

ETG-18-47, ETT18-47

余弦波マルチトーン信号, 正弦波マルチトーン信号の 性質と工学設計への応用

八田朱美 ○ 杜 遠洋 柴崎有祈子 浅見幸司(群馬大)
久保和良(小山高専) 桑名杏奈 小林春夫(群馬大)

t171d602@gunma-u.ac.jp



OUTLINE

- 研究背景・目的
- 余弦波の和の性質
- 正弦波の和の性質
- 余弦波、正弦波の和の工学設計応用
- 初期位相がゼロでない余弦波の和
- まとめ

OUTLINE

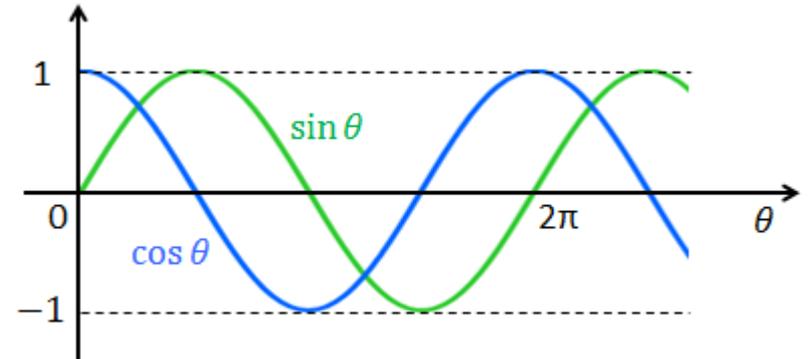
● 研究背景・目的

- 余弦波の和の性質
- 正弦波の和の性質
- 余弦波、正弦波の和の工学設計応用
- 初期位相がゼロでない余弦波の和
- まとめ

研究背景・目的

● 余弦波, 正弦波

- 電氣的に発生しやすい
- 理論解析にも有用



回路システムの設計・解析に広く使用

● 多くの異なる周波数の余弦波、正弦波の和の信号の

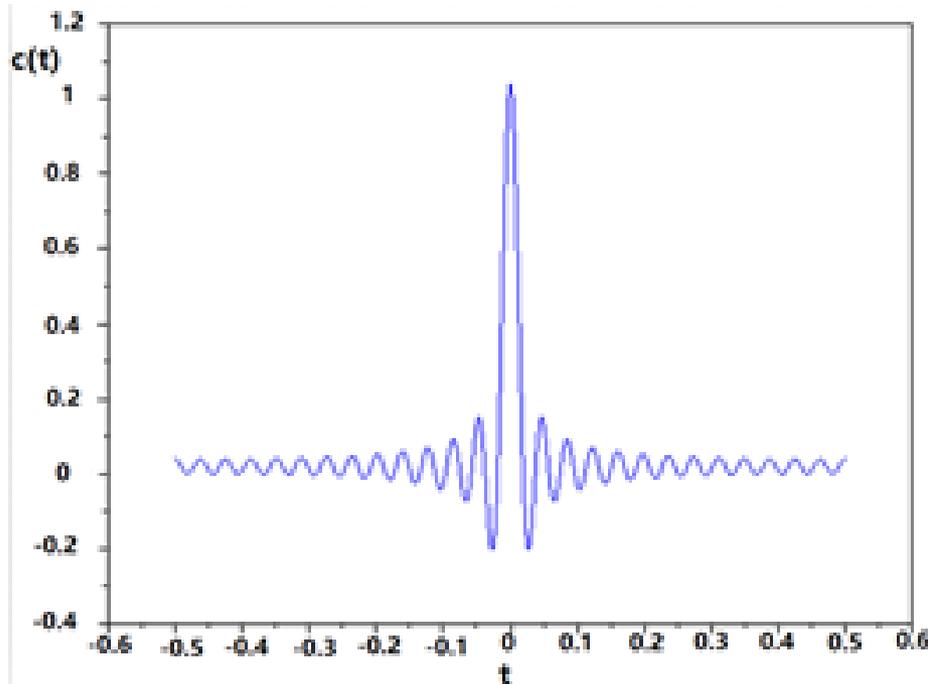
- 性質を調べる
- その応用を考察する

OUTLINE

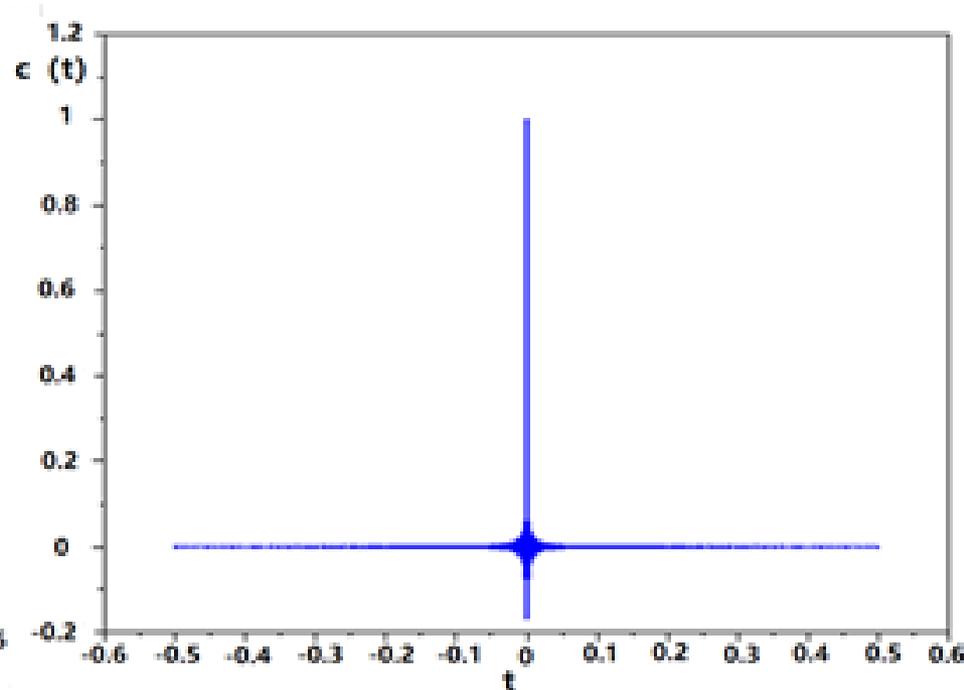
- 研究背景・目的
- 余弦波の和の性質
- 正弦波の和の性質
- 余弦波、正弦波の和の工学設計応用
- 初期位相がゼロでない余弦波の和
- まとめ

余弦波の和とデルタ関数

$$c(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \cos(n\omega_0 t)$$



N=26個の余弦波の和



N=626個の余弦波の和

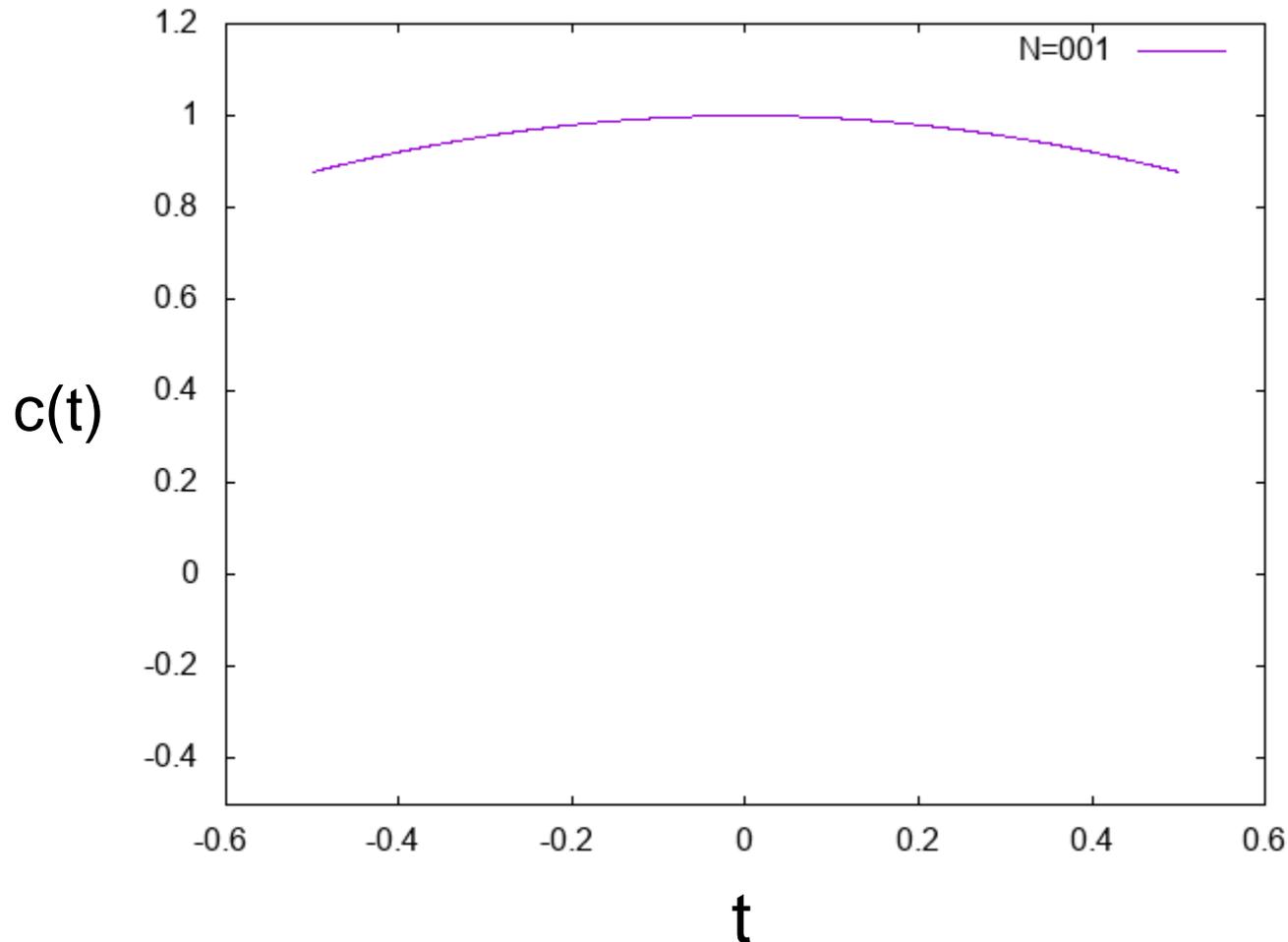
$d(t)$ がデルタ関数に収束することが推定できる

$$d(t) = (2N+1) \cdot c(t) = \sum_{n=-N}^N \cos(n\omega_0 t) \longrightarrow \delta(t) \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)$$

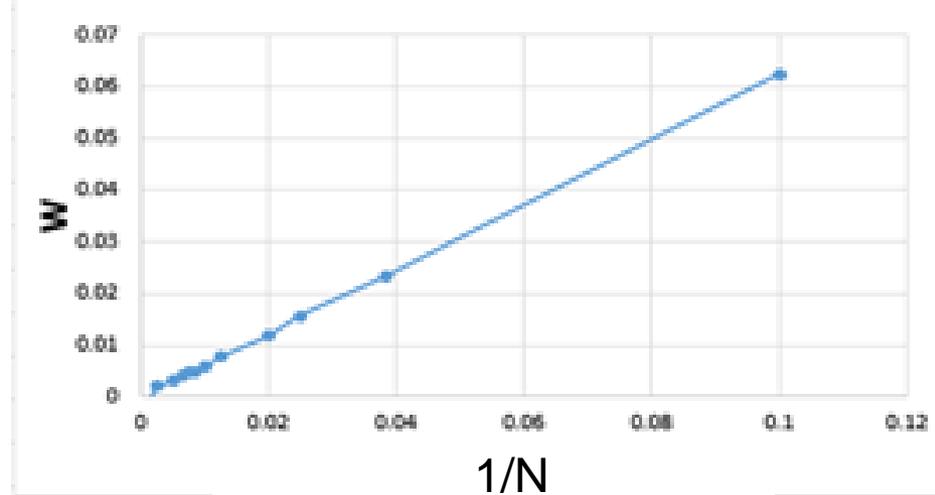
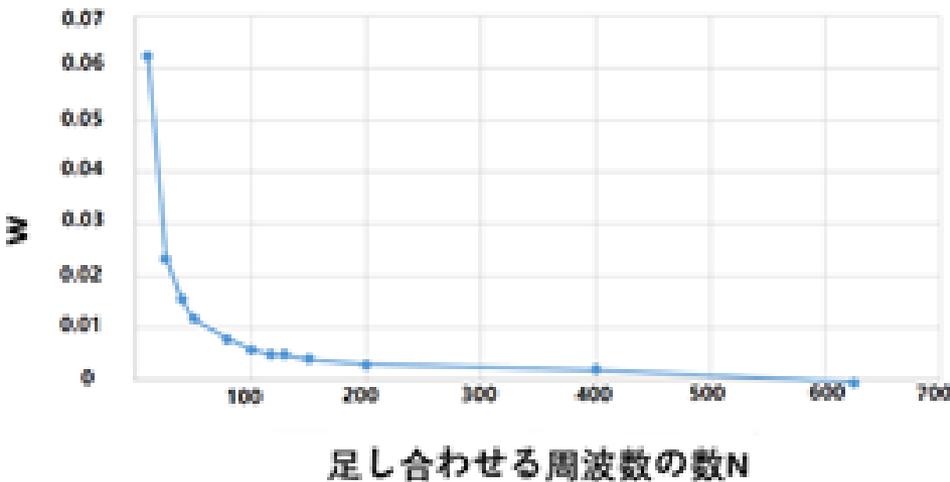
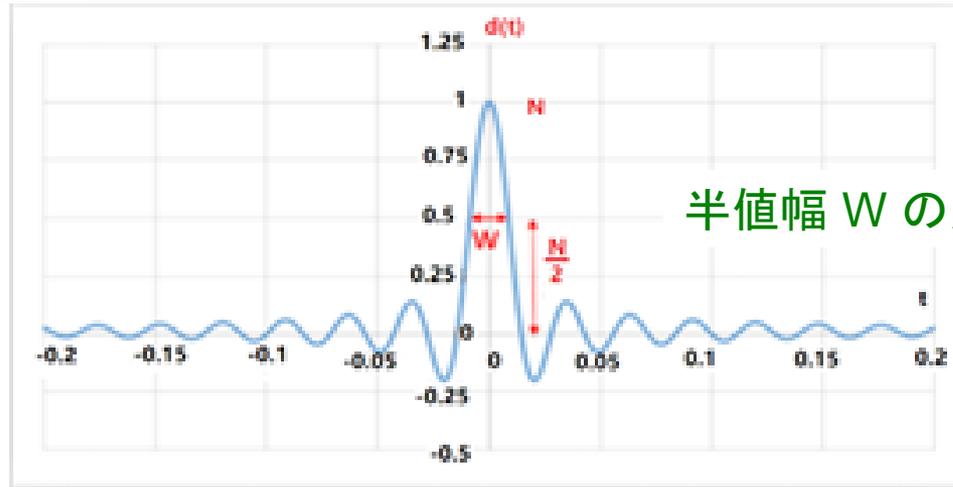
余弦波の和のアニメーション

$$c(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(n\omega_0 t)$$

$\omega_0=1.0$, $N=2000$ でアニメーション

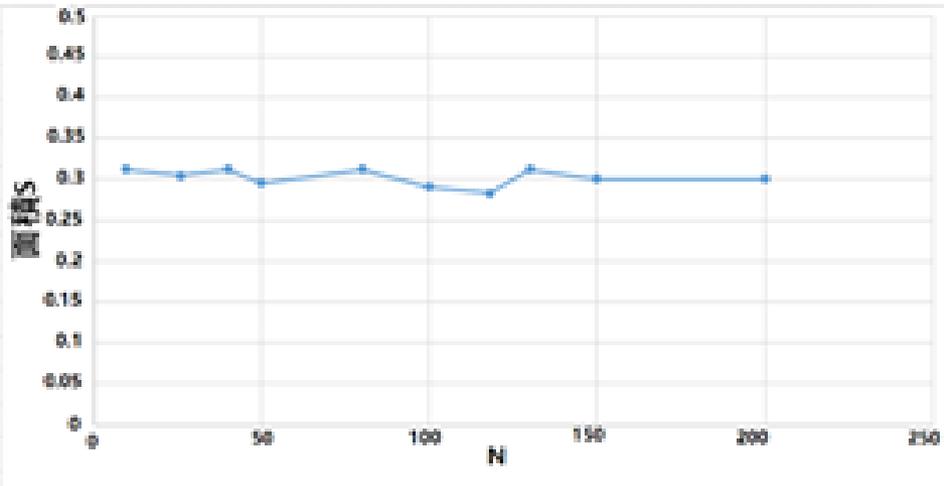


N個の余弦波の和と半値幅Wの関係

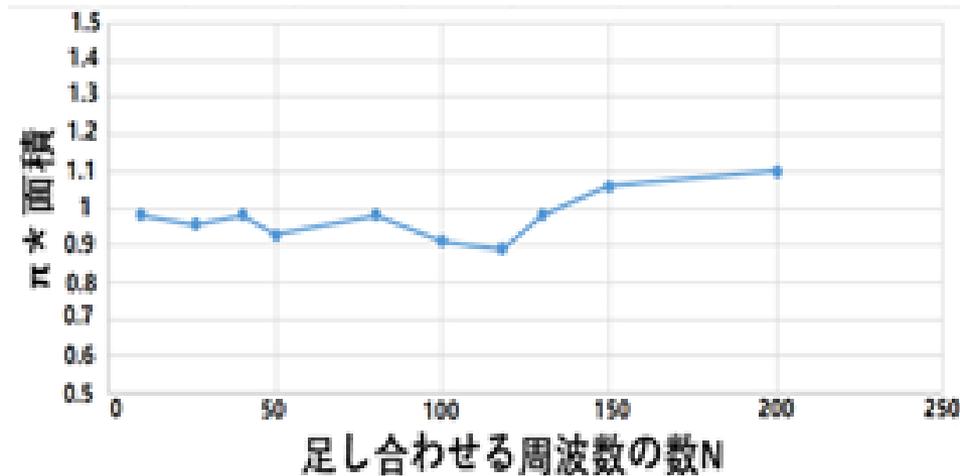


W と N は反比例、 W と $1/N$ は正比例関係

インパルス部分の面積SとN



d(t)の面積SとNとの関係



「π・面積S」とNとの関係

d(t) のインパルス部分の面積S を(1/2) N・W と近似

➡ $S \doteq 1/\pi$ (一定)

信号の周波数と時間の不確定性関係

「周波数領域での広がり(N)が大きいと

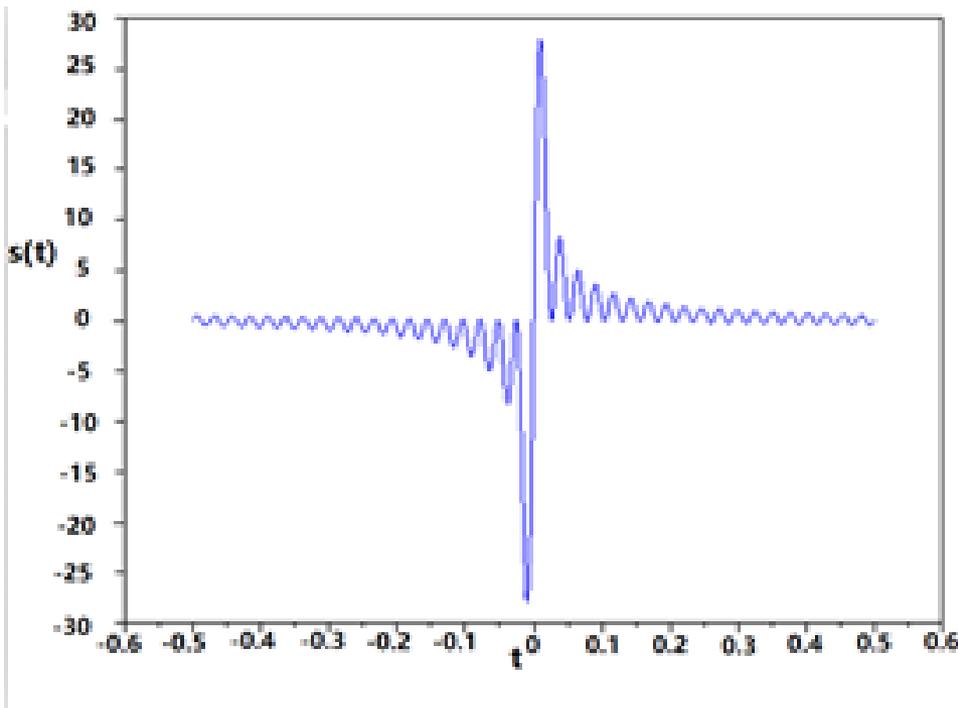
時間波形の広がり(W)を小さくできる」で説明できる

OUTLINE

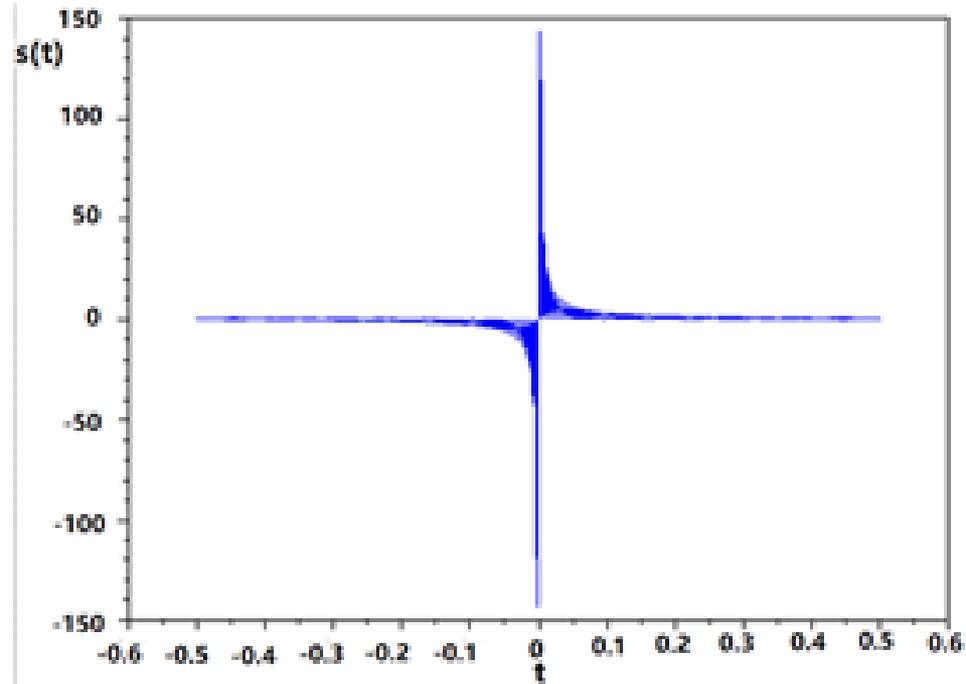
- 研究背景・目的
- 余弦波の和の性質
- 正弦波の和の性質
- 余弦波、正弦波の和の工学設計応用
- 初期位相がゼロでない余弦波の和
- まとめ

正弦波の和と $1/(\pi \cdot t)$ への収束

$$s(t) = \sum_{n=1}^N \sin(n\omega_0 t) \quad \longrightarrow \quad 1/(\pi \cdot t)$$



N=38個の正弦波の和

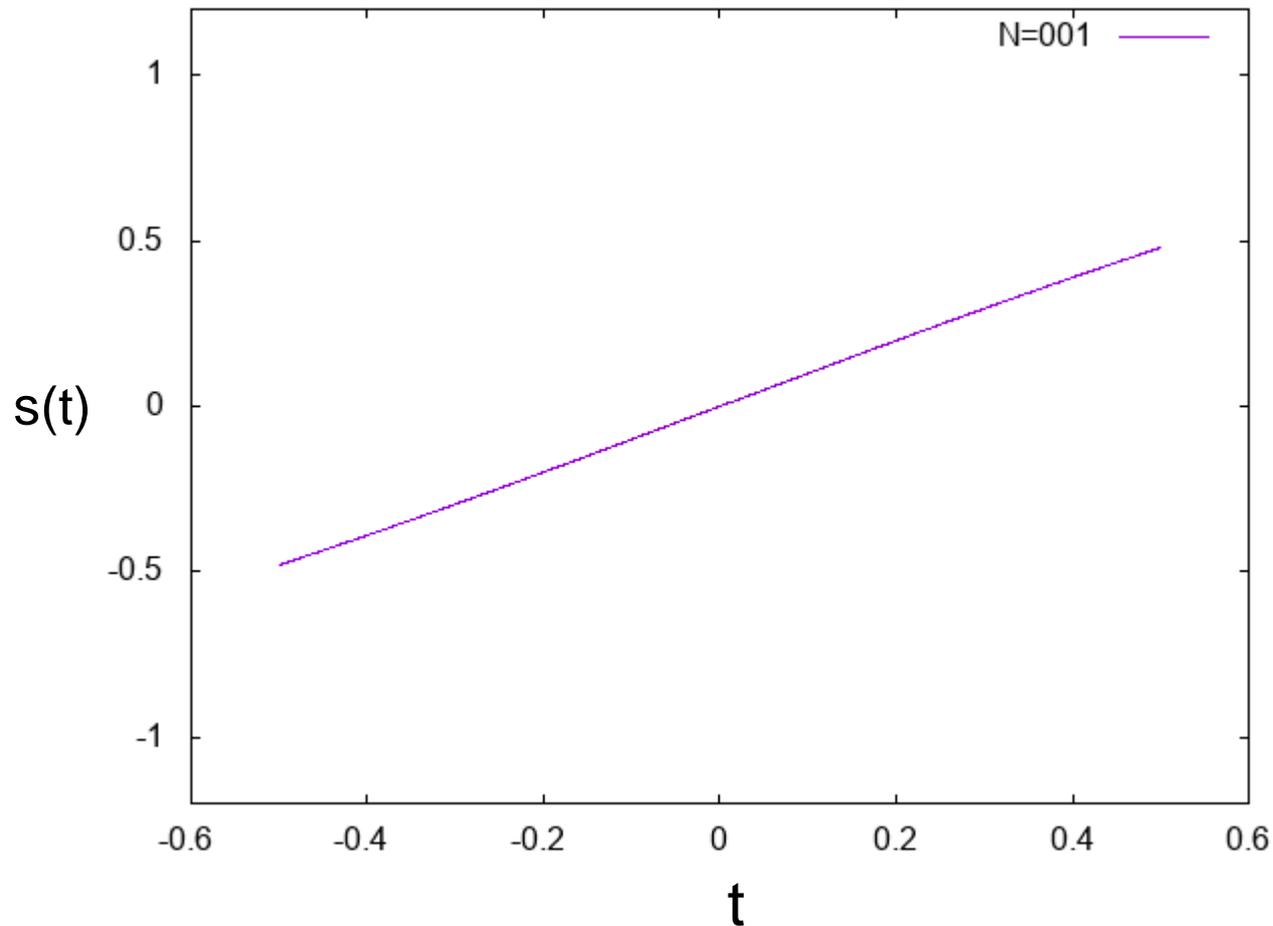


N=198個の正弦波の和

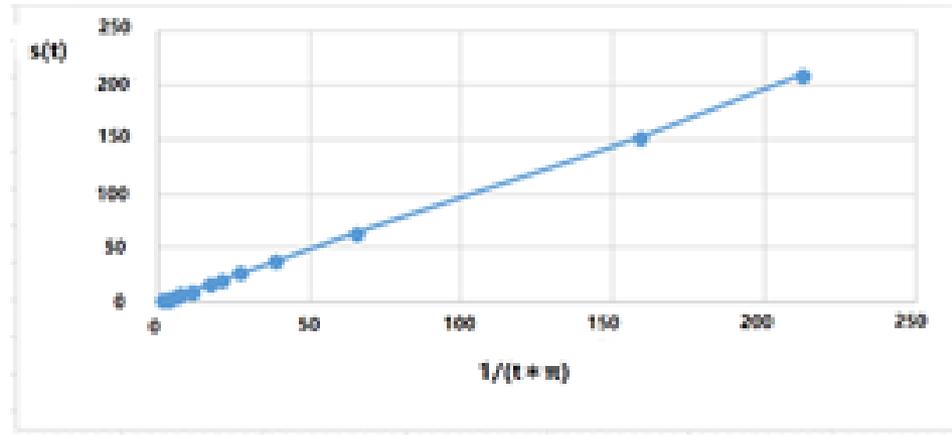
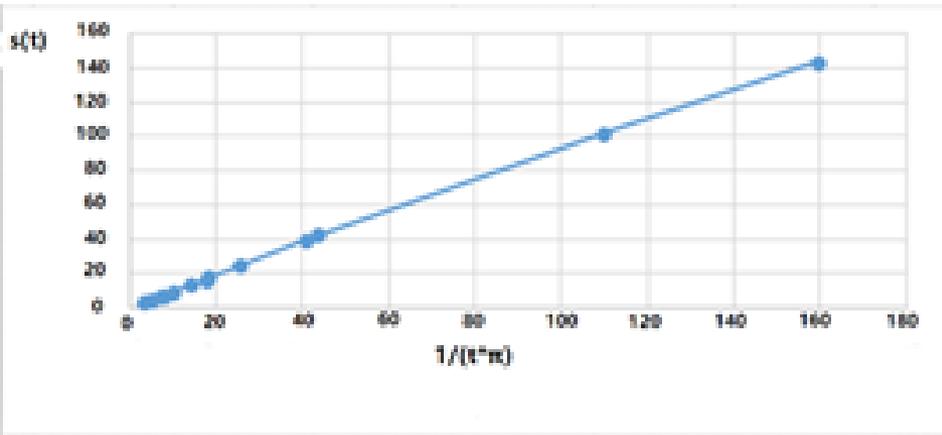
正弦波の和のアニメーション

$$s(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin(n\omega_0 t)$$

$\omega_0=1.0$, $N=2000$ でアニメーション



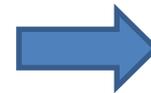
$s(t)$ と $1/(t \cdot \pi)$ の関係



N=198の時: $s(t)$ と $1/(t \cdot \pi)$ の関係

N=298の時: $s(t)$ と $1/(t \cdot \pi)$ の関係

$$s(t) = \sum_{n=1}^N \sin(n\omega_0 t)$$



$1/(\pi \cdot t)$ に収束

数学公式の導出

$$\frac{1}{2\pi t} = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) d\omega$$



t で積分

$t > 0$ のとき

C : 積分定数

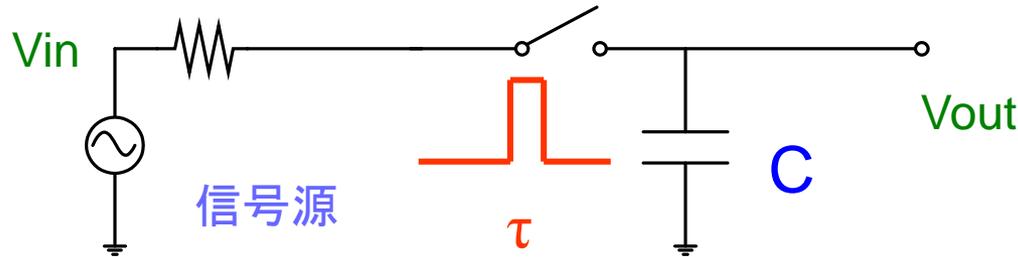
$$\frac{\ln(t)}{2\pi} = -\int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) d\omega + C$$

新しい(?) 数学公式

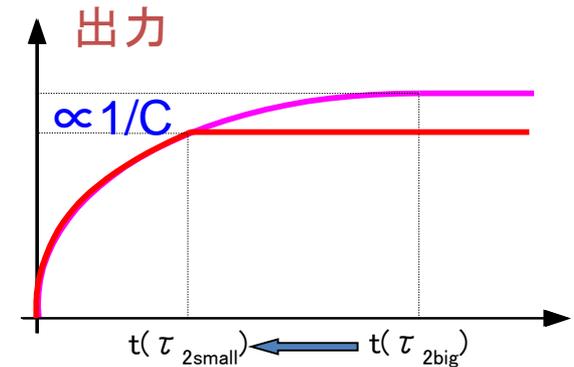
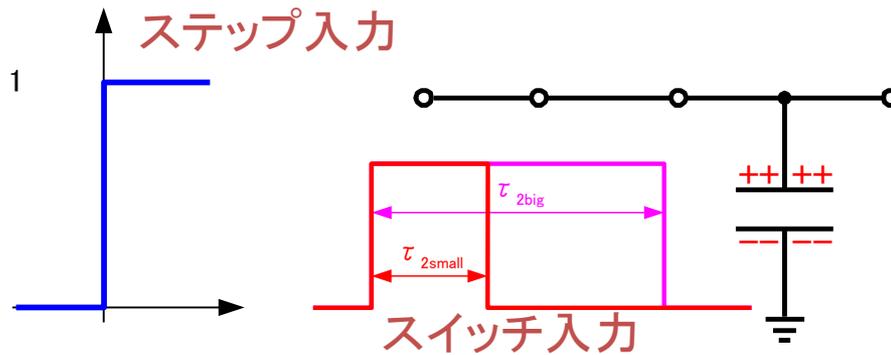
OUTLINE

- 研究背景・目的
- 余弦波の和の性質
- 正弦波の和の性質
- 余弦波、正弦波の和の工学設計応用
- 初期位相がゼロでない余弦波の和
- まとめ

インパルスサンプリング回路とパルス幅



サンプリング・オシロスコープ

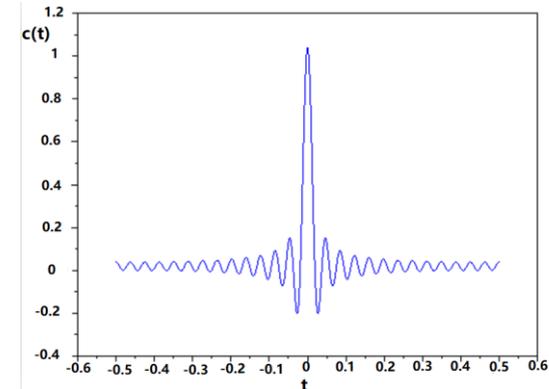


パルス幅 τ : 短 \Rightarrow 出力: 素早く定まる (帯域: 広)

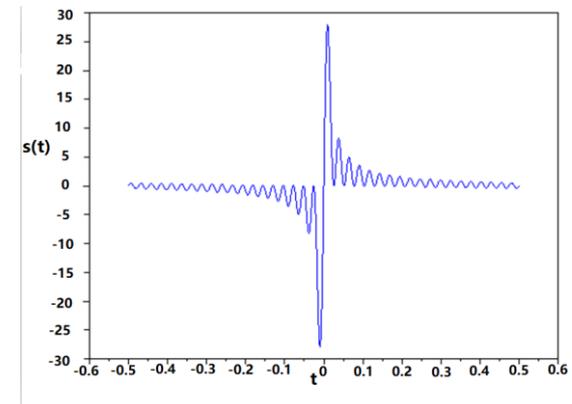
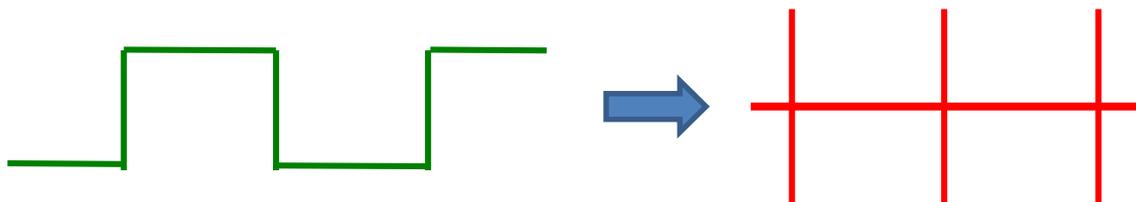
広帯域サンプリング実現のため
 複数余弦波の和で 狭い幅のパルス生成

フィルタ設計への応用

- 余弦波のN個の和でフィルタ設計
メキシカンハットフィルタ
コントラスト強調等を使用

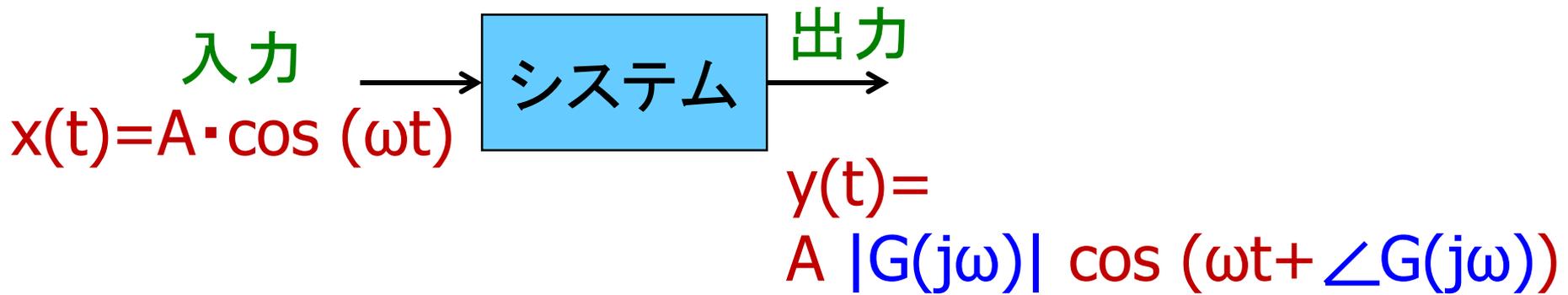


- 正弦波のN個の和でフィルタ設計
エッジ検出等を使用



周波数応答法と周波数伝達関数

安定な線形・時不変システム



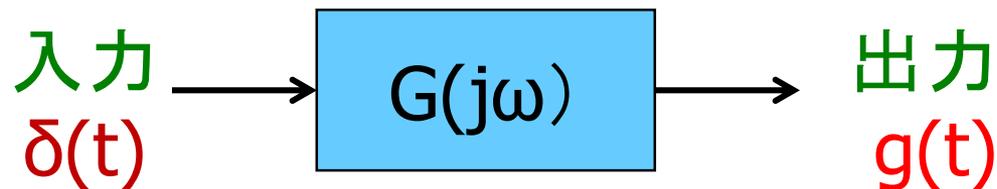
余弦波を入力し十分時間が経つと、出力 $y(t)$ は余弦波となる。

周波数伝達関数

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot \exp(j \angle G(j\omega))$$

インパルス応答と周波数応答

安定な線形時不変動的システムの
周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は
インパルス応答 $g(t)$ のFourier変換



$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

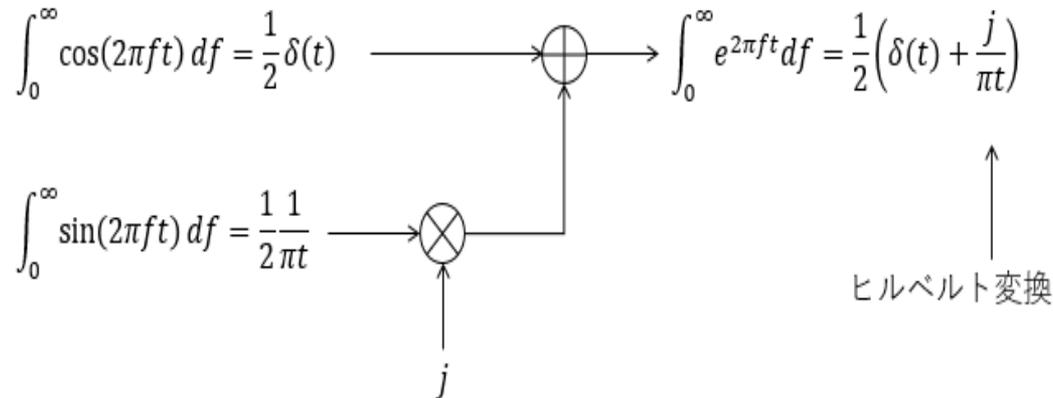


ヨセフ・フーリエ
フランス
1768-1830

証明に使用

$$\delta(t) \doteq \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)$$

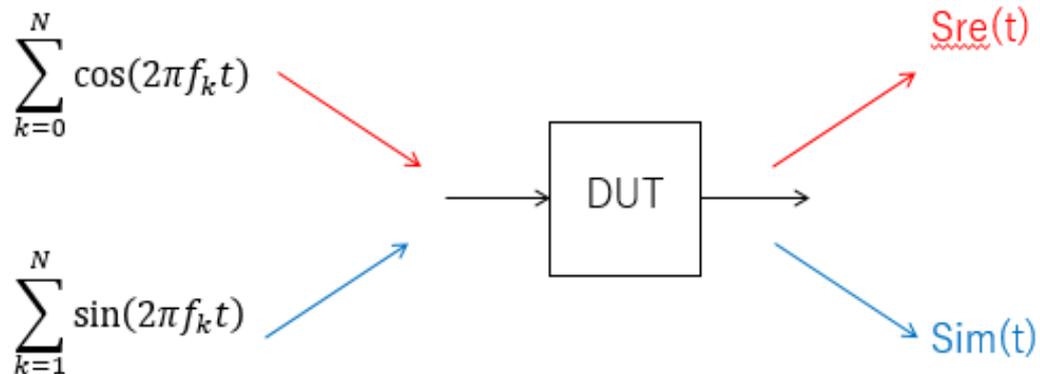
ヒルベルト変換との関係



複素インパルス信号とヒルベルト変換



David Hilbert
ドイツ
1862-1942

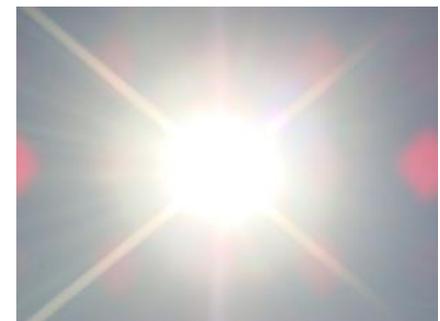


複素信号回路のインパルス応答測定

OUTLINE

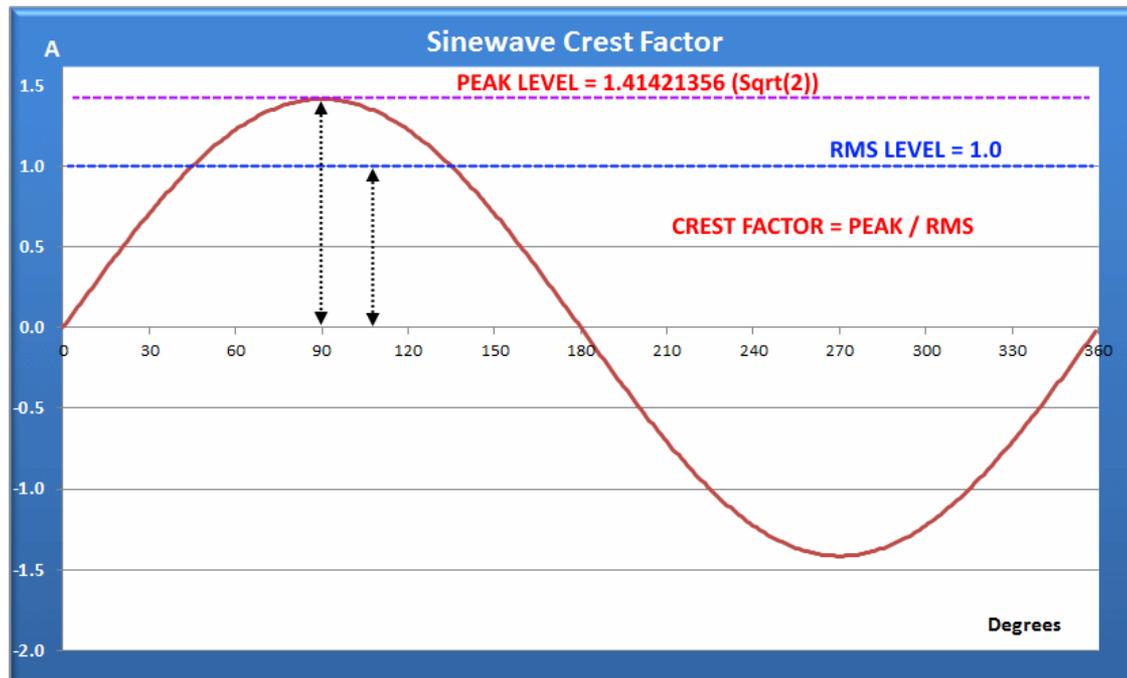
- 研究背景・目的
- 余弦波の和の性質
- 正弦波の和の性質
- 余弦波、正弦波の和の工学設計応用
- 初期位相がゼロでない余弦波の和
- まとめ

位相がランダムの場合
⇒ 白色光



クレストファクタ の定義

- クレストファクタ (Crest Factor):
波形のピーク値と実効値の比で定義
波高率とも呼ばれる



正弦波:
クレストファクタ $\sqrt{2}$

方形波:
クレストファクタ 1

クレストファクタ低減の意義

クレストファクタが大きな波形

- 過剰なピーク電流により電源電圧が歪む



- 内部回路が最大動作範囲をオーバー



- 測定において無視できない誤差が生じる



それを防ぐために

- クレストファクタ値を低減して、
ピーク値と実効値の値を近づける

クレストファクタ低減の意義(続き)

任意波形発生器

(Waveform Memory + DA変換器)の

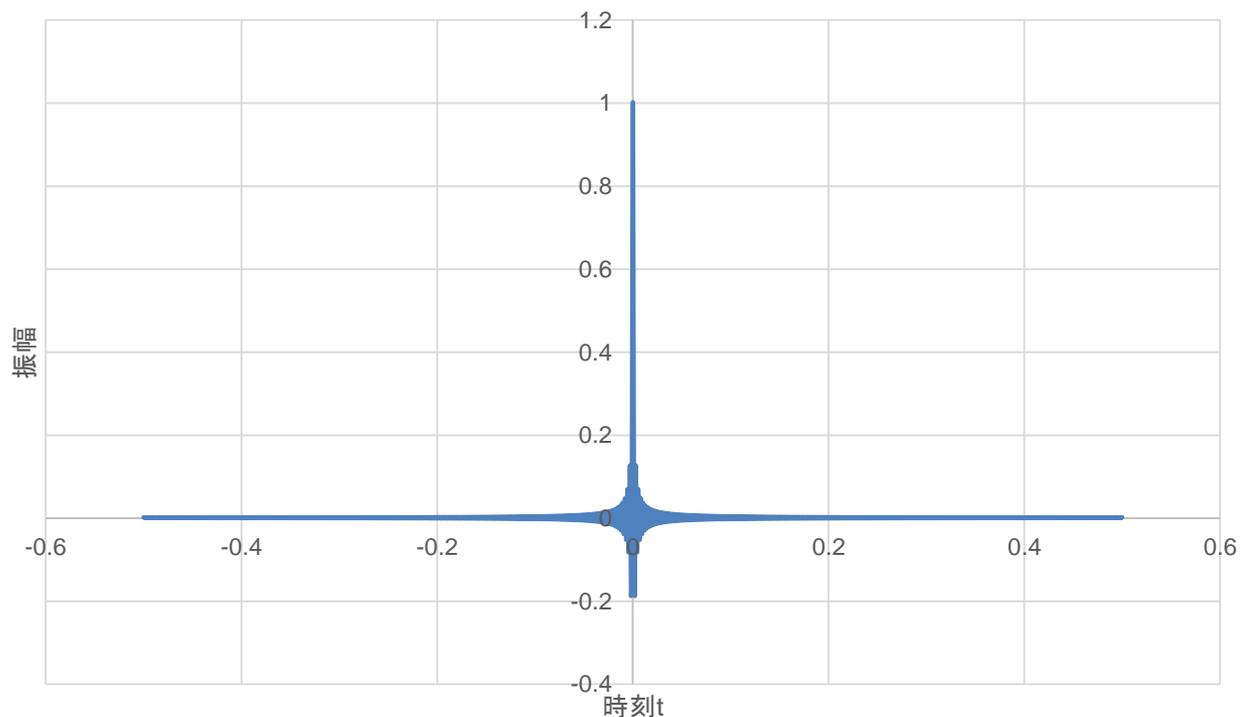
信号生成回路で、

DA変換器のビット数の有効利用ができる

余弦波の和： クレストファクタ最大

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

- $\phi_k = 0$ 、 $N=400$ のとき



クレストファクタ 最小化アルゴリズム

- $\phi_k = 0$ のときcos波の和の振幅が最大に

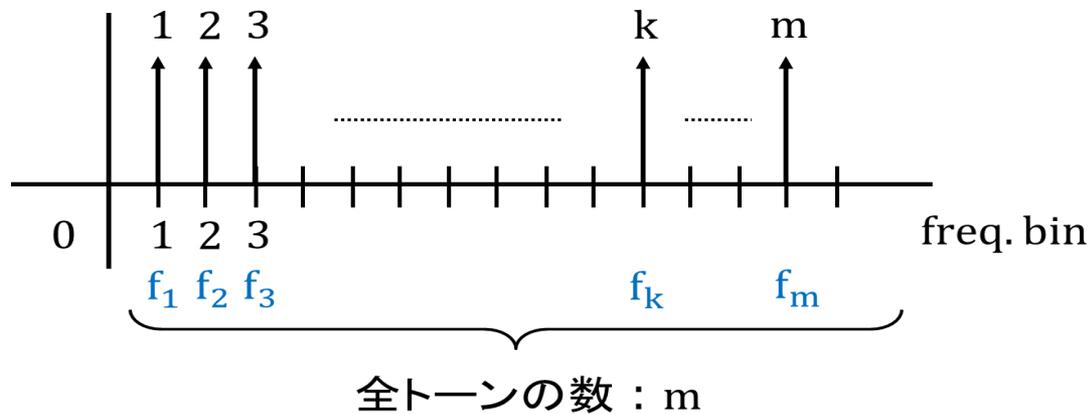


- クレストファクタを最小化



- ϕ_k を変更することで
マルチトーン信号振幅を最小化

Kitayoshi のクレストファクタ 最小アルゴリズム



$$\phi_k = \phi_0 - \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^k j$$

$$s(t) = \sum_{j=1}^m \sin\left(2\pi \frac{f_j}{N} t + \phi_j\right)$$

- [1] H. Kitayoshi, S. Sumida, K. Shirakawa and S. Takeshita,
 “DSP Synthesized Signal Source for Analog Testing Stimulus and New Test Method”,
 Proc. International Test Conference, pp.825-834, 1985.

今回設定した値

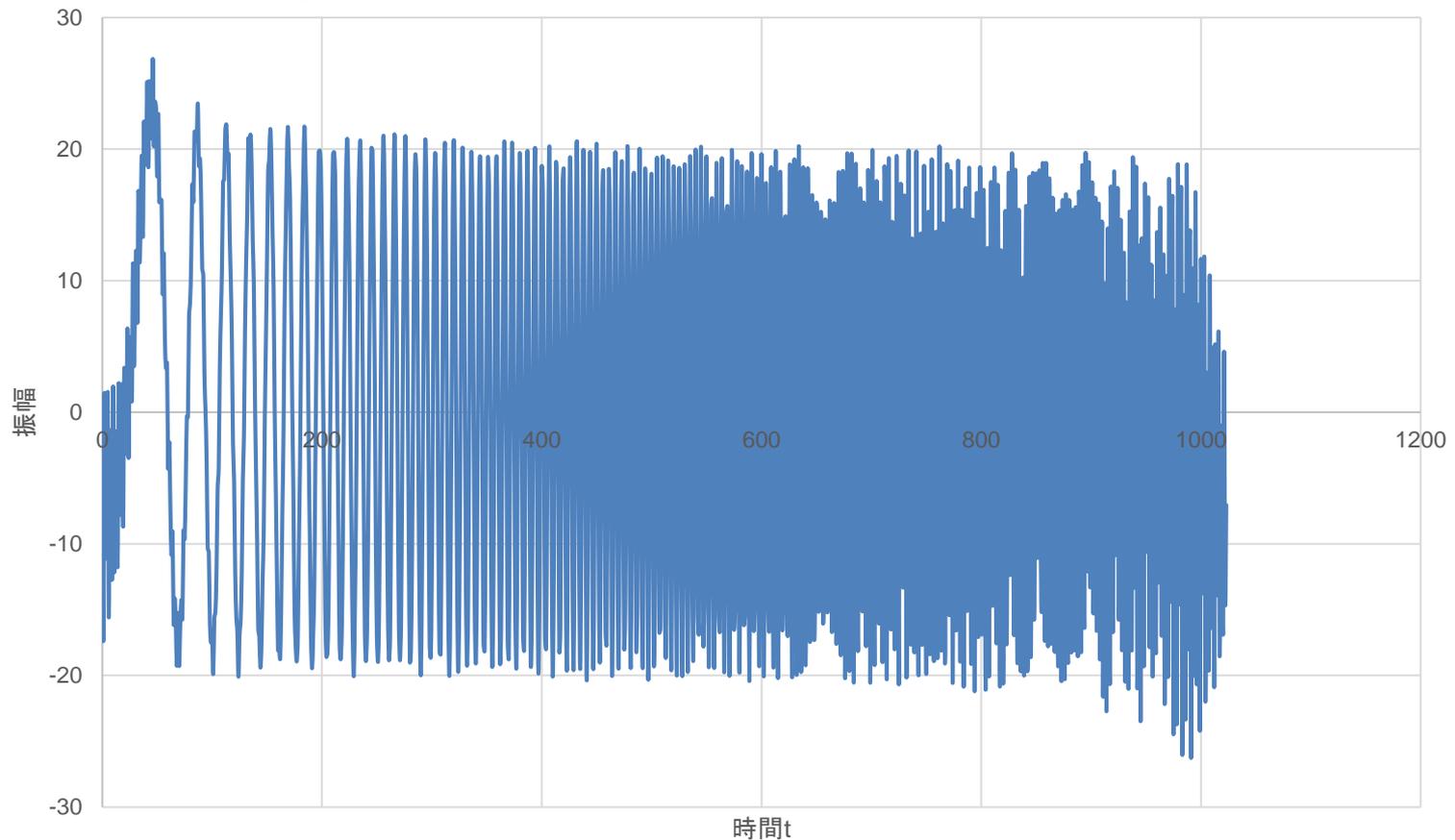
$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0 = 0, m = 400 \\ f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, \dots \\ \text{時刻} t \text{は } 0 \sim 1023[\text{s}] \end{array} \right.$$

シミュレーションする式

$$s(t) = \sum_{j=1}^{400} \sin\left(2\pi \frac{f_j}{1024} t - \frac{2\pi}{400} \sum_{k=1}^j k\right)$$

シミュレーション結果

$$s(t) = \sum_{j=1}^{400} \sin\left(2\pi \frac{f_j}{1024} t - \frac{2\pi}{400} \sum_{k=1}^j k\right)$$



Kitayoshi アルゴリズムでのクレストファクタ

- **最大値**: 26.8441
- **実効値 (RMS)**:

$$\sqrt{\frac{1}{1024} \sum_{j=1}^{1024} x_j^2} = 14.1421$$

- Crest Factor = **最大値** / **実効値**:
$$\frac{26.8441}{14.1421} = 1.8981653 \dots \approx 1.90$$

参考: 位相を最小化アルゴリズムを用いずにランダムにすると
Crest Factor 3~4 程度

OUTLINE

- 研究背景・目的
- 余弦波の和の性質
- 正弦波の和の性質
- 余弦波、正弦波の和の工学設計応用
- 初期位相がゼロでない余弦波の和
- まとめ

まとめ

下記を議論した。

- 余弦波マルチトーン信号
 - デルタ関数に収束
 - 幅が狭いサンプリングパルス生成
 - メキシカンハットフィルタ設計
 - インパルス応答と周波数応答の関係
- 正弦波マルチトーン信号
 - $1/(\pi \cdot t)$ に収束
 - エッジ検出フィルタ設計
- 複素インパルス信号生成
- クレストファクタ最小化アルゴリズム検証

物理現象・工学システムと波

クリスティアーン・ホイヘンス (オランダ 1629-1695)

ホイヘンスの原理
光の波動説
振り子時計の発明



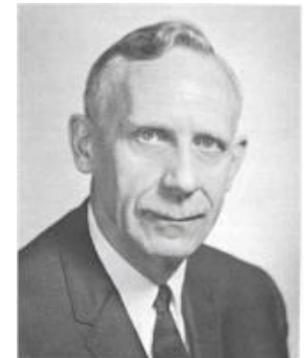
ルイ・ド・ブロイ (フランス 1892-1987)

物質波の提唱



ヘンドリック・ボード (オランダ 1905 - 1982)

ボード線図 (ゲイン線図、位相線図)
周波数応答法



波で考えると明確になる