ETG18-47 第 8 回 電気学会東京支部 栃木・群馬支所 合同研究発表会
ETT18-47 於 群馬大学　桐生キャンパス 2018 年 3 月 1 日(木), 2 日(金)

余弦波マルチトーン信号，正弦波マルチトーン信号の性質と工学設計への応用

八田朱美　　杜 遠洋　　柴崎有祈子　浅見幸司（群馬大）
久保和良（小山高専）　桑名杏奈　小林春夫（群馬大）

概要：余弦波マルチトーン信号，正弦波マルチトーン信号のいくつかの性質をシミュレーションと理論解析で考察した．さらにこれらの回路システム設計，フィルタ設計，複素入出力システムのインパルス応答測定のための入力等への応用を検討したので報告する．

キーワード：　余弦波，正弦波，マルチトーン，インパルス信号，ヒルベルト変換
(Cosine wave, Sine wave, Multi-tone signal, Impulse signal, Hilbert Transform)

1.　研究背景と研究目的

余弦波，正弦波は電気的に発生しやすく，理論解析にも有用であるので，回路システムの設計・解析に広く用いられる．ここでは特に多くの異なる周波数の余弦波および正弦波の和の信号について性質を調べ，その応用について考察したので報告する．

2.　余弦波の和

<2.1> 余弦波の和とデルタ関数

多くの異なる周波数の余弦波（位相 0，振幅 1）は次式のインパルス信号（デルタ関数）で近似できる．

$$\delta(\mathrm{t}) \fallingdotseq \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)$$

これを（無限個ではなく）有限個 2N+1 の加算の場合の信号の性質を考える．

$$\mathrm{c(t)} = \frac{1}{2N+1} \sum_{\mathrm{n}=-\mathrm{N}}^{N} \cos(n\omega_0 t)$$

図 1 に N=26，図 2 に N=626 の場合を示す．

$$\mathrm{d(t)} = (2\mathrm{N}+1) \cdot \mathrm{c(t)} = \sum_{\mathrm{n}=-\mathrm{N}}^{N} \cos(n\omega_0 t)$$

d(0) = 2N+1 がデルタ関数に収束することが推定できる．なお、 厳密には d(t) は離散的な周波数の和であるので、周期的なデルタ関数になる．

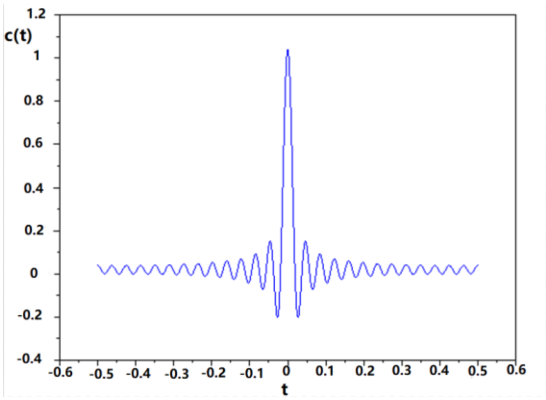


図 1　N=26 個の余弦波の和

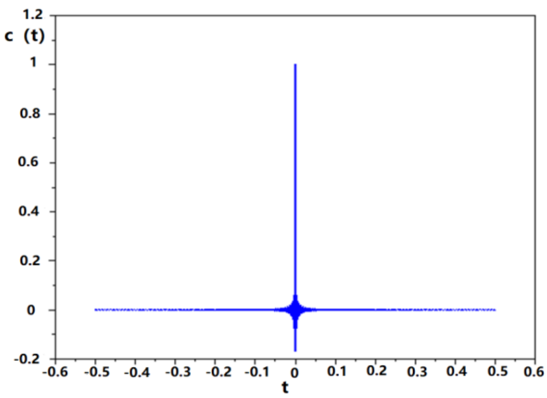


図 2　N=626 個の余弦波の和

<2.2> N 個の余弦波の和と半値幅 W の関係

図 3 に半値幅 W の定義を示す.

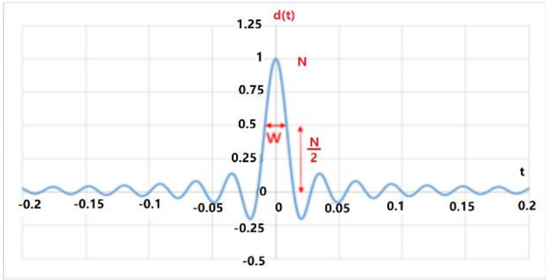


図 3 半値幅 W の定義

d(t) の数値計算で求めた半値幅 W と N との関係を図 4 に, W と 1/N の関係を図 5 に示す. W と 1/N は比例関係にあることがわかる.

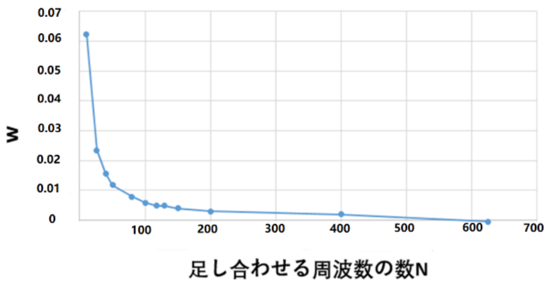


図 4　数値計算で得られた d(t) の半値幅 W と N との関係図

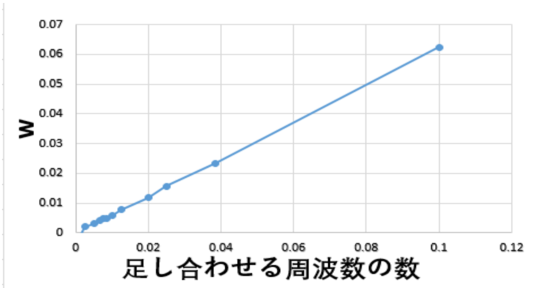


図 5　数値計算で得られた d(t) の半値幅 W と 1/N との関係

d(t) のインパルス部分の面積 s を(1/2) N・W と近似して N との関係を図 6 に　s ・π と N との関係を図 7 に示す. 面積は 1/π になることがわかる. 「周波数領域での広がりが大きいと時間領域の領域が小さくできる」という信号の周波数と時間の広がりの不確定性関係で説明できる. [8,9]

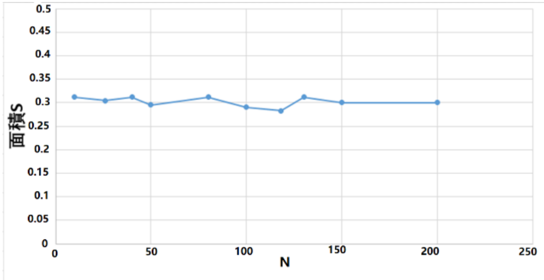


図 6　d(t)の面積 s と N との関係

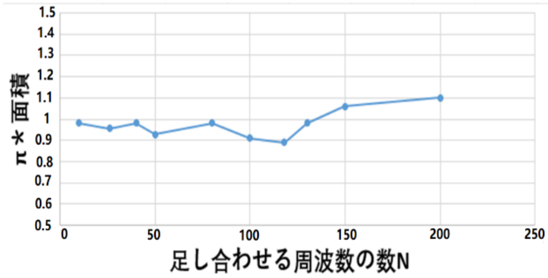


図 7　π・面積 s と N との関係

<2.3> 余弦波の和の回路システム設計解析への応用

— 適切な N を選択すると, インパルス応答がメキシコ帽子の時間フィルタのデジタルフィルタ係数の設計に利用できる.

— サンプルホールド回路[1] のインパルスサンプリングクロック信号を実現する原理になりえる.

— UWB(Ultra Wide Band)通信で時間信号波形がインパルス状の信号であることを説明できる.

— 線形時不変システムで　インパルス入力に対する応答（インパルス応答）のフーリエ変換が周波数伝達関数になることの説明・証明になる. 周波数伝達関数は余弦波入力の出力振幅（利得）と位相の複素表示である.

— d(t) の面積が π に収束することから, π の級数展開の形での計算式が導出できる可能性がある.

3.　正弦波の和

<3.1> 正弦波の和と 1/(π・t) への収束

多くの異なる周波数の正弦波（位相 0, 振幅 1）の有限個 N の加算の場合の信号の性質を考える.

$$\mathrm{s(t)} = \sum_{\mathrm{n=1}}^{N} \sin(n\omega_0 t)$$

図 8 に N=38, 図 9 に N=198 の場合を示す.

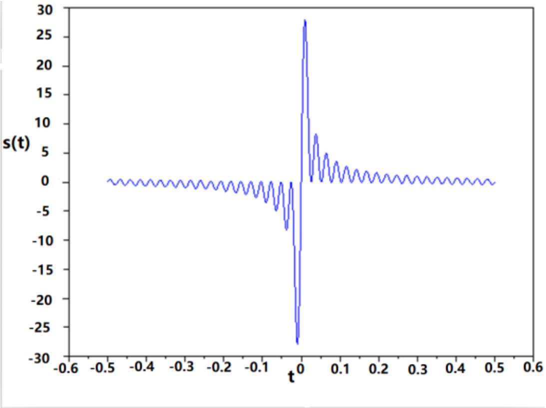


図 8　　N=38 個の正弦波の和

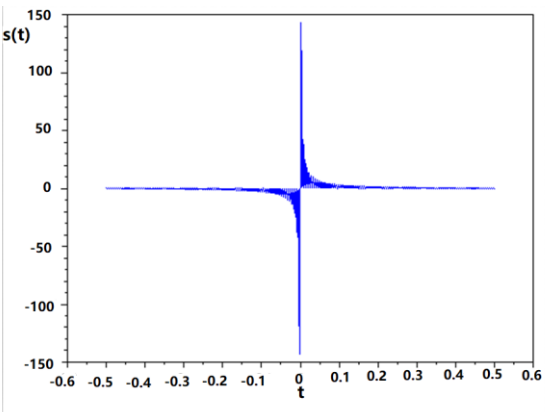


図 9　　N=198 個の正弦波の和

s(t) は 1/(π・t) に収束する. 図 10 に N=198 の時の, 図 11 に N=298 の時の s(t)と 1/(t・π) の数値計算で得られた関係を示す. s(t)と 1/(t・π)はほぼ等しいことがわかる.

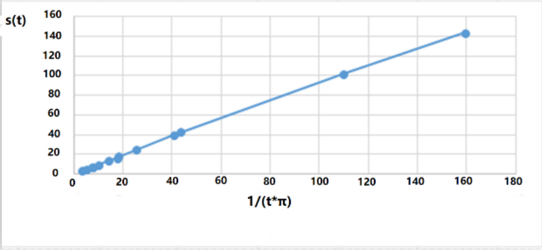


図 10　N=198 の時の s(t)と 1/(t・π)の関係

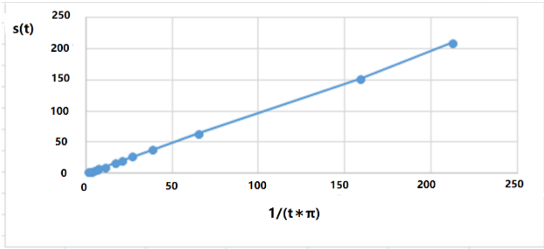


図 11　N=298 の時の s(t)と 1/(t・π) の関係

<3.2> 余弦波の和と正弦波の和の回路システム設計解析への応用

— 実部信号を余弦波の和, 虚部信号を正弦波の和とすることで, 複素インパルス信号を実現できる. （図 12, [2]）

— ヒルベルトフィルタはインパルス応答が長いので高速処理の実用上問題になるとの指摘もある.

— これらを複素信号回路に入力することでその複素インパルス応答を得ることができる.（図 13, [3]）

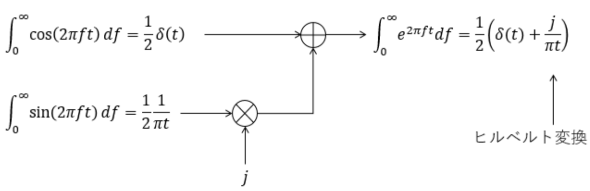


図 12 複素インパルス信号とヒルベルト変換

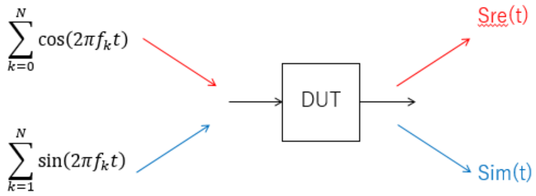


図 13 複素信号回路のインパルス応答測定

4. 初期位相がゼロでない余弦波の和

初期位相がゼロである余弦波の和はインパルス信号になる．一方 適切に初期位相を選択することでクレストファクタ(Crest Factor)を最小にするマルチトーン信号を実現できる．[4-6] これらは電子計測分野で使用される．

[4] のアルゴリズムにしたがって生成したマルチトーン信号例を図 14 に示す．クレストファクタは 1.9 になった．

インパルス信号は各周波数成分で位相がそろいクレストファクタ最大の広帯域信号と考えられる． 一方太陽光（白色光）は各周波数の位相がランダムな広帯域の光信号であり，クレストファクタが小さい信号と解釈できる．

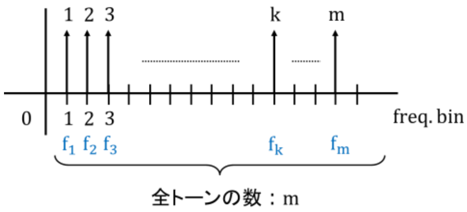
[1-4] のアルゴリズムを用いた場合とランダム位相を用いた場合のクレストファクタ、時間波形の特徴の比較をシミュレーションで明確にしていく．

5. まとめ

余弦波マルチトーン信号，正弦波マルチトーン信号の性質を調べ，回路システム設計解析への応用へを検討した．

参考文献

[1] 上森 将文，小林 謙介，光野 正志，清水 一也，小林 春夫，戸張 勉，「広帯域高精度サンプリング技術」 電子情報通信学会誌 和文誌 C (2007 年 9 月).
[2] Y. Tamura, R. Sekiyama, K. Asami, H. Kobayashi, "RC Polyphase Filter As Complex Analog Hilbert Filter", IEEE 13th International Conference on Solid-State and Integrated Circuit Technology, Hangzhou, China (Oct. 2016).
[3] T. J. Yamaguchi, M. Soma, M. Ishida, T. Watanabe, T. Ohmi, “Extraction of Instantaneous and RMS Sinusoidal Jitter Using an Analytic Signal Method,” IEEE Trans. Circuits and Systems- II (June 2003).
[4] H. Kitayoshi, S. Sumida, K. Shirakawa, S. Takeshita, “DSP Synthesized Signal Source for Analog Testing Stimulus and New Test Method”, International Test Conference (1985).
[5] D. J. Newman, “An L1 Extremal Problem for Polynomials”, Proc. of the American Mathematics Society (Dec. 1965).
[6] M. R. Schroeder, “Synthesis of Low-Peak-Factor Signals and Binary Sequences With Low Autocorrelation”, IEEE Trans. Information Theory (1970).
[7] Y.E.O. エイドリアン（著）久保儀明，蓮見亮（翻訳）π と e の話―数の不思議 青土社（2008 年）
[8] L. Cohen, Time-Frequency Analysis: Their Applications, Printice-Hall (1994)
[9] H. Kobayashi, I. Shimizu, N. Tsukiji, M. Arai, K. Kubo, H. Aoki ,"Fundamental Design Tradeoff and Performance Limitation of Electronic Circuits Based on Uncertainty Relationships," IEEE 12th International Conference on ASIC, Guiyang, China (Oct, 2017).



- $\emptyset_k = \emptyset_0 - \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^{k} j$
- $s(t) = \sum_{k=1}^{m} \sin(2\pi \frac{f_k}{N} t + \emptyset_k)$

– $\emptyset_0 = 0, \mathrm{m} = 400$
– $f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, \cdots$
– 時刻 t は 0~1023[s]

$$f(t) = \sum_{j=1}^{400} \sin(2\pi \frac{f_j}{1024} t - \frac{2\pi}{400} \sum_{k=1}^{j} k)$$

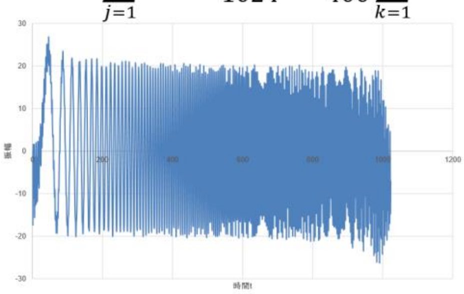


図 14 マルチトーン信号生成シミュレーション結果（アルゴリズム[4] に基づく）