

孫子算経(剰余系)の電子回路設計への応用

Application of Residue Arithmetic to Electronic Circuit Design

阿部 優大, 片山 翔吾, 李 从兵, 小林 春夫

群馬大学大学院 理工学府 電子情報部門

Yudai Abe, Shogo Katayama, Congbing Li, Haruo Kobayashi

Division of Electronics and Informatics, Faculty of Science and Technology, Gunma University

■ 1. はじめに

筆者らは古典数学を電子回路設計に応用する研究を行ってきている。例えば魔方陣をデジタルアナログ変換器の単位回路配列のレイアウト設計アルゴリズムを用いる, フィボナッチ数列を逐次比較近似アナログデジタル変換器の信頼性向上のための冗長設計に用いるなどである。この論文では孫子算経(剰余系アルゴリズム)を信号波形の周波数推定に用いる方式を検討したので報告する。

■ 2. 孫子算経と剰余系

古代中国の数学書「孫子算経」に次の問題が書かれている。

「ある数を 3 で割ると 2 余り, 5 で割ると 3 余り, 7 で割ると 2 余るといふ。その数は何か」

答えは 23 である。この問題を一般化したものが「中国の剰余定理」である。[1, 2, 3]

具体的に上記問題では次のようにして値 23 が求まる。

3 の余り 2 は 70 とおき, 5 の余り 3 は 21 とおき 7 の余り 2 は 15 とおく。

106 以上は 105 を引き, 答えが得られる。

$$K = \text{mod}(3 \times 5 \times 7)[2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15] = \text{mod}(105)(140 + 63 + 30) = \text{mod}(105)233 = 23$$

上記で $21 = 3 \times 7$, $15 = 3 \times 5$ である。しかし $70 = 2 \times 5 \times 7$ でありこの項だけなぜ 2 を掛けるのかは「孫子算経」には記されていない。

これが日本では「百五減算」として伝わった。

一般に剰余系は次のようになる。

互いに素の自然数 2,3,5 を考える。

$$N = 2 \times 3 \times 5 = 30,$$

0 から $N-1(=29)$ までの整数の一つを k とする。

k を 2 で割った余りを m_1 ,

k を 3 で割った余りを m_2 ,

k を 5 で割った余りを m_3 とする。

k と (m_1, m_2, m_3) の組は 1 対 1 に対応する(表 1)。

剰余定理は, (m_1, m_2, m_3) から k を求めるアルゴリズムとなる。

本稿は孫子算経(剰余系)の電子回路設計応用の一つとして, 信号波形を複数サンプリング回路

(各サンプリング周波数は異なる) で入力信号の周波数を推定することを検討したので報告する。

表 1: 自然数 k と剰余表現 (m_1, m_2, m_3) の対応
自然数 k と剰余表現 (m_1, m_2, m_3) は 1 対 1 対応

m_1	m_2	m_3	k
0	0	0	0
1	1	1	1
0	2	2	2
1	0	3	3
0	1	4	4
1	2	0	5
0	0	1	6
1	1	2	7
0	2	3	8
1	0	4	9
0	1	0	10
1	2	1	11
0	0	2	12
1	1	3	13
0	2	4	14
1	0	0	15
0	1	1	16
1	2	2	17
0	0	3	18
1	1	4	19
0	2	0	20
1	0	1	21
0	1	2	22
1	2	3	23
0	0	4	24
1	1	0	25
0	2	1	26
1	0	2	27
0	1	3	28
1	2	4	29

また、「孫子算経」には雉兔同籠 (じとどうりゅう) が書かれている。これは「同じ籠の中に雉と兔がいる。頭の数 は 35 で、足の数 は 94 である。雉、兔それぞれの数は幾らか」の問題である。これが日本に伝わり、1810 年に出版された坂部広胖の著書「算法点竄指南録」では、「雉兔」が「鶴亀」に変化する。「鶴亀合百頭あり、只云足数和して二百七十二、鶴亀各何ほどと問」。これが日本の鶴亀算の原点である。このように「孫子算経」は「和算」に影響を与えている。なお、「孫子算経」は兵法家の二人の孫子「孫武、孫臏」よりずいぶん前の時期に書かれているようで、両者は直接には関係ないようである。

■ 3. 波形のサンプリング

1kHz 正弦波は 1 秒間に 1000 個の山、7kHz 正弦波は 1 秒間に 7000 個の山がある正弦波である。これらを 8kHz でサンプリングを行うと (すなわち 1 秒間に 8000 個のサンプリング点を得ると)、両者のサンプリング点はまったく一致して区別がつかない。

このとき $f_1 = 1\text{kHz}$, $f_2 = 7\text{kHz}$, $f_s = 8\text{kHz}$ とおくと、 $f_1 + f_2 = m f_s$ または $|f_1 - f_2| = n f_s$ (m, n は整数) のとき、この現象が起こる (図 2)。すなわちこの関係があるときに、 f_1, f_2 を f_s でサンプリングすると両者は区別できない。 [4, 5]

高い周波数 f_s でサンプリングを行えばこの問題は生じないが、高周波サンプリング回路実現は難しい。そこで複数の低い周波数でサンプリングを行い、これらの信号を区別する手法を提案する。

■ 4. サンプリング波形の FFT

FFT(高速フーリエ変換) はサンプリングされた信号波形を離散周波数成分に変換する。ナイキスト周波数 (サンプリング周波数 f_s の 2 分の 1) を超える周波数成分が入力されると、スペクトルがナイキスト周波数以下の周波数領域にも現れる (図 2)。また、ナイキスト周波数と左右対称の周波数にも同じスペクトルが生じる。これが折り返し現象である。

サンプリング周波数 (f_s) 7kHz, 入力周波数 (f_{in}) 27kHz で FFT をした波形を図 3 に示す。ナイキスト周波数 3.5kHz 以下の領域内の 1kHz にスペクトルが折り返される。また、ナイキスト周波数と左右対称である 6kHz にもスペクトルが発生する。このスペクトル周波数を入力周波数のサンプリング周波数剰余として利用することを考える。27kHz を 7kHz で割った剰余である 6kHz のスペクトルのみを取り出したい。そこで、1kHz のスペクトル周波数を消去するためにアナログ・ヒルベルトフィルタを利用する。[6]

アナログ・ヒルベルトフィルタである

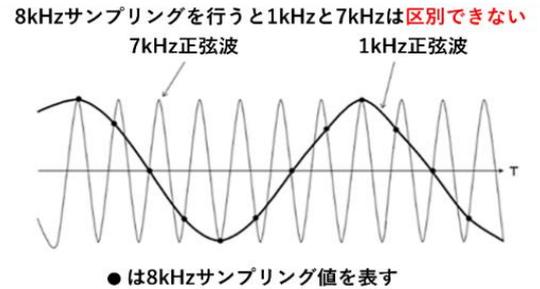


図 1: 波形の 8kHz でのサンプリング

信号 f_a を周波数 f_s でサンプリングすると、 $f_s, 2f_s, 3f_s \dots$ を中心として $f_s \pm f_a, 2f_s \pm f_a \dots$ というイメージがコピーされる

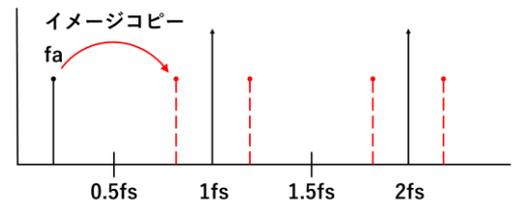


図 2: 波形のサンプリングと周波数スペクトルの折り返し

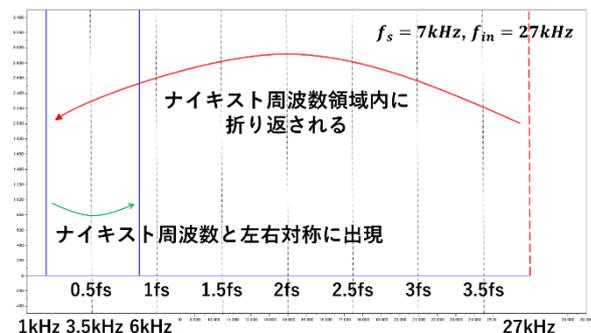


図 3: 高周波信号 $\cos(2\pi f_{in} t)$ のサンプリングと FFT

RC ポリフェーズフィルタは, 単一入力信号から I, Q 信号を生成できる. 出力には位相が 90° 異なった \cos 波, \sin 波が生成される. [2] ここで生成した \cos 波, \sin 波を用いてサンプリングし複素 FFT をすることによって剰余となる周波数を求める. また, 求めた周波数から剰余定理を用いて周波数を推定する.

■ 5. 提案する入力信号周波数推定回路と動作原理

図 4 に周波数推定回路ブロックを示す. 剰余系による周波数推定は次のようになる.

〈5-1〉 剰余周波数の導出

信号周波数 27kHz の $\cos(2\pi f_{in}t)$ を入力とした RC ポリフェーズフィルタで生成した Q 出力の \sin 波に虚数単位「i」をかけた虚信号と考える. 7kHz でサンプリングを行い FFT を行うと, 図 5 が得られる. これは 6kHz のスペクトルとナイキスト周波数を境に左右対称に現れていた 1kHz のスペクトルの正負が反転したスペクトルである. 図 5 と図 3 のスペクトルを足し合わせると図 6 が得られる. すなわちナイキスト周波数を境に左右対称に現れていたスペクトルから, 周波数 6kHz のスペクトルのみを取り出すことができた. したがって, $\cos(2\pi f_{in}t) + i \times \sin(2\pi f_{in}t)$ の複素 FFT を行ない, 剰余の周波数 f_{res} を得ることができる.

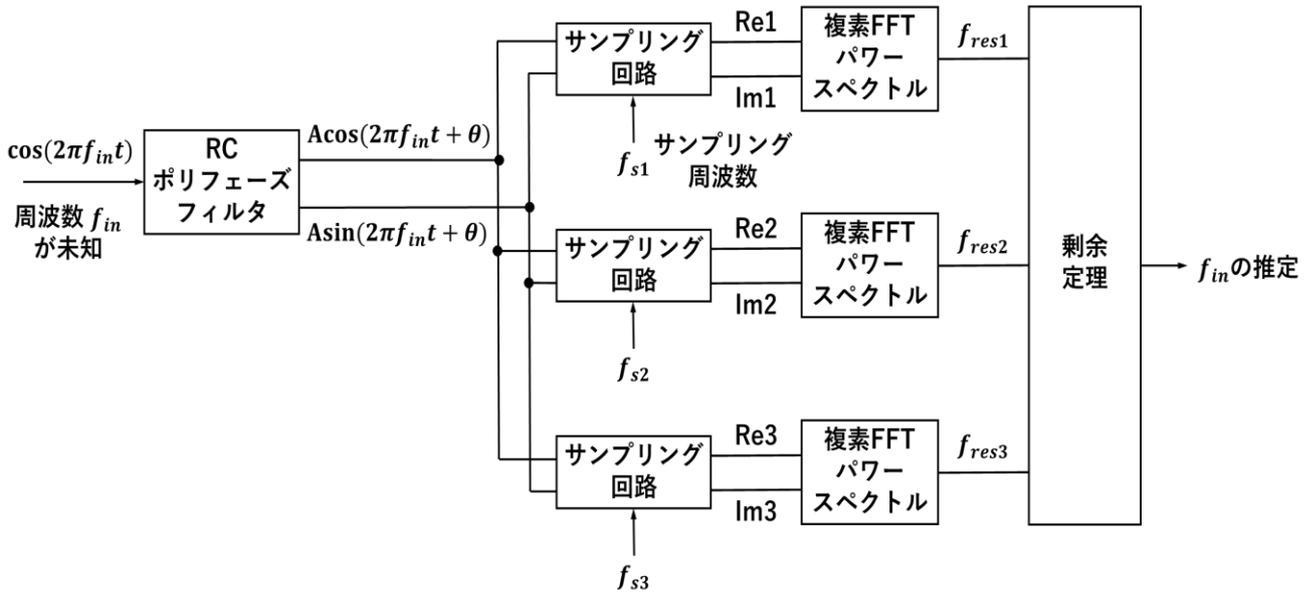


図 4: 提案する周波数推定回路のブロック図

〈5-2〉 剰余定理の利用

RC ポリフェーズフィルタ出力の I, Q 信号に対して, それぞれいくつかの周波数 f_{s1}, f_{s2}, f_{s3} でサンプリングした複素信号を複素 FFT によって求めた剰余を用いて周波数 $f_{res1}, f_{res2}, f_{res3}$ を推定する. ここでは, サンプリング周波数 $f_{s1} = 2\text{kHz}, f_{s2} = 3\text{kHz}, f_{s3} = 5\text{kHz}$ で, 入力周波数 $f_{in} = 13\text{kHz}$ の信号をサンプリングする (図 7). 表 1 の剰余表現を比較する. 図 7 よりサンプリング周波数 $2\text{kHz}, 3\text{kHz}, 5\text{kHz}$ で FFT を行った時のスペクトルは, それぞれ $1\text{kHz}, 1\text{kHz}, 3\text{kHz}$ で現れた. ここで表 1 より, m_1, m_2, m_3 がそれぞれ, $1, 1, 3$ となる自然数 k は 13 である. よって, 入力周波数は 13kHz と求まる. サンプリング周波数 $2\text{kHz}, 3\text{kHz}, 5\text{kHz}$ でサンプリングし, 表 1 を用いることにより, $0\sim 29\text{kHz}$ (1kHz 刻み) の範囲であれば周波数が推定できることが実際に確認した.

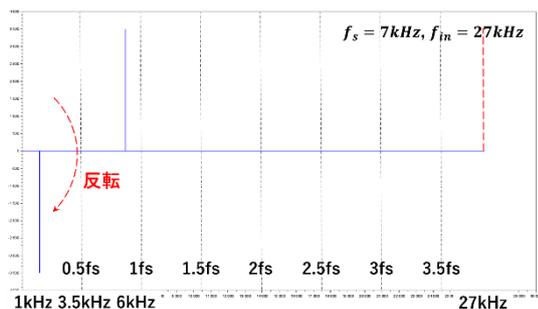


図 5 : $i \times \sin(2\pi f_{in} t)$ の FFT

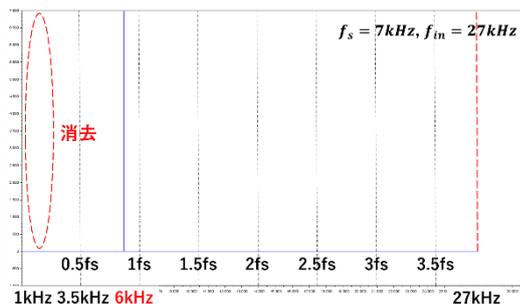


図 6 : $\cos(2\pi f_{in} t) + i \times \sin(2\pi f_{in} t)$ の FFT

(5-3) 入力周波数の推定範囲と周波数分解能

使用する複数のサンプリング周波数が互いに素であれば、サンプリング周波数をかけた値が入力周波数の推定範囲となる。例えば、1GHz 程度まで入力周波数の推定を可能にするためには、サンプリング周波数に 1009Hz, 1013Hz, 1019Hz (互いに素) を選択すればよい。サンプリング周波数をかけると、 $1009 \times 1013 \times 1019 = 1041537223$ となるので 0~1041537222Hz まで入力周波数の推定が可能となる。よって、使用するサンプリング周波数の個数を多くするか、サンプリング周波数自体を大きくすることで推定範囲を広げることが可能である。

この場合は最小分解能周波数を 1Hz としたが、任意の周波数分解能を設定することも可能である。この手法の問題点として測定した剰余周波数に誤差がある場合には大きく異なる周波数が推定されてしまうことである。

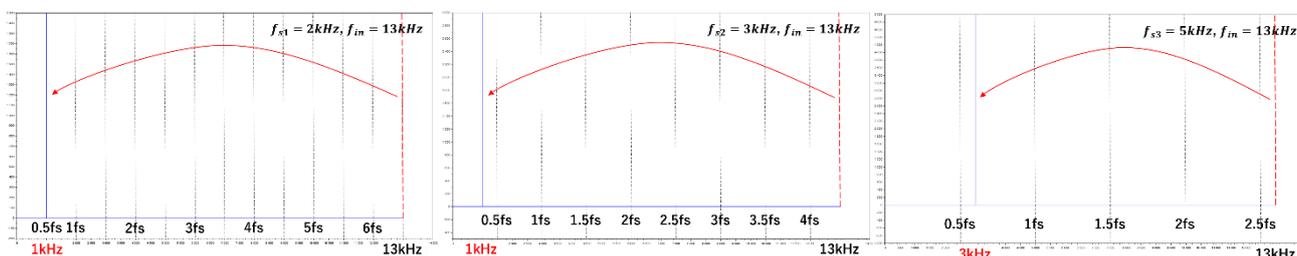


図 7 : $f_{in} = 13\text{kHz}$ 信号の $f_{s1} = 2\text{kHz}$, $f_{s2} = 3\text{kHz}$, $f_{s3} = 5\text{kHz}$ でのサンプリング, FFT

6. まとめ

高周波信号を低周波サンプリングしその周波数を推定する回路として、その高周波信号を入力とする RC ポリフェーズフィルタで生成した sin 波, cos 波を用いて、いくつかの互いに素の低周波数でサンプリングし複素 FFT することによって各剰余周波数を求め、そこから剰余定理を用いることで元の信号の周波数が推定する方式を提案し、その動作を理論・シミュレーションにて確認した。

【参考文献】

- (1) 城地茂「和算の再発見 東洋で生まれたもう一つの数学」DOJIN 選書 (2014 年)
- (2) 和算研究所「現代語『塵劫記』」(2000 年 7 月)
- (3) 桜井進「夢中になる! 江戸の数学」集英社 (2013 年)
- (4) 三谷政昭「やり直しのための信号数学」CQ 出版社 (2004 年 11 月)
- (5) 貴家仁志「デジタル信号処理」昭晃堂 (1997 年 6 月)
- (6) 田村善郎, 関山燎, 浅見幸司, 小林春夫「複素アナログ・ヒルベルトフィルタとしての RC ポリフェーズフィルタの特性」電気学会 電子回路研究会, ECT-16-046, 鶴岡 (2016 年 6 月 9 日)。