



確率密度関数を高精度に測定する 新しい処理手順

株式会社アドバンテスト研究所 主席研究員 山口 隆弘

1年間、「統計的処理」とその応用を勉強します。

統計的処理。統計的試験や測定の基本的課題はサンプリングする事象列の確率密度関数 PDF を推定することです。信号の2乗平均パワーの測定誤差は帯域幅と観測時間の積 (BT) に反比例する。これは B または T を大とすると RF パワーの測定精度を向上できることを意味する。一方、 BT を単純に増加させるだけでは正確な PDF 測定は実現できない。もし高時間分解能で PDF を測定すると、その偏り誤差は小さくなる。しかし図1 (c) に示すように、不規則誤差を増加させてしまう。

累積分布関数 (CDF) [1]。非減少関数 $F(t)$ が全実数軸上で定義され、(1) の条件をみたすとき、この関数は確率変数 t の累積分布関数と呼ばれます。

$$F(t) = \mathbf{P}\{t \leq t\} \quad (1)$$

$F(t)$ は $-\infty$ から ∞ の全 t にたいし定義される [2]:

A. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ (2)

B. 関数 $F(t)$ は t の非減少関数である。

$$F(t_1) \leq F(t_2) \quad t_1 \leq t_2 \quad (3)$$

C. 関数 $F(t)$ は右連続である。すなわち:

$$F(t^+) = F(t) \quad (4)$$

確率密度関数 (PDF)。PDF $f(t)$ は CDF $F(t)$ の導関数として定義される:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad (5)$$

従来のアプローチは、クラス・ビン幅 W のクラスにはいるデータの度数を、 W と標本の大きさ N との積で除し PDF を近似する: $\lim_{W \rightarrow 0} F(t, W) / W$ 。この結果、クラス・ビン幅にたいする相反する要求が不可避とな

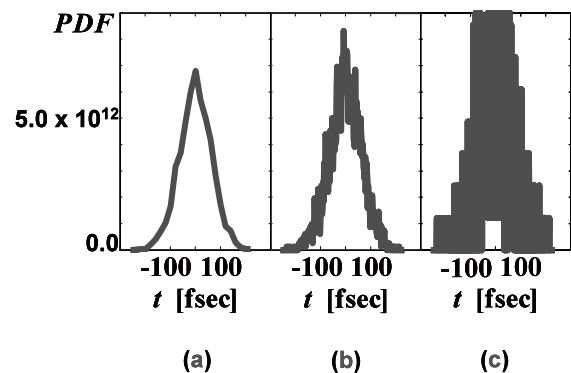


図1. アパーチャージッタ波形からもとめた確率密度関数 $f(t)$. (a) 分解能 $W = 20$ fs の PDF. (b) 分解能 $W = 2$ fs の PDF. (c) 分解能 $W = 0.2$ fs の PDF.

ります。(a) 度数分布から PDF を推定するから、偏り誤差を小さくするには W を小とする必要がある。しかしスパイクが多い PDF となる: 図1 (c)。(b) 一方、不規則誤差を小にするには大きな W が望ましい。大きくすると、図1 (a) に示すような過度に滑らかな PDF になり、真の分布が2峯性のとき、それを見逃してしまうことになる。

PDF 測定の統計誤差を再検討し、高分解能の PDF を算出する処理手順 [3] を紹介します。これからサブ・ピコ秒でも不規則誤差がない PDF をもてられる統計的処理手順と回路技術 [4] は非常に重要になります。

[1] A. Renyi, *Foundations of Probability*. San Francisco, CA: Holden-Day, Inc., 1970; Mineola, NY: Dover 207.

[2] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1984.

[3] T. J. Yamaguchi, S. Komatsu, M. Abbas, K. Asada, N. N. Mai-Khanh and J. Tandon, "A CMOS flash TDC with 0.84 - 1.3 ps resolution using standard cells," in *Proc. IEEE Radio Frequency Integrated Circuits Symp.*, Montreal, Canada, June 2012.

[4] K. Niitsu, M. Sakurai, N. Harigai, T. J. Yamaguchi, H. Kobayashi, "An On-Chip Timing Jitter Measurement Circuit Using a Self-Referenced Clock and a Cascaded Time Difference Amplifier with Duty-Cycle Compensation," in *Proc. IEEE Asian Solid-State Circuit Conf.*, Jeju, Korea, November 14-16, 2011.