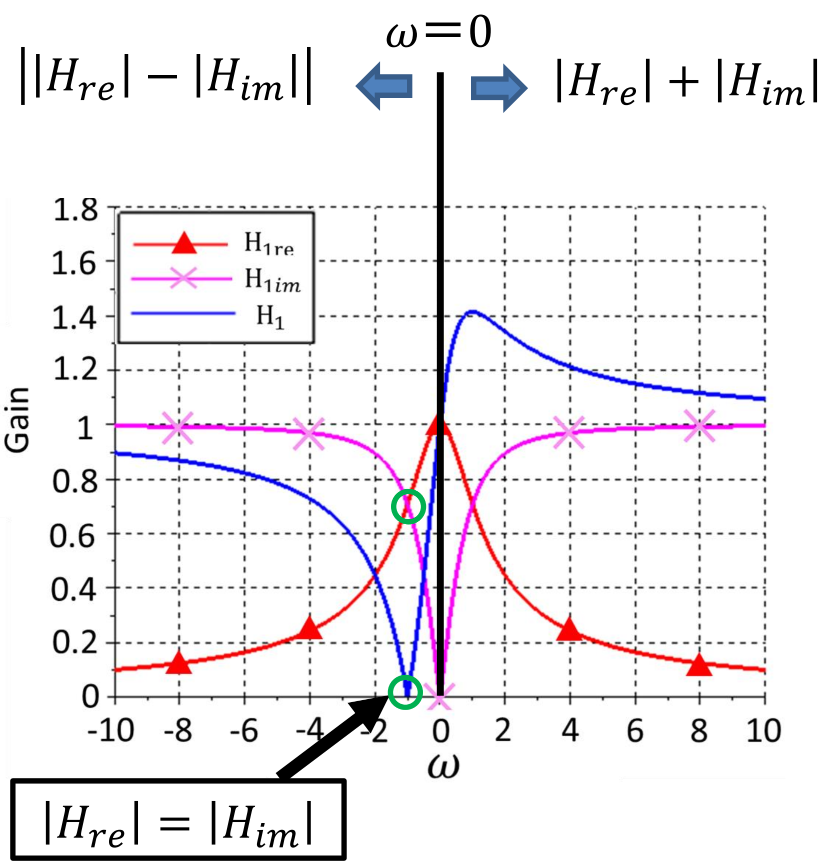
  $\omega > 0$　で　$|H_{re}| + |H_{im}|$

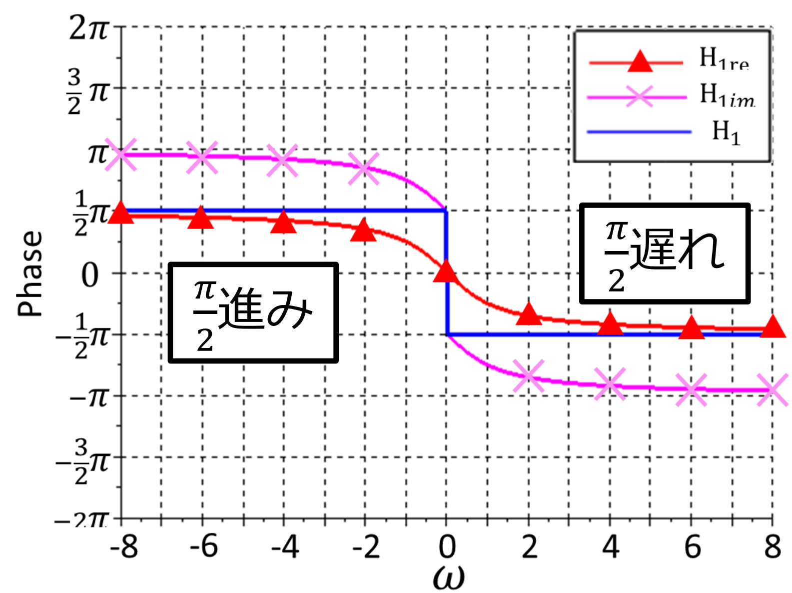
  $\omega < 0$　で　$||H_{re}| - |H_{im}||$

- Hre, Himの位相は

  $\omega > 0$　で　90°位相遅れ

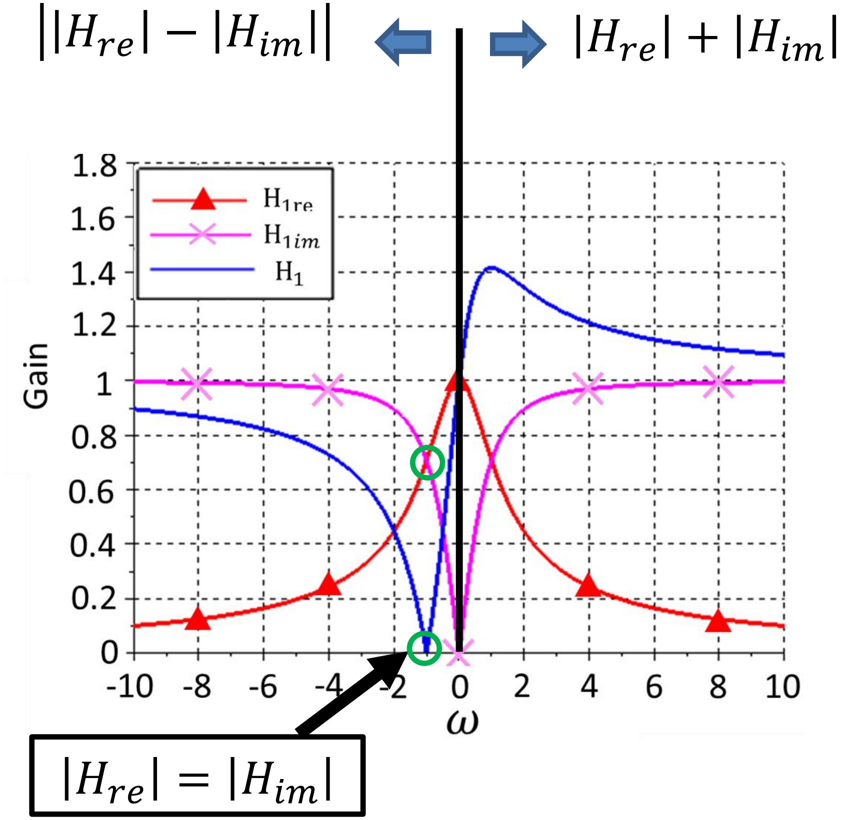
  $\omega < 0$　で　90°位相進み

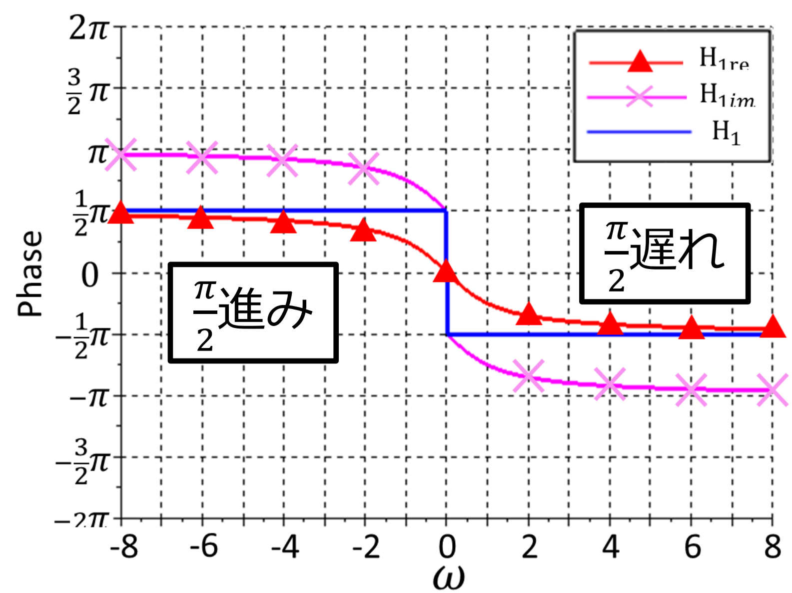




1次RCポリフェーズフィルタの解析

振幅特性はゼロ点のみヒルベルトフィルタ
位相特性は完全にヒルベルトフィルタ



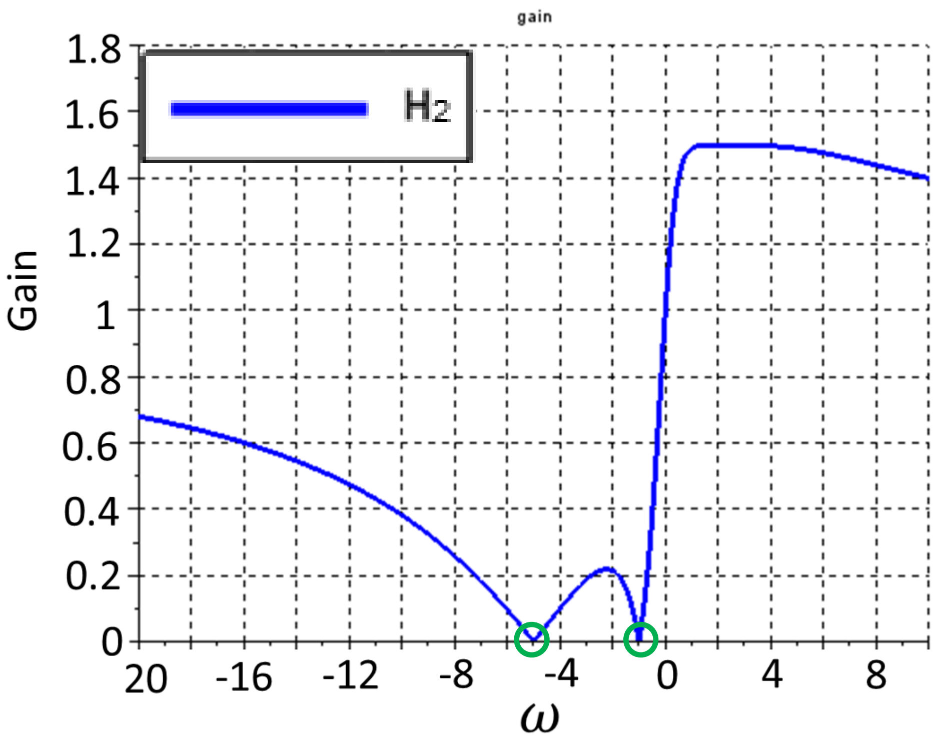


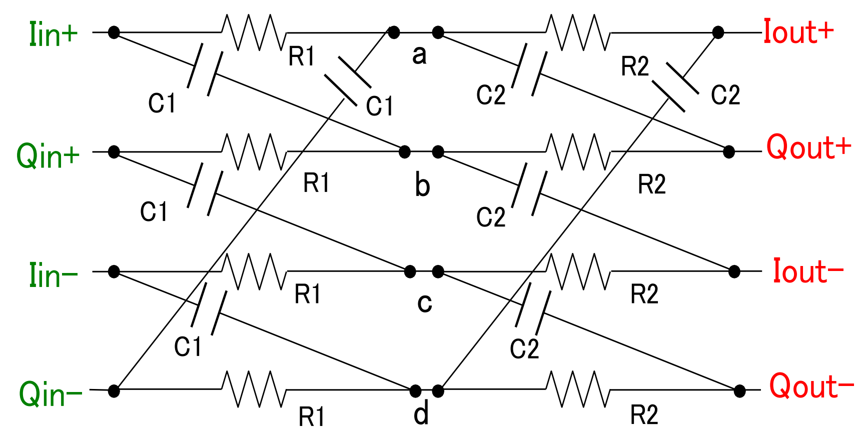
目次

- 研究の動機
- RCポリフェーズフィルタ
- ヒルベルトフィルタ
- RCポリフェーズフィルタ特性解析手法
- RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性
  - 1次
  - 2次
  - 3次、4次
  - 一般のn次
- まとめ

2次RCポリフェーズフィルタ：伝達関数

$$H_2(j\omega) = \frac{(1+\omega R_1 C_1)(1+\omega R_2 C_2)}{1-\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 + j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2 + 2R_1 C_2)}$$





$R_1 = 1k\Omega \qquad C_1 = 10pF$

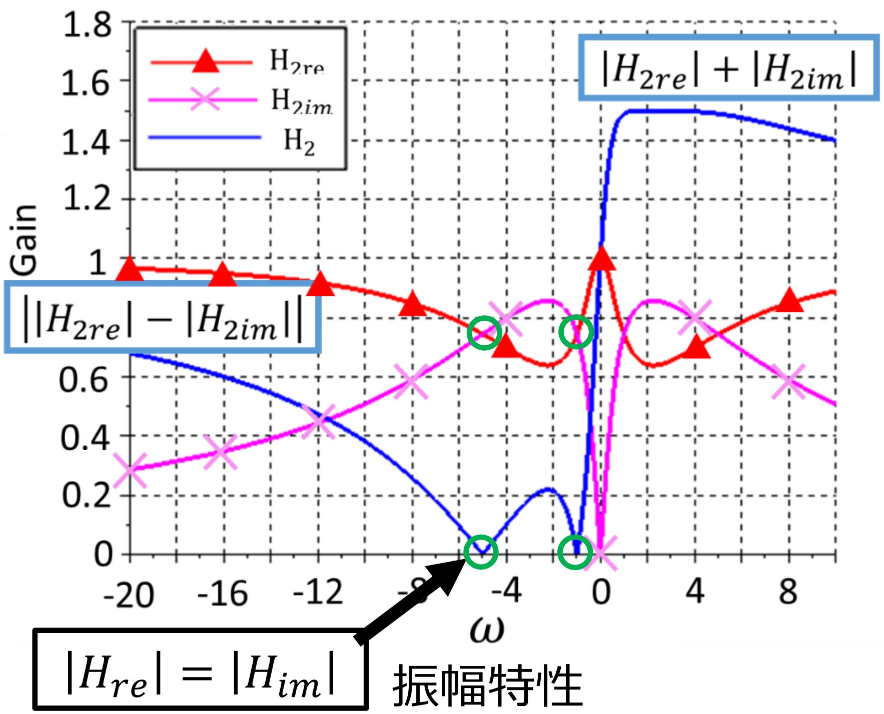
$R_2 = 3k\Omega \qquad C_2 = 1pF$

ゼロ点： $\omega = -\frac{1}{R_1 C_1}, -\frac{1}{R_2 C_2}$

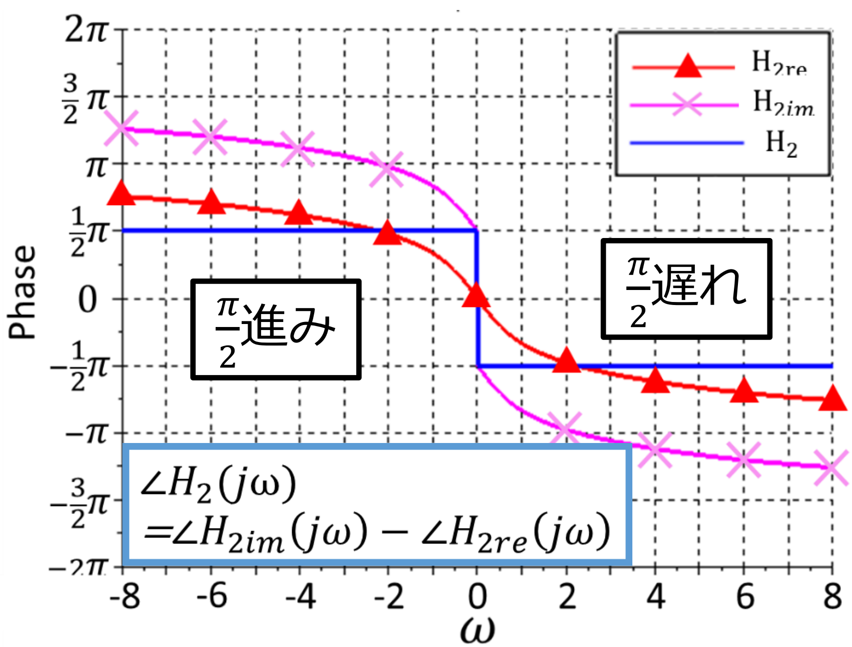
2次RCポリフェーズフィルタ：周波数特性

$$H_{re}(j\omega)=\frac{H(j\omega)+H^*(-j\omega)}{2}=\frac{(1+\omega^2 R_1C_1R_2C_2)}{(1-\omega^2 R_1C_1R_2C_2)+j\omega(R_1C_1+R_2C_2+2R_1C_2)}$$

$$H_{im}(j\omega)=\frac{H(j\omega)-H^*(-j\omega)}{2}=-j\frac{\omega(R_1C_1+R_2C_2)}{(1-\omega^2 R_1C_1R_2C_2)+j\omega(R_1C_1+R_2C_2+2R_1C_2)}$$



振幅特性



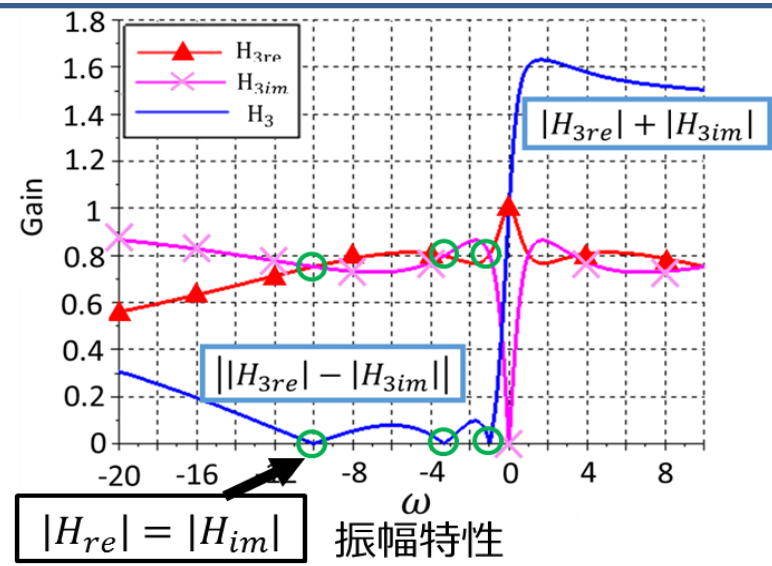
位相特性

目次

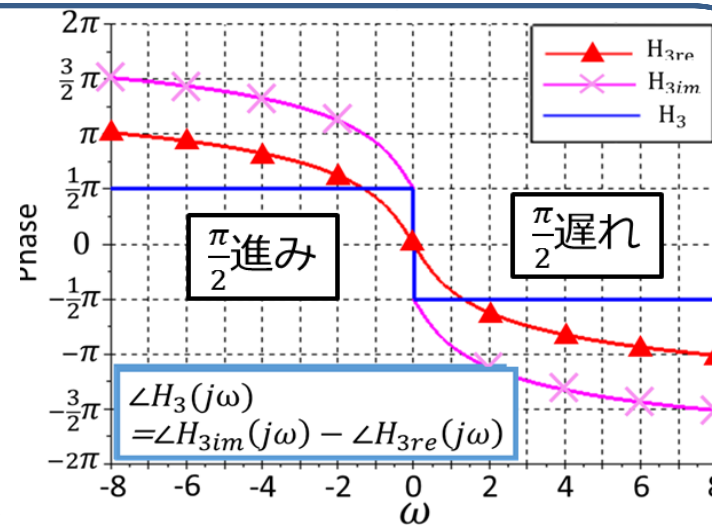
- 研究の動機
- RCポリフェーズフィルタ
- ヒルベルトフィルタ
- RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性
  - 1次
  - 2次
  - 3次、4次
  - 一般のn次
- まとめ

3次、4次RCポリフェーズフィルタ：周波数特性

3次

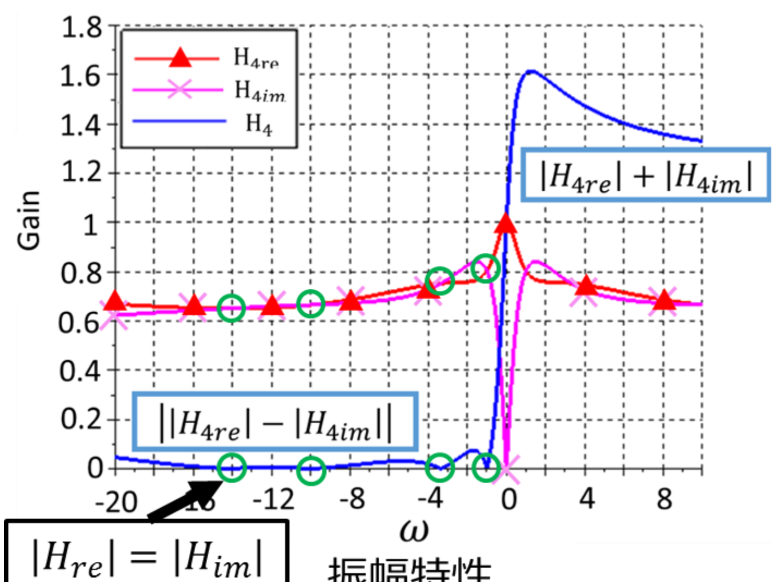


振幅特性

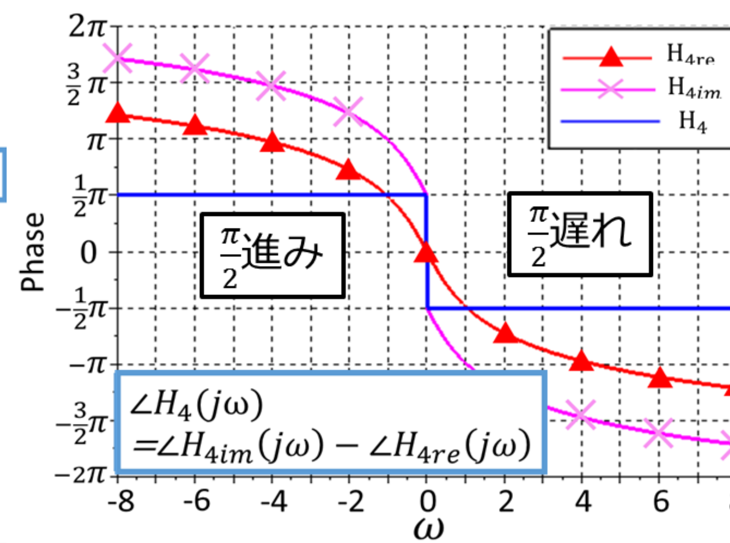


位相特性

4次



振幅特性



位相特性

解析結果のまとめと考察

1次－４次RCポリフェーズフィルタの解析結果

振幅特性はゼロ点のみヒルベルトフィルタ
位相特性は完全にヒルベルトフィルタ

↓

一般の　n 次　(n=1, 2, 3, 4, 5, …) でも
成立することが予想できる

目次

- 研究の動機
- RCポリフェーズフィルタ
- ヒルベルトフィルタ
- RCポリフェーズフィルタとヒルベルトフィルタの関係性
  - 1次
  - 2次
  - 3次
  - 4次
  - 一般のn次
- まとめ

RCポリフェーズフィルタのn次伝達関数

$$H_{(n)}(s) = \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{js}{\omega_k}\right)}{D_{(n)}(s)}$$

$$D_{(n)}(s) = 1 + a_1 s + \cdots + a_n s^n$$

$$H_{(n)}(s) = H_{(n)re}(s) + jH_{(n)im}(s)$$

$$s = j\omega$$

$$H_{(n)}(j\omega) = H_{(n)re}(j\omega) + jH_{(n)im}(j\omega)$$

ゼロ点や、位相は伝達関数の分子より導き出すことができる

↓

分子に着目

RCポリフェーズフィルタのn+1次伝達関数

$$H_{(n+1)}(s)=\frac{\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{js}{\omega_k}\right)}{D_{(n+1)}(s)}=\frac{D_n(s)}{D_{(n+1)}(s)}H_{(n)}(s)\left[1-\frac{js}{\omega_{n+1}}\right]=\frac{1}{D_{(n+1)}(s)}\underbrace{N_{(n)}(s)\left[1-\frac{js}{\omega_{n+1}}\right]}_{N_{(n+1)}(s)}$$

$$D_{(n+1)}(s)=1+a_1's+\cdots+a_{n+1}'s^{n+1}$$

$$N_{(n+1)}(s)=N_{(n)}(s)\left[1-\frac{js}{\omega_{n+1}}\right]=N_{(n+1)re}(s)+jN_{(n+1)im}(s)=\left[N_{(n)re}(s)+jN_{(n)im}(s)\right]\left[1-\frac{js}{\omega_{n+1}}\right]$$

$$=\left[N_{(n)re}(s)+\frac{s}{\omega_{n+1}}N_{(n)im}(s)\right]+j\left[N_{(n)im}(s)-\frac{s}{\omega_{n+1}}N_{(n)re}(s)\right]$$

RCポリフェーズフィルタの2次の伝達関数 (n=1)

$$H_{(2)}(j\omega) = \frac{(1+\omega R_1C_1)(1+\omega R_2C_2)}{1-\omega^2 R_1C_1R_2C_2 + j\omega(R_1C_1 + R_2C_2 + 2R_1C_2)}$$

$$\begin{aligned} N_{(2)} &= (1+\omega R_1C_1)(1+\omega R_2C_2) \\ &= \left(1+\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{\omega}{\omega_2}\right) = \boxed{1+\frac{\omega}{\omega_1}+\frac{\omega}{\omega_2}+\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}} \end{aligned}$$

$$N_{(2)}(s)$$

$$= \left[N_{(1)re}(s) + \frac{s}{\omega_2}N_{(1)im}(s)\right] + j\left[N_{(1)im}(s) - \frac{s}{\omega_2}N_{(1)re}(s)\right]$$

$$= \left[1-\frac{s}{\omega_1}\frac{s}{\omega_2}\right] + j\left[-\frac{s}{\omega_1}-\frac{s}{\omega_2}\right] = \boxed{1+\frac{\omega}{\omega_1}+\frac{\omega}{\omega_2}+\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}}$$

RCポリフェーズフィルタの3次の伝達関数 (n=2)

$$H_{(3)}(j\omega)=\frac{(1+\omega R_1C_1)(1+\omega R_2C_2)(1+\omega R_3C_3)}{D_{3R}(\omega)+j\,D_{3I}(\omega)}$$

$$N_{(3)}=(1+\omega R_1C_1)(1+\omega R_2C_2)(1+\omega R_3C_3)=\left(1+\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1+\frac{\omega}{\omega_3}\right)$$

$$=\boxed{1+\frac{\omega}{\omega_1}+\frac{\omega}{\omega_2}+\frac{\omega}{\omega_3}+\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\omega^2}{\omega_2\omega_3}+\frac{\omega^2}{\omega_3\omega_1}+\frac{\omega^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}}$$

$$N_{(3)}(s)$$

$$=\left[N_{(2)re}(s)+\frac{s}{\omega_3}N_{(2)im}(s)\right]+j\left[N_{(2)im}(s)-\frac{s}{\omega_3}N_{(2)re}(s)\right]$$

$$=\left[1-\frac{s^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{s}{\omega_3}\left(-\frac{s}{\omega_1}-\frac{s}{\omega_2}\right)\right]+j\left[-\frac{s}{\omega_1}-\frac{s}{\omega_2}-\frac{s}{\omega_3}\left(1-\frac{s^2}{\omega_1\omega_2}\right)\right]$$

$$=\boxed{1+\frac{\omega}{\omega_1}+\frac{\omega}{\omega_2}+\frac{\omega}{\omega_3}+\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\omega^2}{\omega_2\omega_3}+\frac{\omega^2}{\omega_3\omega_1}+\frac{\omega^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}}$$

RCポリフェーズフィルタの4次の伝達関数 (n=3)

$$H_{(4)}(j\omega)=\frac{(1+\omega R_1C_1)(1+\omega R_2C_2)(1+\omega R_3C_3)(1+\omega R_4C_4)}{D_{4R}(\omega)+j\,D_{4I}(\omega)}$$

$$N_{(4)}=(1+\omega R_1C_1)(1+\omega R_2C_2)(1+\omega R_3C_3)(1+\omega R_4C_4)=\left(1+\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{\omega}{\omega_2}\right)\left(1+\frac{\omega}{\omega_3}\right)\left(1+\frac{\omega}{\omega_4}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&=1+\frac{\omega}{\omega_1}+\frac{\omega}{\omega_2}+\frac{\omega}{\omega_3}+\frac{\omega}{\omega_4}+\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\omega^2}{\omega_2\omega_3}+\frac{\omega^2}{\omega_3\omega_4}+\frac{\omega^2}{\omega_4\omega_1}+\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\omega^2}{\omega_2\omega_4}\\&+\frac{\omega^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}+\frac{\omega^3}{\omega_2\omega_3\omega_4}+\frac{\omega^3}{\omega_3\omega_4\omega_1}+\frac{\omega^3}{\omega_4\omega_1\omega_2}+\frac{\omega^4}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}\end{aligned}}$$

$$N_{(4)}(s)$$

$$=\left[N_{(3)re}(s)+\frac{s}{\omega_4}N_{(3)im}(s)\right]+j\left[N_{(3)im}(s)-\frac{s}{\omega_4}N_{(3)re}(s)\right]$$

$$=\left[1-\frac{s^2}{\omega_1\omega_2}-\frac{s^2}{\omega_2\omega_3}-\frac{s^2}{\omega_3\omega_1}+\frac{s}{\omega_4}\left(-\frac{s}{\omega_1}-\frac{s}{\omega_2}-\frac{s}{\omega_3}+\frac{s^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\right)\right]$$

$$+j\left[-\frac{s}{\omega_1}-\frac{s}{\omega_2}-\frac{s}{\omega_3}+\frac{s^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}-\frac{s}{\omega_4}\left(1-\frac{s^2}{\omega_1\omega_2}-\frac{s^2}{\omega_2\omega_3}-\frac{s^2}{\omega_3\omega_1}\right)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&=1+\frac{\omega}{\omega_1}+\frac{\omega}{\omega_2}+\frac{\omega}{\omega_3}+\frac{\omega}{\omega_4}+\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\omega^2}{\omega_2\omega_3}+\frac{\omega^2}{\omega_3\omega_4}+\frac{\omega^2}{\omega_4\omega_1}+\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\omega^2}{\omega_2\omega_4}\\&+\frac{\omega^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}+\frac{\omega^3}{\omega_2\omega_3\omega_4}+\frac{\omega^3}{\omega_3\omega_4\omega_1}+\frac{\omega^3}{\omega_4\omega_1\omega_2}+\frac{\omega^4}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}\end{aligned}}$$

RCポリフェーズフィルタの1次の伝達関数

$$N_{(1)}(s) = 1 + j\left(-\frac{s}{\omega_1}\right)$$

$\boxed{N_{(1)re}(s)}$ $\boxed{N_{(1)im}(s)}$

$$N_{(1)re}(s) = 1 \qquad N_{(1)im}(s) = -\frac{s}{\omega_1}$$

$$N_{(1)im}(j\omega) = -\frac{j\omega}{\omega_1}$$

$\boxed{\omega = \omega_1}$

$$N_{(1)re}(j\omega_1) = 1$$

$$N_{(1)im}(j\omega_1) = -j$$

$\boxed{\omega = -\omega_1}$

$$N_{(1)re}(-j\omega_1) = 1$$

$$N_{(1)im}(-j\omega_1) = j$$

$\boxed{\left|N_{(1)re}\right| = \left|N_{(1)im}\right|}$

$\angle N_{(1)re}$と$\angle N_{(1)im}$は90°の位相差

RCポリフェーズフィルタの2次の伝達関数

$$N_{(2)}(s) = N_{(1)}(s)\left(1-\frac{js}{\omega_2}\right) = \left(N_{(1)re}(s) + jN_{(1)im}(s)\right)\left(1-\frac{js}{\omega_2}\right) = \underbrace{\left[N_{(1)re}(s) + \frac{s}{\omega_2}N_{(1)im}(s)\right]}_{\boxed{{}_2N_{re}(s)}} + j\underbrace{\left[N_{(1)im}(s) - \frac{s}{\omega_2}N_{(1)re}(s)\right]}_{\boxed{{}_2N_{im}(s)}}$$

$$N_{(2)re}(s) = 1 - \frac{s^2}{\omega_1\omega_2} \rightarrow N_{(2)re}(j\omega) = 1 + \frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2} \qquad N_{(2)im}(s) = -\frac{s}{\omega_2} - \frac{s}{\omega_2} \rightarrow N_{(2)im}(j\omega) = -j\left(\frac{\omega}{\omega_1} + \frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

$\boxed{\omega = \omega_1}$

$$N_{(2)re}(j\omega_1) = 1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$N_{(2)im}(j\omega_1) = -j\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

$\boxed{\omega = -\omega_1}$

$$N_{(2)re}(-j\omega_1) = 1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$N_{(2)im}(-j\omega_1) = j\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

$\boxed{\omega = \omega_2}$

$$N_{(2)re}(j\omega_1) = 1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$N_{(2)im}(j\omega_1) = -j\left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

$\boxed{\omega = -\omega_2}$

$$N_{(2)re}(-j\omega_2) = 1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$N_{(2)im}(-j\omega_2) = j\left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

$\omega > 0$ ➡ $N_{(2)re}(j\omega_k) = a \quad N_{(2)im}(j\omega_k) = -ja$と置く

$\omega < 0$ ➡ $N_{(2)re}(j\omega_k) = a \quad N_{(2)im}(j\omega_k) = ja$と置く

$k = 1,2$

$\boxed{\left|N_{(2)re}\right| = \left|N_{(2)im}\right| \rightarrow H(-j\omega_k) = 0}$

$\angle N_{(2)re}$と$\angle N_{(2)im}$は90°の位相差

RCポリフェーズフィルタの3次の伝達関数

$$N_3(s)=N_2(s)\left(1-\frac{js}{\omega_3}\right)=\left(N_{(2)re}(s)+jN_{(2)im}(s)\right)\left(1-\frac{js}{\omega_3}\right)=\left[\underbrace{{}_2N_{(2)re}(s)+\frac{s}{\omega_3}N_{(2)im}(s)}_{\boxed{N_{(3)re}(s)}}\right]+j\left[\underbrace{N_{(2)im}(s)-\frac{s}{\omega_3}N_{(2)re}(s)}_{\boxed{N_{(3)im}(s)}}\right]$$

$$N_{(3)re}(s)=N_{(2)re}(s)+\frac{s}{\omega_3}N_{(2)im}(s)$$

$$\rightarrow N_{(2)re}(j\omega)=N_{(2)re}(j\omega)+\frac{j\omega}{\omega_3}N_{(2)im}(j\omega)$$

$$N_{(3)im}(s)=N_{(2)im}(s)-\frac{s}{\omega_3}N_{(2)re}(s)$$

$$\rightarrow N_{(3)im}(j\omega)=N_{(2)im}(j\omega)-\frac{j\omega}{\omega_3}N_{(2)re}(j\omega)$$

$\boxed{\omega=\omega_1}$

$$N_{(3)re}(j\omega_1)=a+a\frac{\omega_1}{\omega_3}$$

$$N_{(3)im}(j\omega_1)=-j\left(a+a\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)$$

$\boxed{\omega=\omega_2}$

$$N_{(3)re}(j\omega_2)=a+a\frac{\omega_2}{\omega_3}$$

$$N_{(3)im}(j\omega_2)=-j\left(a+a\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)$$

$\boxed{\omega=\omega_3}$

$$N_{(3)re}(j\omega_3)=1+\frac{\omega_3}{\omega_1}+\frac{\omega_3}{\omega_2}+\frac{\omega_3{}^2}{\omega_1\omega_2}$$

$$N_{(3)im}(j\omega_3)=-j\left(1+\frac{\omega_3}{\omega_1}+\frac{\omega_3}{\omega_2}+\frac{\omega_3{}^2}{\omega_1\omega_2}\right)$$

$\boxed{\omega=-\omega_1}$

$$N_{(3)re}(-j\omega_1)=a+a\frac{\omega_1}{\omega_3}$$

$$N_{(3)im}(-j\omega_1)=j\left(a+a\frac{\omega_1}{\omega_3}\right)$$

$\boxed{\omega=-\omega_2}$

$$N_{(3)re}(-j\omega_2)=a+a\frac{\omega_2}{\omega_3}$$

$$N_{(3)im}(-j\omega_2)=j\left(a+a\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)$$

$\boxed{\omega=-\omega_3}$

$$N_{(3)re}(-j\omega_1)=1+\frac{\omega_3}{\omega_1}+\frac{\omega_3}{\omega_2}+\frac{\omega_3{}^2}{\omega_1\omega_2}$$

$$N_{(3)im}(-j\omega_3)=-j\left(1+\frac{\omega_3}{\omega_1}+\frac{\omega_3}{\omega_2}+\frac{\omega_3{}^2}{\omega_1\omega_2}\right)$$

$\boxed{\left|N_{(3)re}\right|=\left|N_{(3)im}\right|\rightarrow H(-j\omega_k)=0}$

$\boxed{\angle N_{(3)re}と\angle N_{(3)im}は90°の位相差}$

$\omega>0 \Rightarrow {}_3N_{re}(j\omega_k)=b \quad {}_3N_{im}(j\omega_k)=-jb$ と置く

$\omega<0 \Rightarrow {}_3N_{re}(j\omega_k)=b \quad {}_2N_{im}(j\omega_k)=jb$ と置く $\quad k=1,2,3$

RCポリフェーズフィルタの4次の伝達関数

$$N_4(s) = N_3(s)\left(1-\frac{js}{\omega_4}\right) = \left(N_{(3)re}(s) + jN_{(3)im}(s)\right)\left(1-\frac{js}{\omega_4}\right) = \underbrace{\left[N_{(3)re}(s) + \frac{s}{\omega_4}N_{(3)im}(s)\right]}_{\boxed{N_{(4)re}(s)}} + j\underbrace{\left[N_{(3)im}(s) - \frac{s}{\omega_4}N_{(3)re}(s)\right]}_{\boxed{N_{(4)im}(s)}}$$

$$N_{(4)re}(s) = N_{(3)re}(s) + \frac{s}{\omega_4}N_{(3)im}(s)$$

$$\rightarrow N_{(4)re}(j\omega) = N_{(3)re}(j\omega) + \frac{j\omega}{\omega_4}N_{(3)im}(j\omega)$$

$$N_{(4)im}(s) = N_{(3)im}(s) - \frac{s}{\omega_4}N_{(3)re}(s)$$

$$\rightarrow N_{(4)im}(j\omega) = N_{(3)im}(j\omega) - \frac{j\omega}{\omega_4}N_{(3)re}(j\omega)$$

$\omega = \omega_1$

$$N_{(4)re}(j\omega_1) = b + b\frac{\omega_1}{\omega_4}$$

$$N_{(4)im}(j\omega_1) = -j\left(b + b\frac{\omega_1}{\omega_4}\right)$$

$\omega = \omega_2$

$$N_{(4)re}(j\omega_2) = b + b\frac{\omega_2}{\omega_4}$$

$$N_{(4)im}(j\omega_2) = -j\left(b + b\frac{\omega_2}{\omega_4}\right)$$

$\omega = \omega_3$

$$N_{(4)re}(j\omega_3) = b + b\frac{\omega_3}{\omega_4}$$

$$N_{(4)im}(j\omega_3) = -j\left(b + b\frac{\omega_3}{\omega_4}\right)$$

$\omega = -\omega_1$

$$N_{(4)re}(-j\omega_1) = b + b\frac{\omega_1}{\omega_4}$$

$$N_{(4)im}(-j\omega_1) = j\left(b + b\frac{\omega_1}{\omega_4}\right)$$

$\omega = -\omega_2$

$$N_{(4)re}(-j\omega_2) = b + b\frac{\omega_2}{\omega_4}$$

$$N_{(4)im}(-j\omega_2) = j\left(b + b\frac{\omega_2}{\omega_4}\right)$$

$\omega = -\omega_3$

$$N_{(4)re}(-j\omega_3) = b + b\frac{\omega_3}{\omega_4}$$

$$N_{(4)im}(-j\omega_3) = j\left(b + b\frac{\omega_3}{\omega_4}\right)$$

RCポリフェーズフィルタの4次の伝達関数

$$N_4(s) = N_3(s)\left(1-\frac{js}{\omega_4}\right) = \left(N_{(3)re}(s) + jN_{(3)im}(s)\right)\left(1-\frac{js}{\omega_4}\right) = \Bigg[\underbrace{N_{(3)re}(s) + \frac{s}{\omega_4}N_{(3)im}(s)}_{\boxed{N_{(4)re}(s)}}\Bigg] + j\Bigg[\underbrace{N_{(3)im}(s) - \frac{s}{\omega_4}N_{(3)re}(s)}_{\boxed{N_{(4)im}(s)}}\Bigg]$$

$$N_{(4)re}(s) = N_{(3)re}(s) + \frac{s}{\omega_4}N_{(3)im}(s)$$

$$\rightarrow N_{(4)re}(j\omega) = N_{(3)re}(j\omega) + \frac{j\omega}{\omega_4}N_{(3)im}(j\omega)$$

$$N_{(4)im}(s) = N_{(3)im}(s) - \frac{s}{\omega_4}N_{(3)re}(s)$$

$$\rightarrow N_{(4)im}(j\omega) = N_{(3)im}(j\omega) - \frac{j\omega}{\omega_4}N_{(3)re}(j\omega)$$

$\boxed{\omega = \omega_4}$

$$N_{(4)re}(j\omega_4) = 1 + \frac{\omega_4}{\omega_1} + \frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_4}{\omega_3} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_1\omega_2} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_2\omega_3} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_1\omega_3} + \frac{\omega_4{}^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}$$

$$N_{(4)im}(j\omega_4) = -j\left(1 + \frac{\omega_4}{\omega_1} + \frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_4}{\omega_3} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_1\omega_2} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_2\omega_3} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_1\omega_3} + \frac{\omega_4{}^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\right)$$

$\boxed{\omega = -\omega_4}$

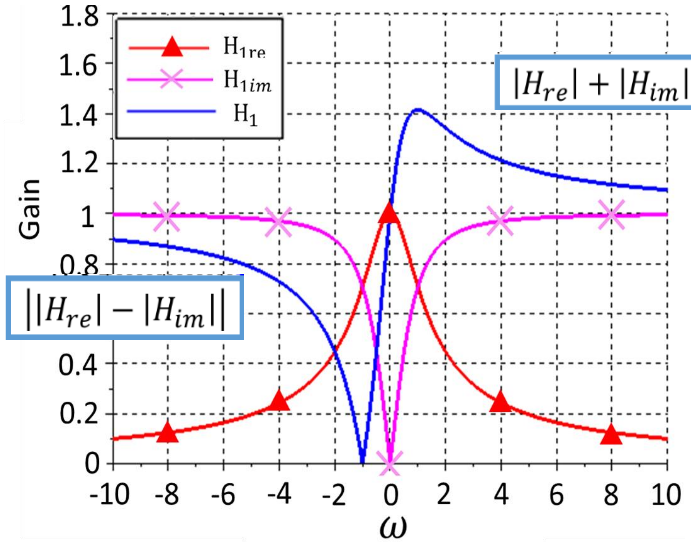
$$N_{(4)re}(-j\omega_4) = 1 + \frac{\omega_4}{\omega_1} + \frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_4}{\omega_3} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_1\omega_2} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_2\omega_3} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_1\omega_3} + \frac{\omega_4{}^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}$$

$$N_{(4)im}(-j\omega_4) = j\left(1 + \frac{\omega_4}{\omega_1} + \frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_4}{\omega_3} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_1\omega_2} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_2\omega_3} + \frac{\omega_4{}^2}{\omega_1\omega_3} + \frac{\omega_4{}^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\right)$$

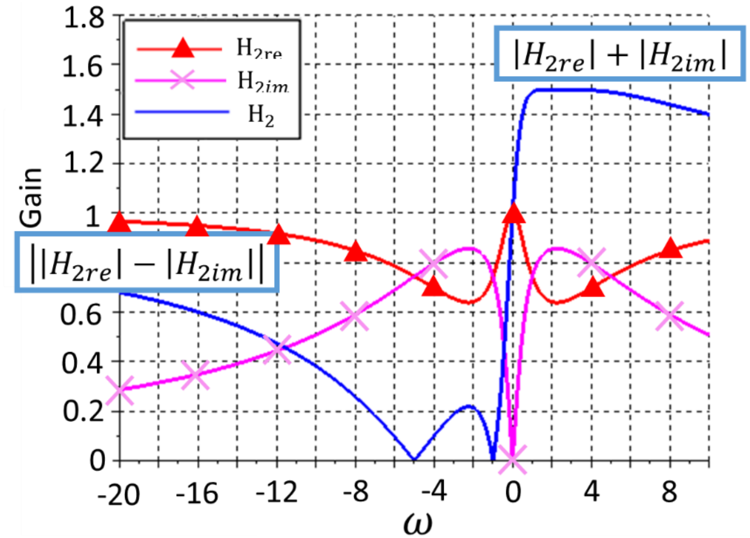
$\boxed{\left|N_{(4)re}\right| = \left|N_{(4)im}\right| \rightarrow H(-j\omega_k) = 0}$ $\boxed{\angle N_{(4)re}と\angle N_{(4)im}は90°の位相差}$

目次

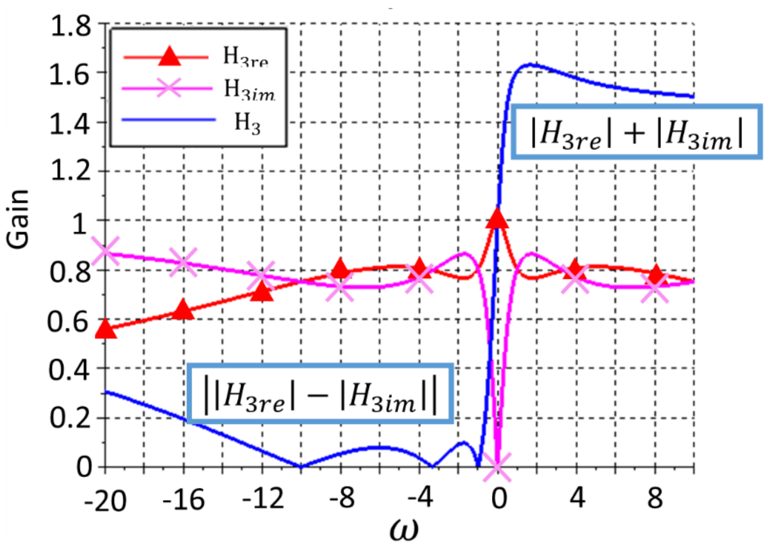
1~4次RCポリフェーズフィルタ：振幅特性



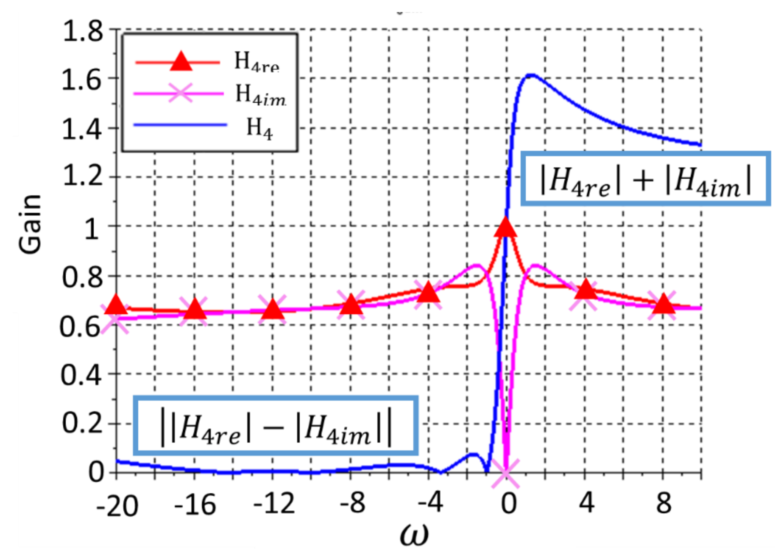
1次



2次

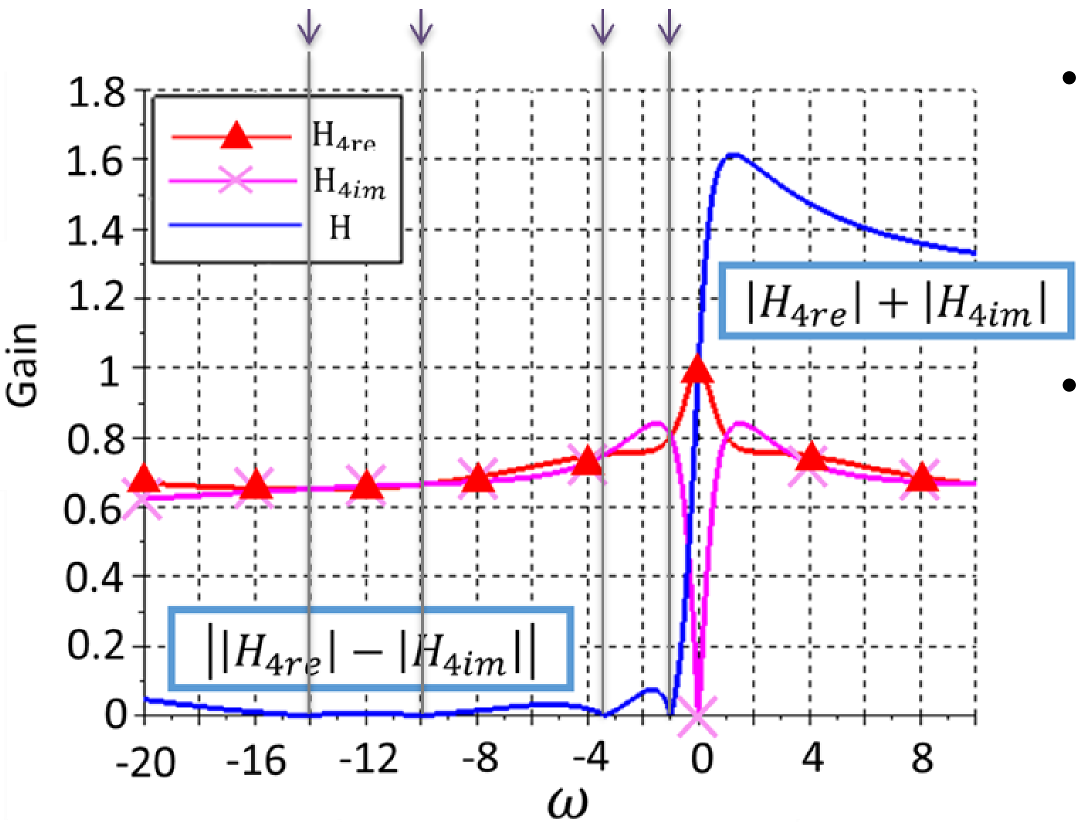


3次



4次

まとめ：振幅特性

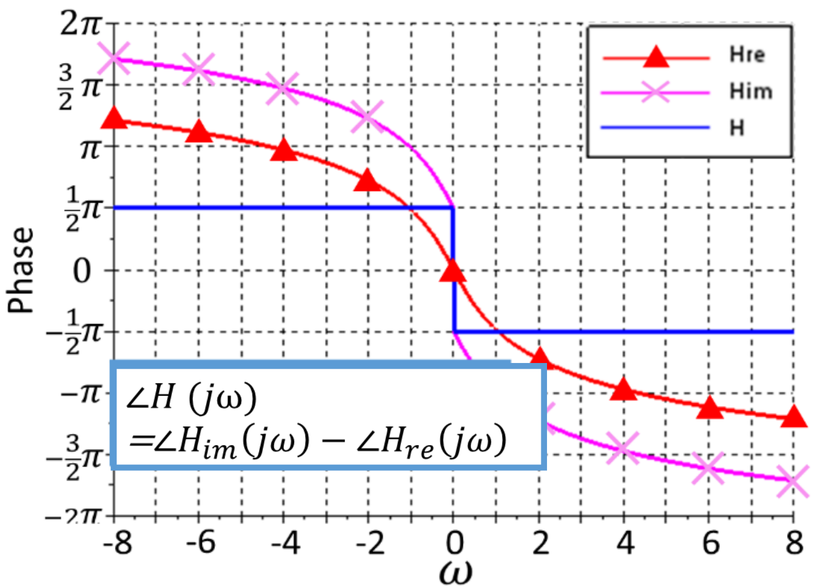


- ゼロ点のωでは,
  $|H_{re}(\omega)|$と$|H_{im}(\omega)|$の振幅が
  等しい

- 高次であるほど,
  ゼロ点の数が増加
  広範囲でReal partと
  Imaginary partの振幅特性が
  近くなる

理想ヒルベルト変換に近づく

まとめ：位相特性

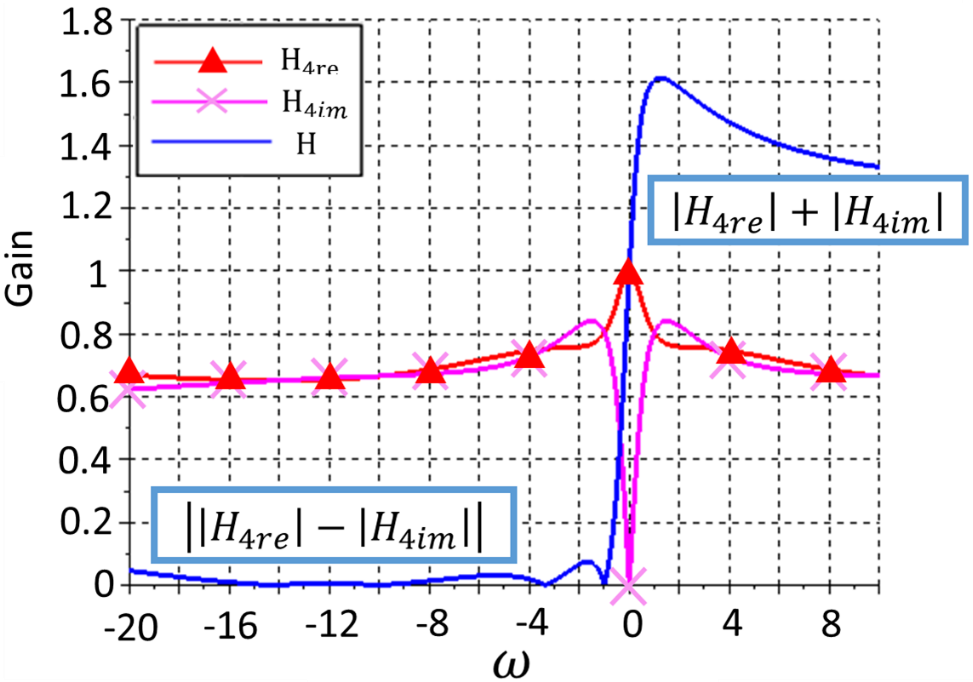


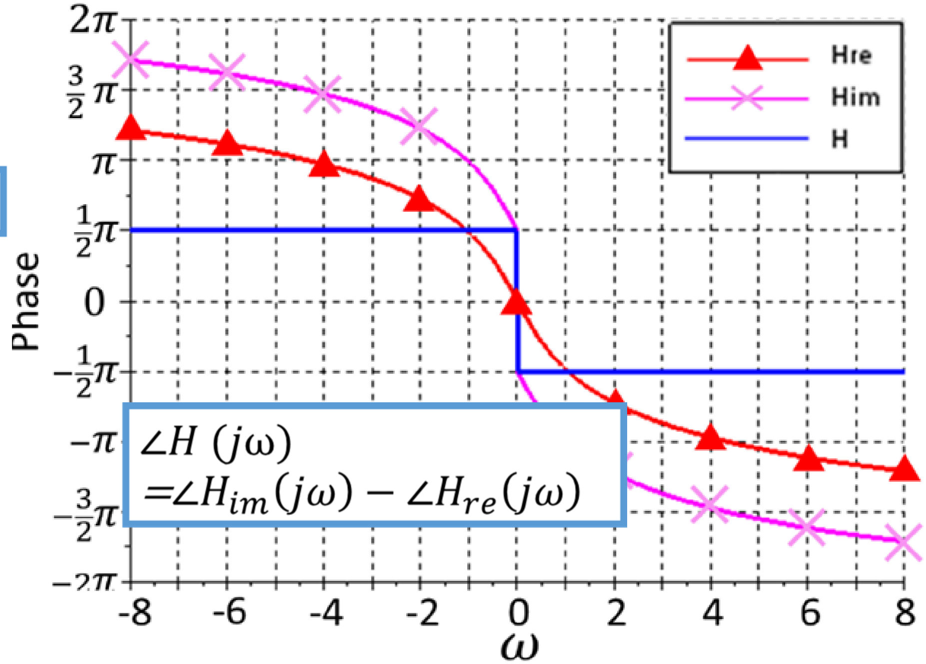
4次位相特性

- 1~4次まで入出力間に完全な90度位相差があることを確認

- 次数にかかわらず，広帯域でヒルベルト変換の条件を満たす

まとめ：考察





高次になるほど，ヒルベルトフィルタの理想特性に近づく

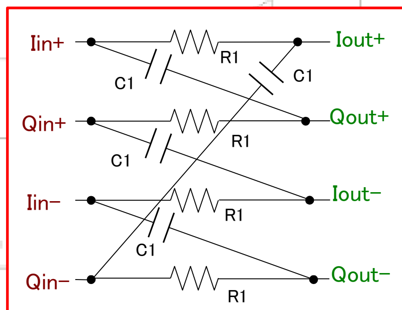
応用

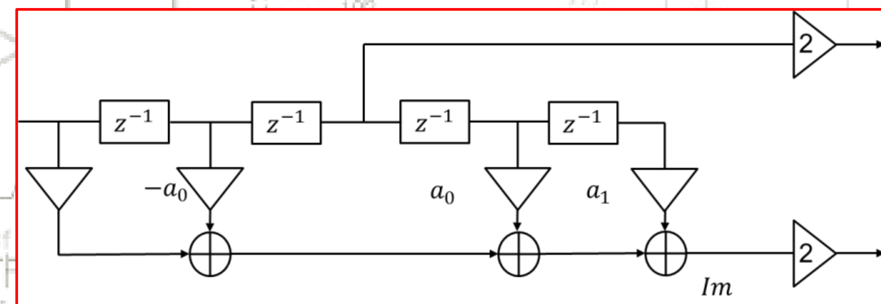
RCポリフェーズフィルタ特性がヒルベルト変換に近似

複素信号処理をアナログ信号のまま行える

高速、広帯域な通信や第5世代のミリ波通信で、
デジタル処理が追い付かない高速・高周波信号処理に
役立つと期待

数あるフィルタの中で，
お互いは何の関連性もない
全く別のものだと考えられていたが…





発見！

RCポリフェーズフィルタと
ヒルベルトフィルタは仲間だった！

Q&A

Q1

RCポリフェーズフィルタが提案されているということは、特性が既にわかっているのではないか。またヒルベルトフィルタとの関係性に着目した理由は何か。

→振幅特性はいろいろな論文に載っているが、位相特性に関しての論文は見つからなかった。ヒルベルトフィルタとの関係性を示したことから、デジタル処理で行っていたところをアナログで処理できるという利点があげられる。

Q2

デジタルのほうが高速に処理できるのではないか。

→デジタル処理するには必ずアナログをデジタルに変換するADCが必要になり、高周波、高速信号だとADCで問題が起こる。そのためRCポリフェーズフィルタはアナログ信号をアナログのまま処理できるという利点がある。

Q3（神奈川工科大学斉藤先生）

RCポリフェーズフィルタで容量Cが使われているが、寄生容量等による影響は出るのか。

→出力の影響は出る。RCポリフェーズフィルタの寄生容量を考慮したに論文があるので読んでいただければ詳しくわかると思う。