

孫子算經(剰余系)の 電子回路設計への応用

阿部優大 片山翔吾 李 从兵 小林春夫

群馬大学 理工学部 電子情報理工学科

アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

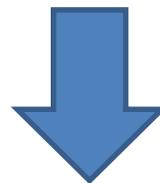
研究目的・目標

研究目標: 高周波信号の簡易な周波数推定回路の実現

取扱い難

複数低周波サンプリング回路

高い周波数でサンプリング
スペクトルの折り返し: 発生しない
高周波サンプリング回路実現: 難



剰余系を利用

複数の低周波数サンプリング回路



スペクトルの折り返しから周波数推定

アウトライン

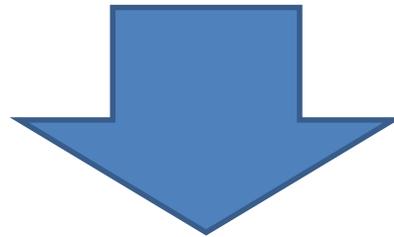
- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

中国の剰余定理

- 中国の算術書『孫子算経』

「3で割ると2余り、5で割ると3余り、7で割ると2余る数は何か」

一般化



中国の剰余定理

答え 23



孫子算経

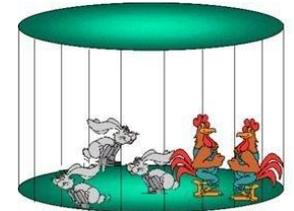
孫子算經

- 「3で割ると2余り、5で割ると3余り、
7で割ると2余る数は何か」 答え 23
➡ 一般化したのが「**中国人の剰余定理**」。

- **鶏兔同籠(けいとどうりゅう)**

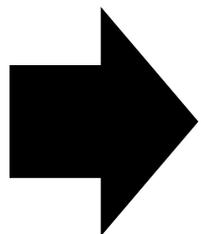
「キジとウサギが同じ籠(かご)。頭が35個
足は94本。キジ、ウサギはそれぞれいくらか。」

➡ 日本に入ってきて「**鶴亀算**」となる



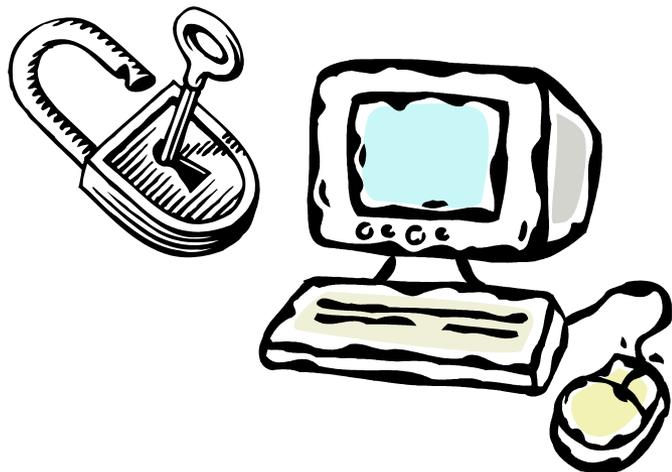
中国の剰余定理の集積回路への応用

- ✓ 江戸時代、「百五減算」として伝来
- ✓ 現在、情報セキュリティの暗号化に応用



古典数学によるイノベーション

集積回路に応用



関孝和

剰余系の例

基数 2, 3, 5 互いに素

$$N=2 \times 3 \times 5 = 30$$

0から $N-1(=29)$ までの整数の一つを k

a: k を2で割った余り $a = \text{mod}_2(k)$

b: k を3で割った余り $b = \text{mod}_3(k)$

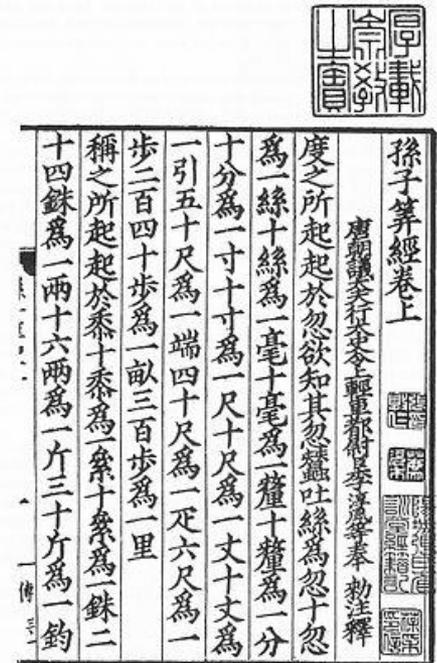
c: k を5で割った余り $c = \text{mod}_5(k)$

k と (a, b, c) の組は1対1に対応する。

k を (a, b, c) で表現  剰余表現

中国人の剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)

(a, b, c) から k を求めるアルゴリズム



剰余定理の例

基数 2, 3, 5 互いに素

$$N=2 \times 3 \times 5 = 30$$

0からN-1(=29) までの整数の一つを k

a: kを2 で割った余り $a = \text{mod}2(k)$

b: k を3で割った余り $b = \text{mod}3(k)$

c: k を5 で割った余り $c = \text{mod}5(k)$

k と (a, b, c) の組は1対1に対応する。

k を (a, b, c) で表現  剰余表現

a	b	c	k
0	0	0	0
1	1	1	1
0	2	2	2
1	0	3	3
0	1	4	4
1	2	0	5
0	0	1	6
1	1	2	7
0	2	3	8
1	0	4	9
0	1	0	10
1	2	1	11
0	0	2	12
1	1	3	13
0	2	4	14

a	b	c	k
1	0	0	15
0	1	1	16
1	2	2	17
0	0	3	18
1	1	4	19
0	2	0	20
1	0	1	21
0	1	2	22
1	2	3	23
0	0	4	24
1	1	0	25
0	2	1	26
1	0	2	27
0	1	3	28
1	2	4	29

剰余定理 (Chinese Remainder Theorem)

(a, b, c) から k を求めるアルゴリズム

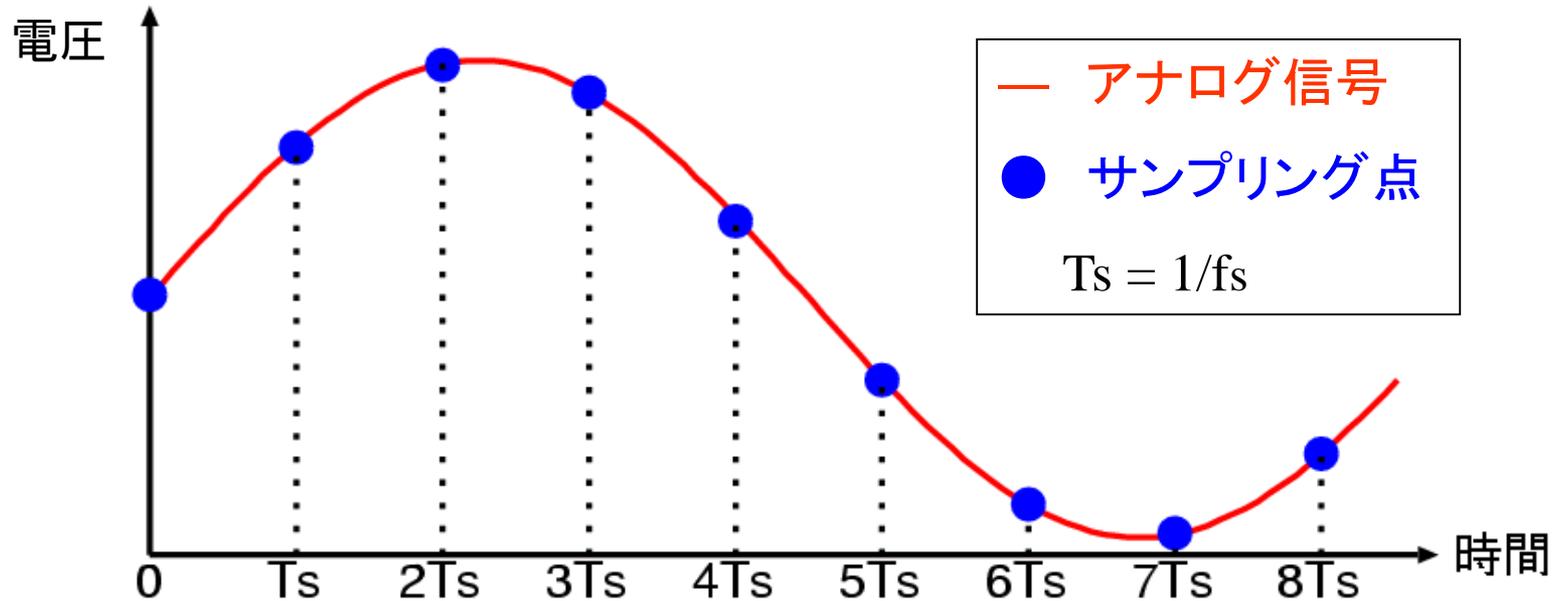
剰余定理は、

この問題を他の整数についても適用できるように一般化したもの。

アウトライン

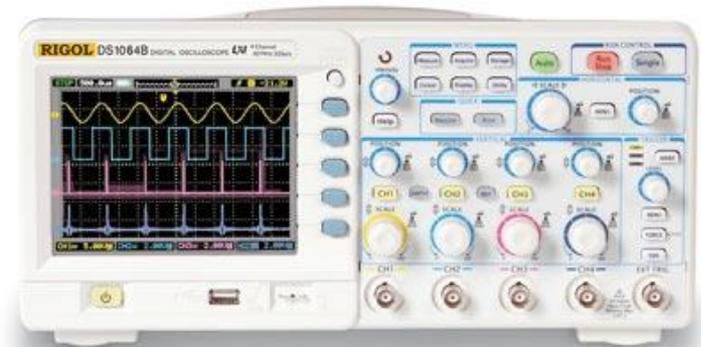
- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- **波形のサンプリング**
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

波形のサンプリング



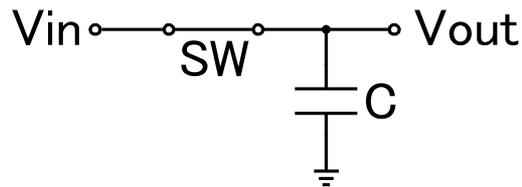
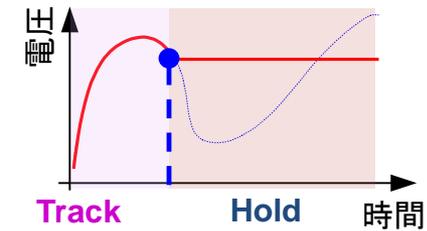
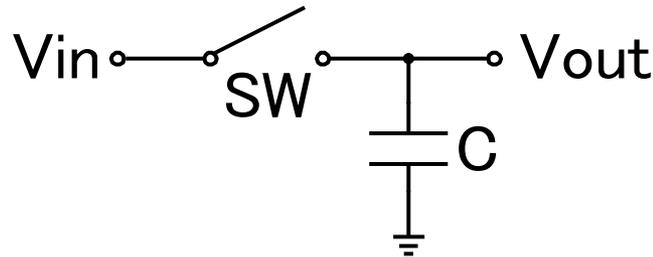
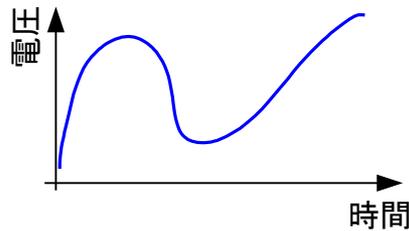
一定時間間隔のデータを取り、間のデータは捨ててしまう。

デジタルオシロスコープ等での
波形の電子計測に
波形サンプリング技術は用いられる



サンプリング回路の構成と動作

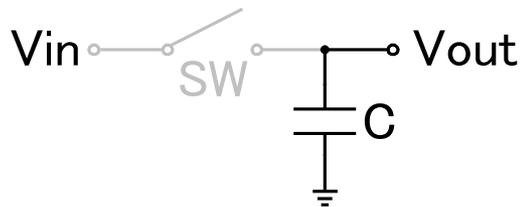
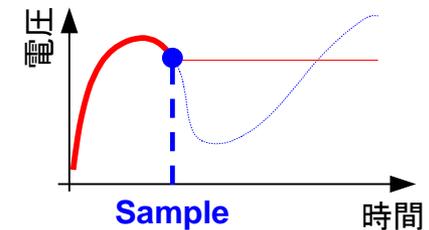
基本構成: スイッチと容量



• スイッチSWがONの時

• $V_{out}(t) = V_{in}(t)$

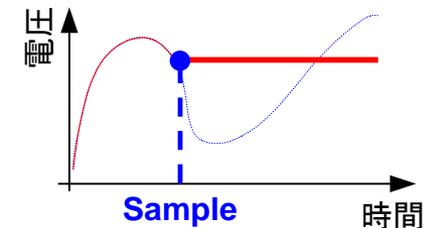
Track動作



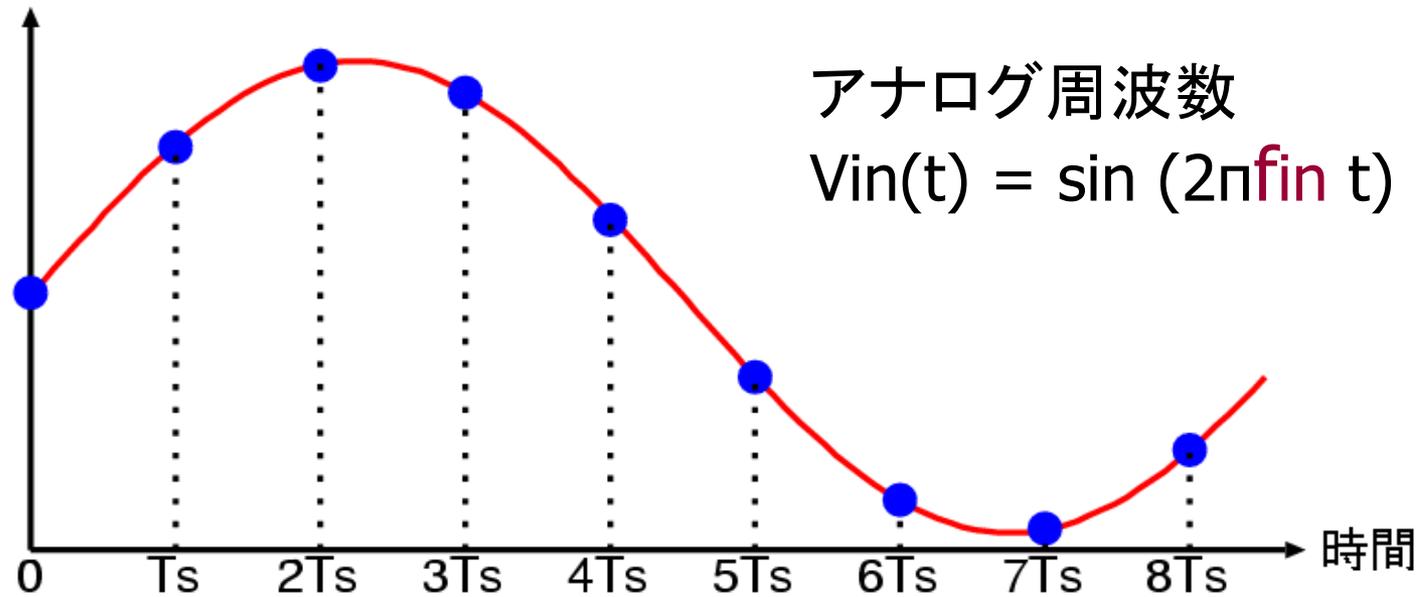
• スイッチSWがOFFの時

• $V_{out}(t) = V_{in}(t_{OFF})$

Hold動作



サンプリング定理



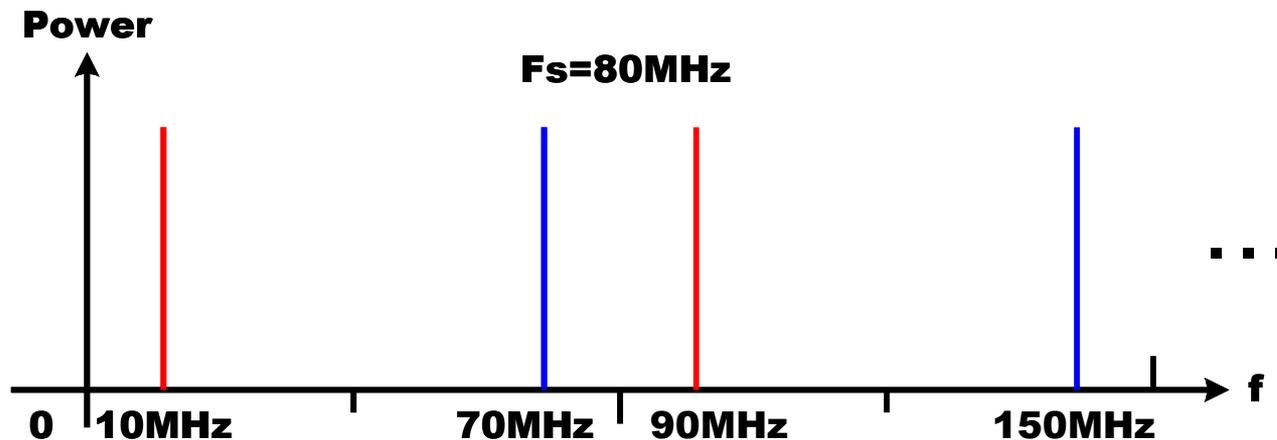
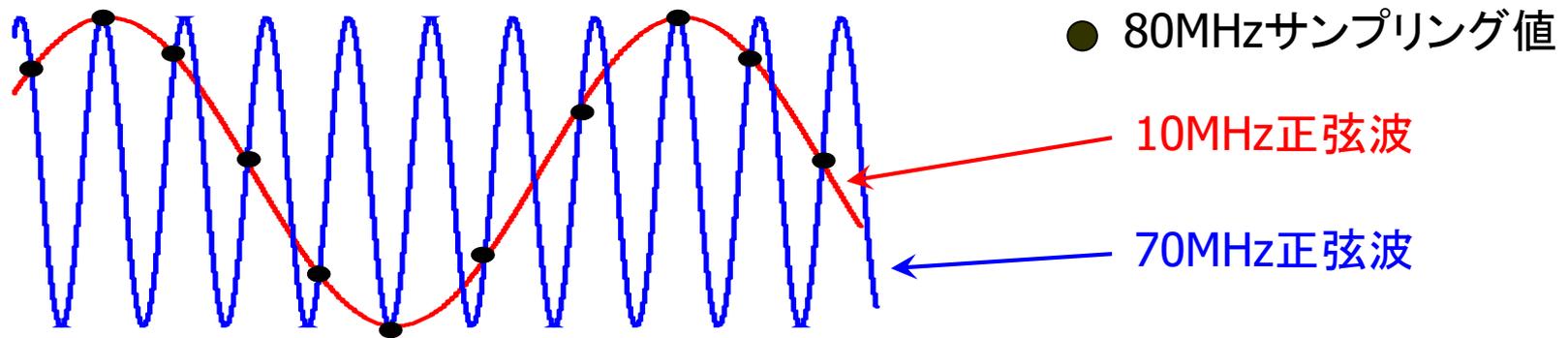
サンプリング周波数 $f_s = 1/T_s$

$f_s > 2 f_{in}$ ならば サンプリングされたデータ(●)から
 アナログデータ(—)が復元できる。

信号に含まれる最大周波数 f_{in} の2倍より大きな周波数 f_s
 でサンプリングする。

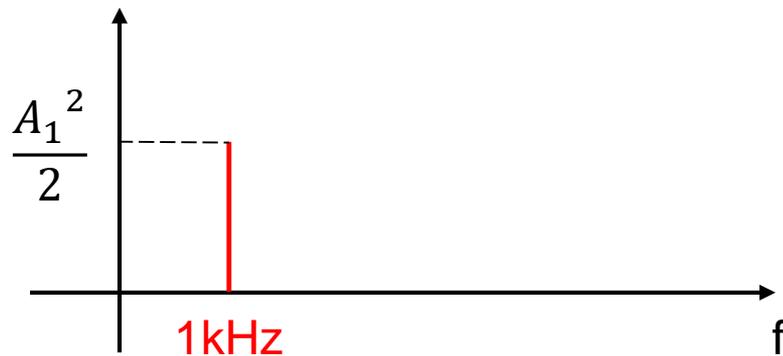
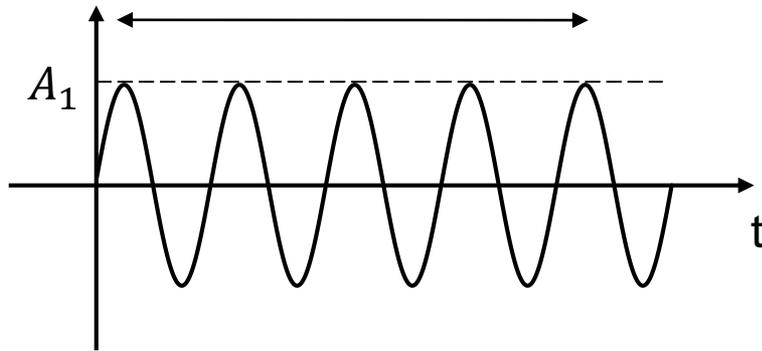
サンプリングと折り返し(aliasing)

80MHzでサンプリングを行うと10MHzと70MHzは区別できない

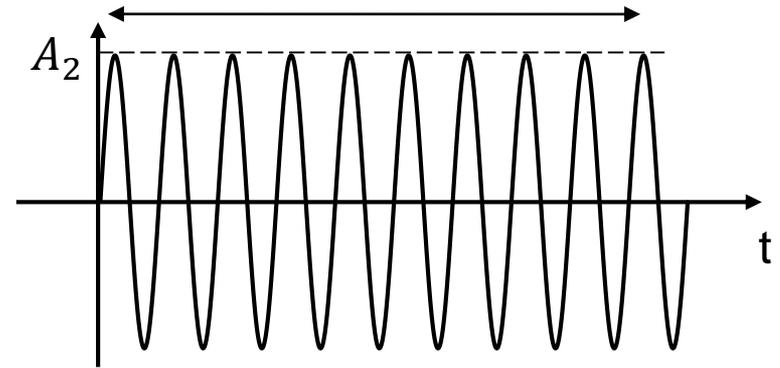


周波数領域でのスペクトル

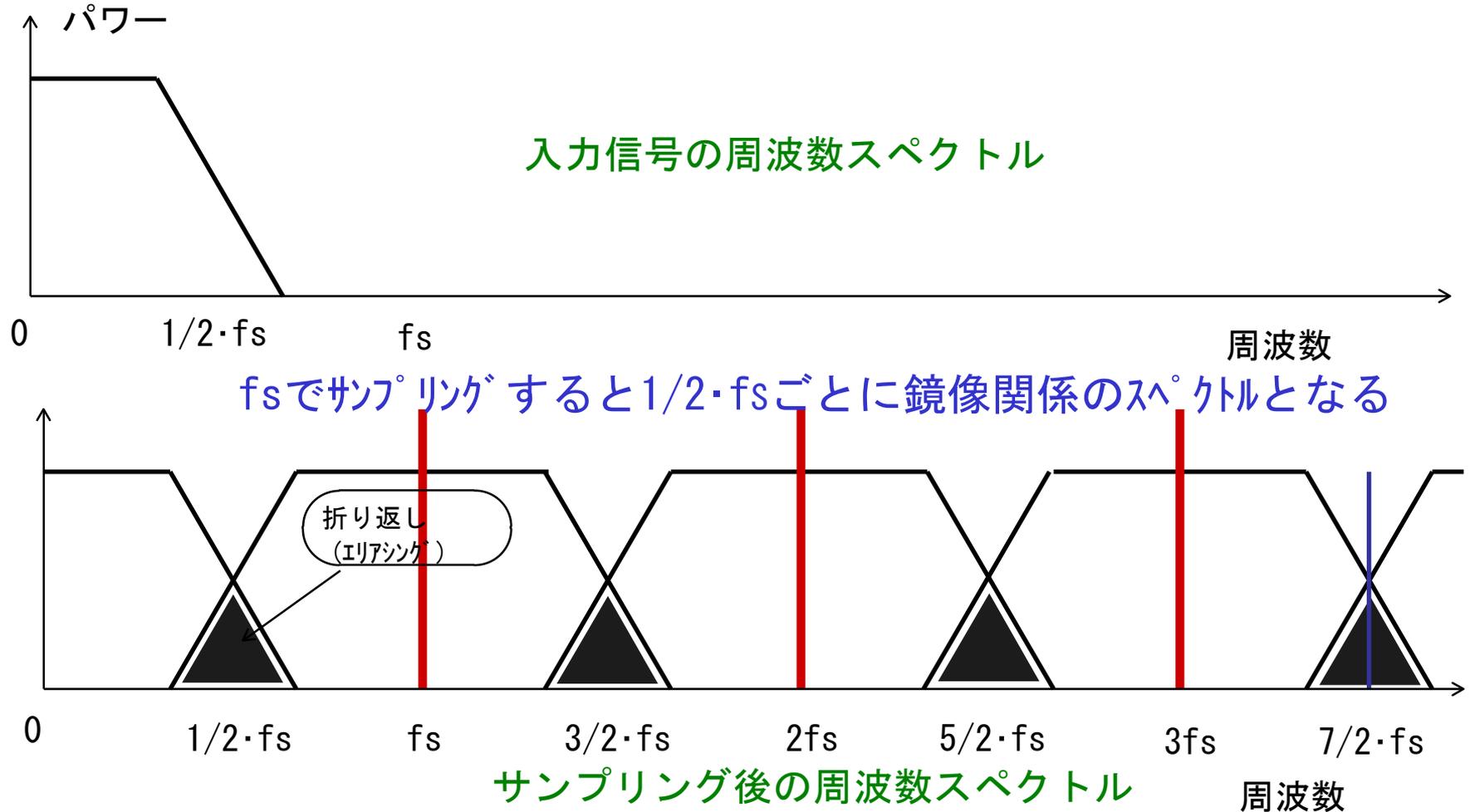
1kHz正弦波は
1秒間に山が1000個



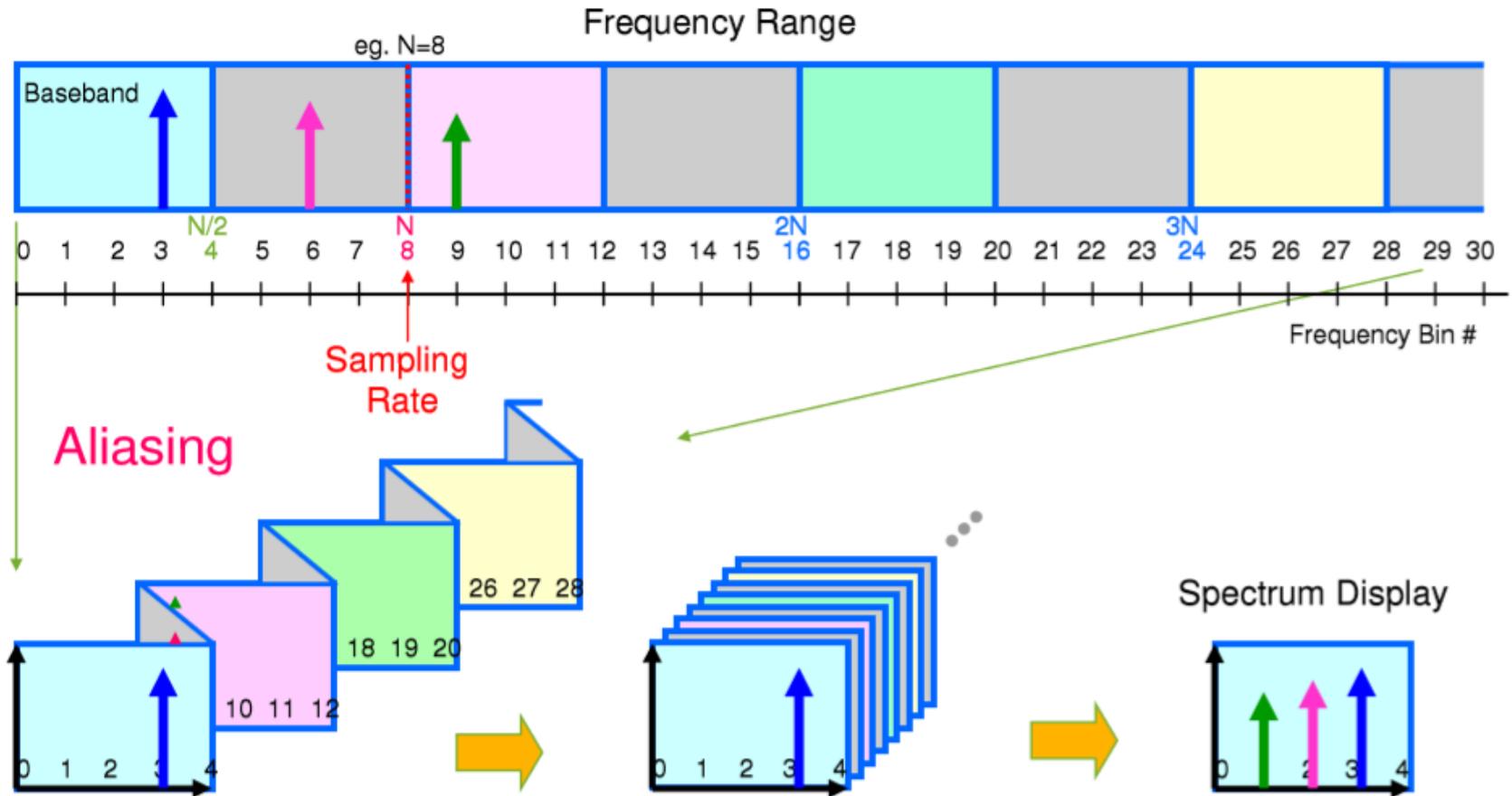
7kHz正弦波は
1秒間に山が7000個



サンプリングと周波数スペクトル



波形サンプリングによるスペクトル折り返し



アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

ヒルベルト・フィルタ

RC ポリフェーズフィルタ

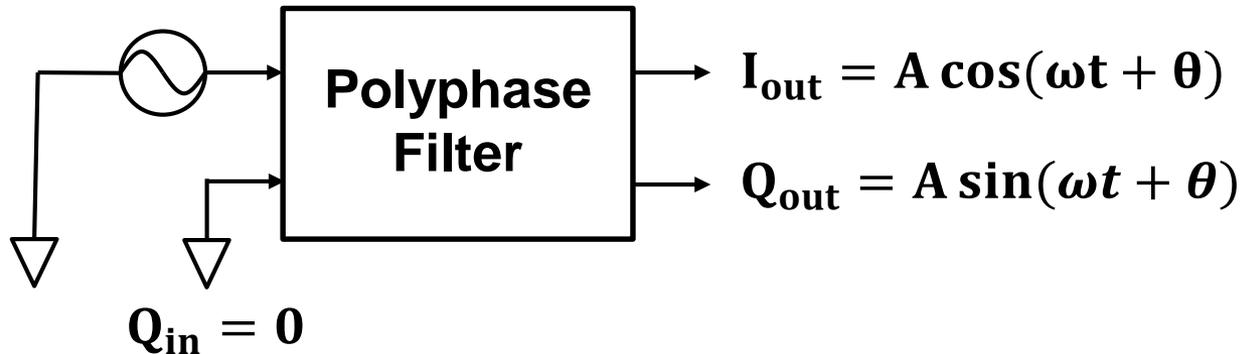


アナログ・ヒルベルト・フィルタ

David Hilbert
独 数学者
1862-1943



$$I_{in} = \cos(\omega t)$$

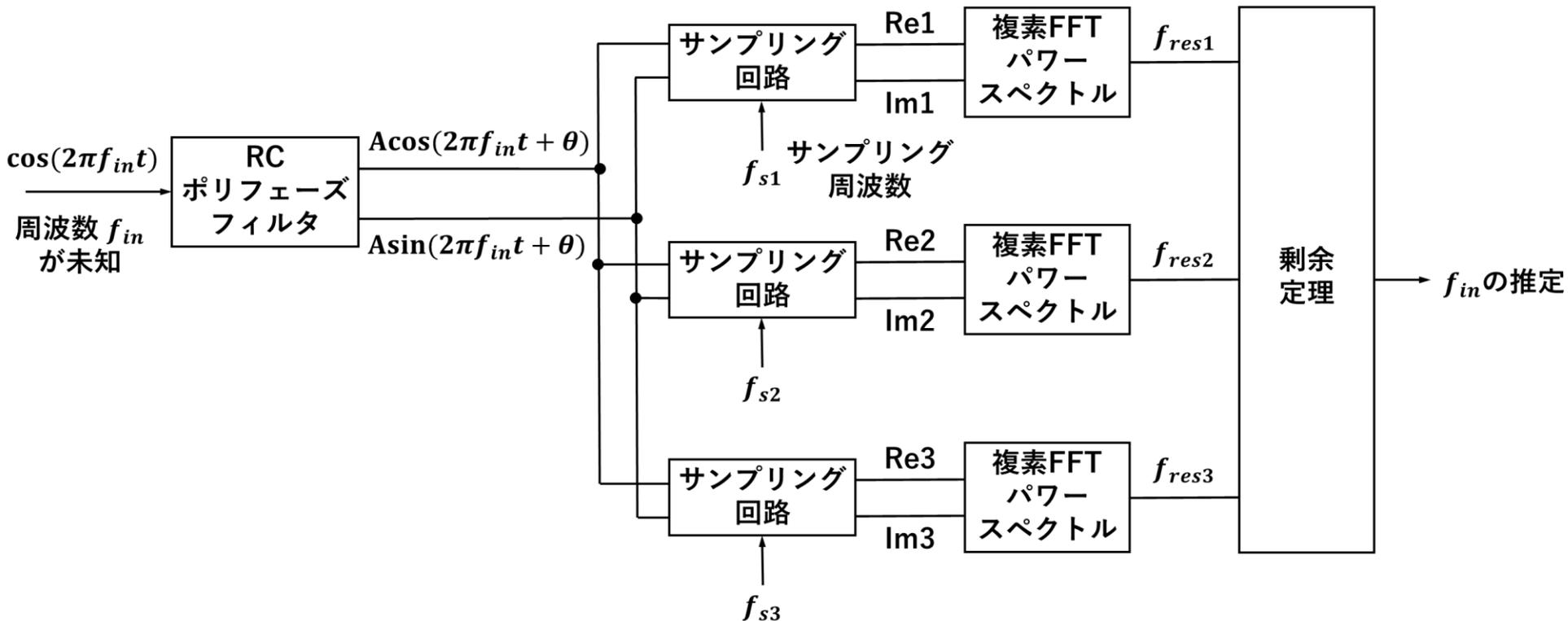


単一cos波入力信号から
位相が90°異なったcos波, sin波を生成

アウトライン

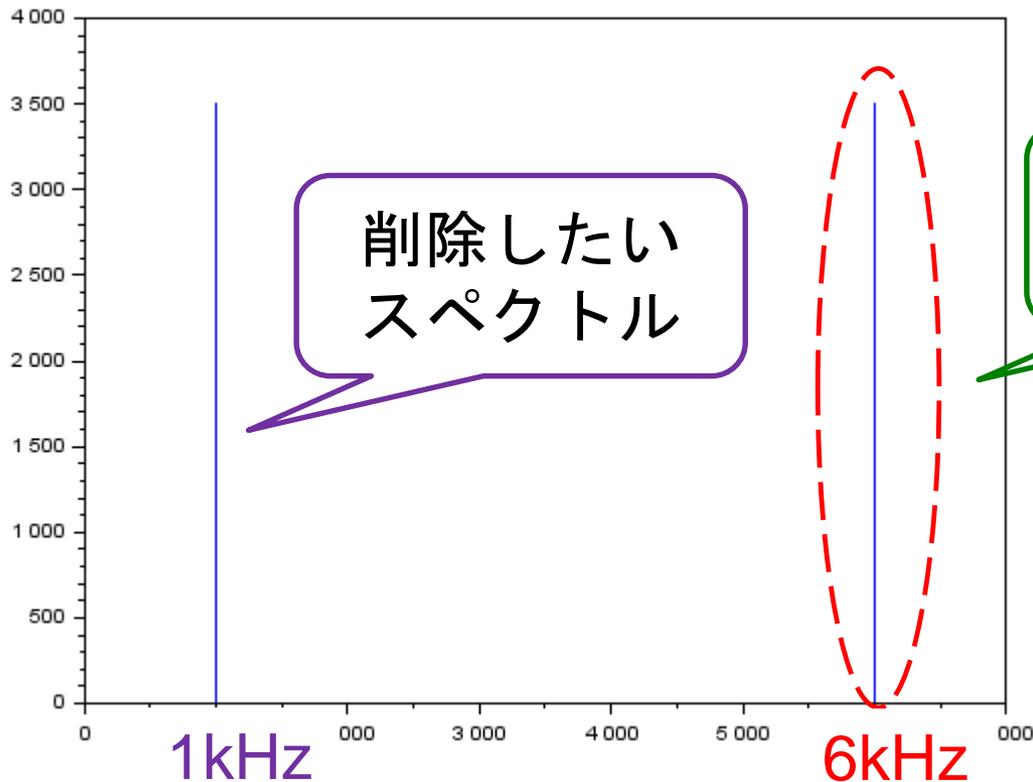
- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

提案する周波数推定回路のブロック図



折り返しによるスペクトル

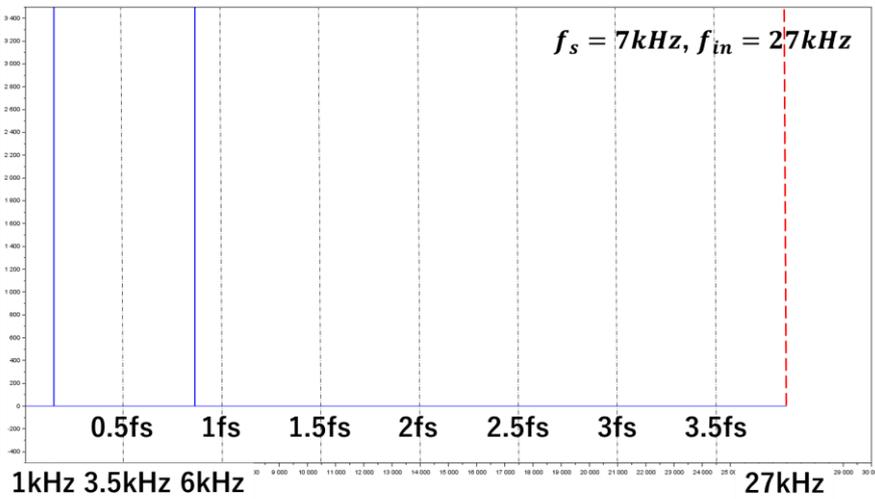
$$f_s = 7\text{kHz}, f_{in} = 27\text{kHz}$$



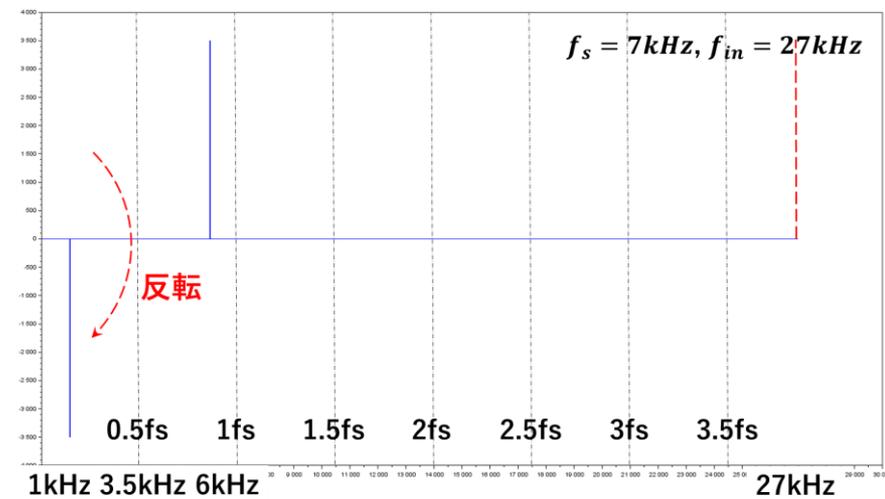
27を7で割った余り：6

ヒルベルト・フィルタによって生成した
cos波,sin波を用いて削除する

スペクトルの消去



+

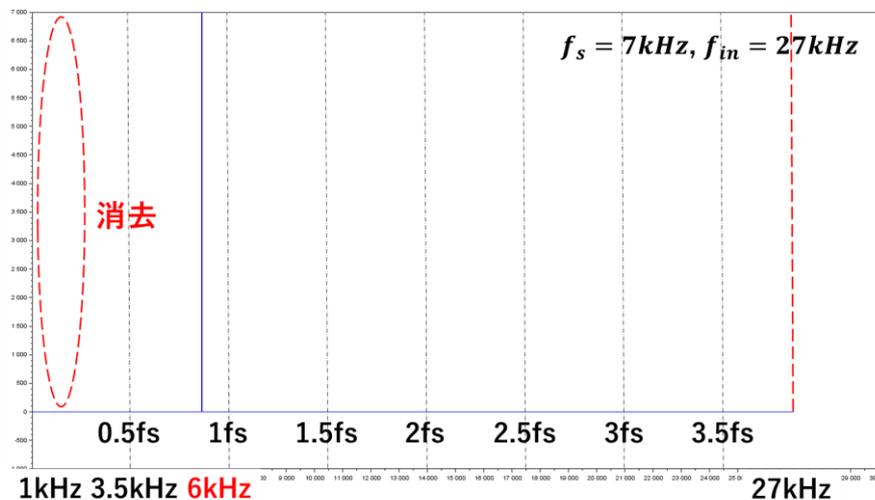


$$\cos(2\pi f_{in} t)$$

$$i \times \sin(2\pi f_{in} t)$$

i : 虚数単位

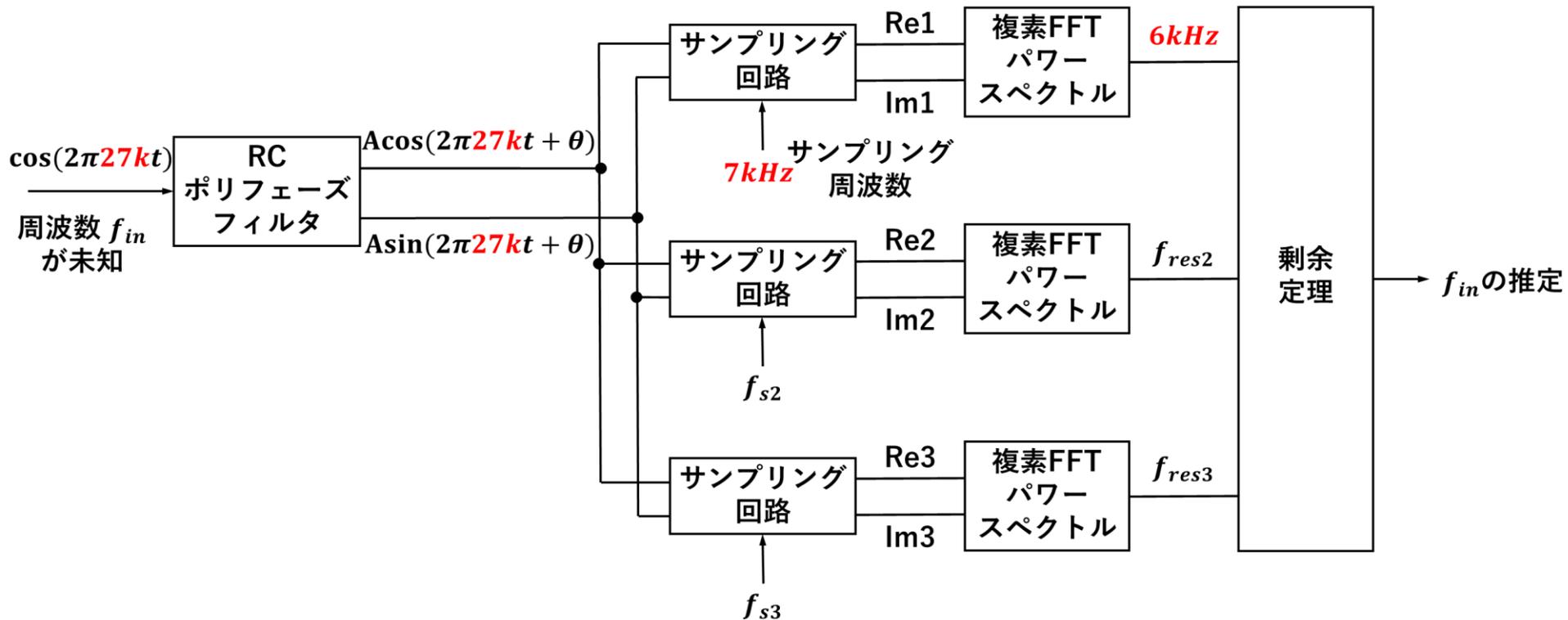
=



入力周波数 27kHz
 に対する
 サンプル周波数 7kHz
 の
 剰余周波数 6kHz
 を得る

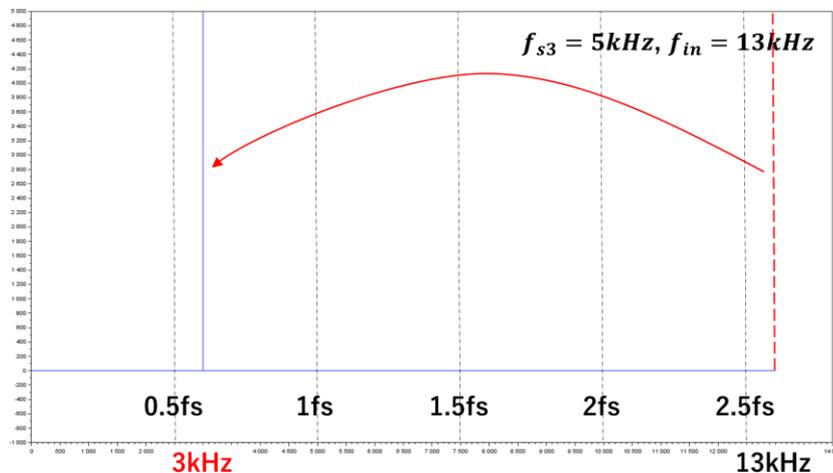
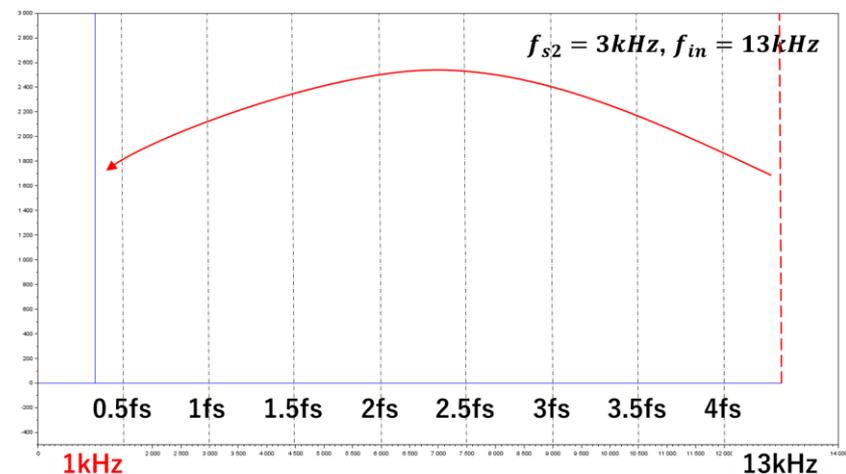
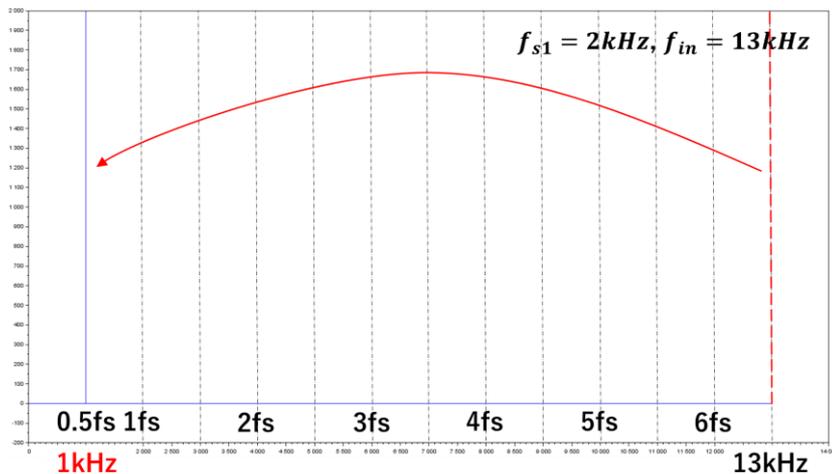
$$\cos(2\pi f_{in} t) + i \times \sin(2\pi f_{in} t)$$

剰余周波数の一つを決定



様々なサンプリング周波数による剰余周波数

入力周波数 $f_{in} = 13\text{kHz}$, 互いに素のサンプリング周波数



サンプリング周波数 剰余周波数

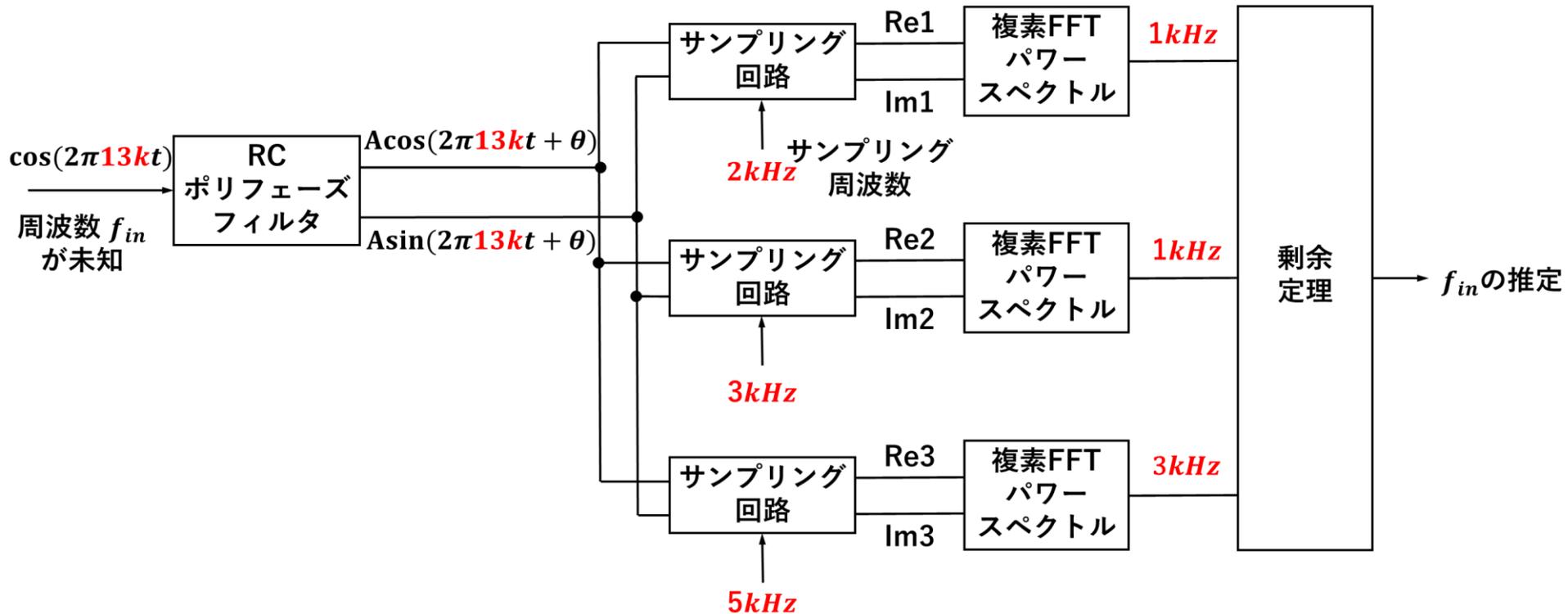
$f_{s1} = 2\text{kHz}$ のとき 1kHz

$f_{s2} = 3\text{kHz}$ のとき 1kHz

$f_{s3} = 5\text{kHz}$ のとき 3kHz

でスペクトルが発生

剰余周波数の決定



高周波入力周波数の推定

$f_{in} = 13\text{kHz}$ のとき

$$m_1 = 1\text{kHz}$$

$$m_2 = 1\text{kHz}$$

$$m_3 = 3\text{kHz}$$

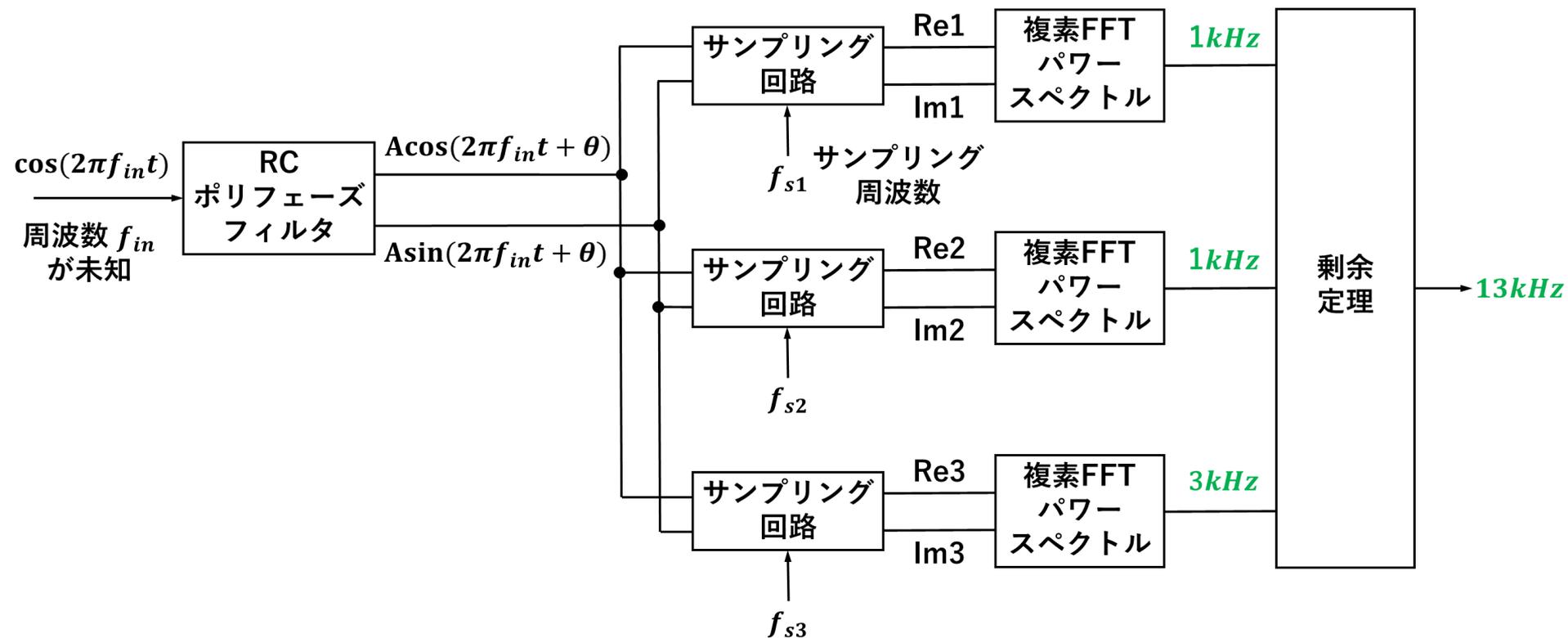
$f_{in} = 13\text{kHz}$
と推定できる

f_{s1}	f_{s2}	f_{s3}	f_{in}
a	b	c	k
0	0	0	0
1	1	1	1
0	2	2	2
1	0	3	3
0	1	4	4
1	2	0	5
0	0	1	6
1	1	2	7
0	2	3	8
1	0	4	9
0	1	0	10
1	2	1	11
0	0	2	12
1	1	3	13
0	2	4	14

f_{s1}	f_{s2}	f_{s3}	f_{in}
a	b	c	k
1	0	0	15
0	1	1	16
1	2	2	17
0	0	3	18
1	1	4	19
0	2	0	20
1	0	1	21
0	1	2	22
1	2	3	23
0	0	4	24
1	1	0	25
0	2	1	26
1	0	2	27
0	1	3	28
1	2	4	29

入力周波数 $f_{in} = 0, 1 \text{ kHz}, \dots \sim 29 \text{ kHz}$ を全て
提案原理で周波数推定できることを確認した

剰余周波数から入力周波数の推定



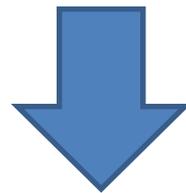
提案手法の周波数測定範囲

サンプリング周波数により決定

$f_{s1} = 1009, f_{s2} = 1013, f_{s3} = 1019$ (互いに素) の場合

$$1009 \times 1013 \times 1019 = 1,041,537,223$$

∴ 0 – 1,041,537,222Hz まで測定可能 (1Hz刻み)



約**1kHz**の複数サンプリング周波数から
1GHzの周波数が推定可

提案手法の欠点

a	b	c	k
0	0	0	0
1	1	1	1
0	2	2	2
1	0	3	3
0	1	4	4
1	2	0	5
0	0	1	6
1	1	2	7
0	2	3	8
1	0	4	9
0	1	0	10
1	2	1	11
0	0	2	12
1	1	3	13
0	2	4	14

a	b	c	k
1	0	0	15
0	1	1	16
1	2	2	17
0	0	3	18
1	1	4	19
0	2	0	20
1	0	1	21
0	1	2	22
1	2	3	23
0	0	4	24
1	1	0	25
0	2	1	26
1	0	2	27
0	1	3	28
1	2	4	29

m1, m2, m3 に測定誤差が生じた場合
推定周波数 k は全く異なる値となる

アウトライン

- 研究目的・目標
- 中国の剰余定理
- 波形のサンプリング
- ヒルベルト・フィルタ
- 提案する周波数推定回路
- まとめ

まとめ

- 剰余定理を用いることで
複数の低い周波数のサンプリングから
高周波信号の周波数を推定する方式を考案し
理論・シミュレーションにて確認



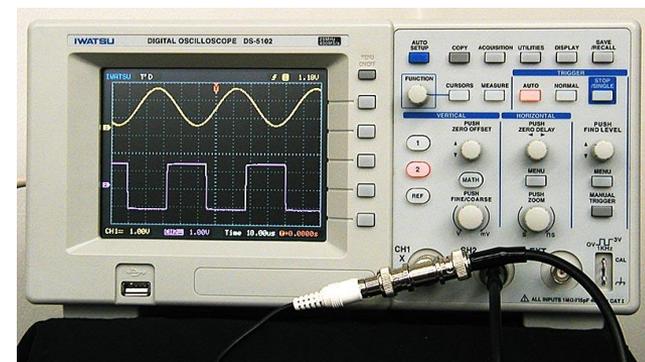
回路実現が容易

- 入力周波数の推定範囲は,
複数のサンプリング周波数の積
- 制限
 - ① 推定可能な入力周波数は離散値のみ
 - ② 剰余周波数に誤差があると測定誤差大

最後に

温故知新

古典数学は先端電子計測技術に
貢献できる



発表内容の新規性

- 高周波信号の周波数を複数の低周波数サンプリング結果から推定・測定する
先行研究あり. 例えば 下記.

Xiaowei Li, Hong Liang, and Xiang-Gen Xia,

“A Robust Chinese Remainder Theorem With Its Applications in Frequency Estimation
From Undersampled Waveforms”,

IEEE Trans. Signal Processing, vol. 57, no.11 (Nov. 2009).

- ここでの発表の新規性は、内部にアナログ・ヒルベルトフィルタ (RC ポリフェーズフィルタ) を併用したこと. RCポリフェーズフィルタのヒルベルトフィルタとの関係性は下記.

Yoshiro Tamura, Ryo Sekiyama, Koji Asami, Haruo Kobayashi,

"RC Polyphase Filter As Complex Analog Hilbert Filter",

IEEE 13th International Conference on Solid-State and Integrated Circuit Technology, Hangzhou (Oct. 2016).

<http://kobaweb.ei.st.gunma-u.ac.jp/news/pdf/2016/ICSICTpresentation1021.pdf>

<http://ieeexplore.ieee.org/document/7999091/>

<http://kobaweb.ei.st.gunma-u.ac.jp/lecture/WE2B-1.pdf>

Q&A

- Q1. 除数の1つを10倍することで少数でも表せるのでは？
- Q2. 他の周波数推定回路と比べてどのような点が利点となるか？
- Q3. どのくらいの頻度で誤差が生じるか？
- Q4. どのようなアプリケーションに応用できるか？