

# 整数論に基づく無理数近似値 アナログ信号生成回路

群馬大学 理工学部 電子情報理工学科

平井 愛統，  
桑名杏奈，小林 春夫

# Outline

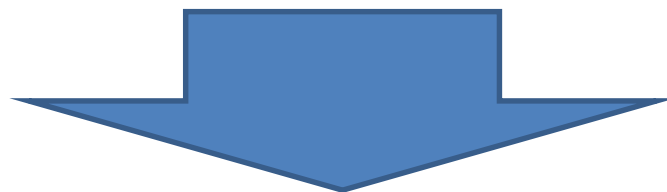
- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
  - 合成抵抗の収束値
  - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
  - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
  - 合成抵抗と連分数展開との対応
  - ネイピア数 $e$ , 円周率 $\pi$
- まとめ

# Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
  - 合成抵抗の収束値
  - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
  - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
  - 合成抵抗と連分数展開との対応
  - ネイピア数 $e$ , 円周率 $\pi$
- まとめ

# 研究背景・目的

- IC内での抵抗値はばらつく  
「比精度」はよい(0.1% 程度の誤差)
- 無理数は連分数展開で表せる

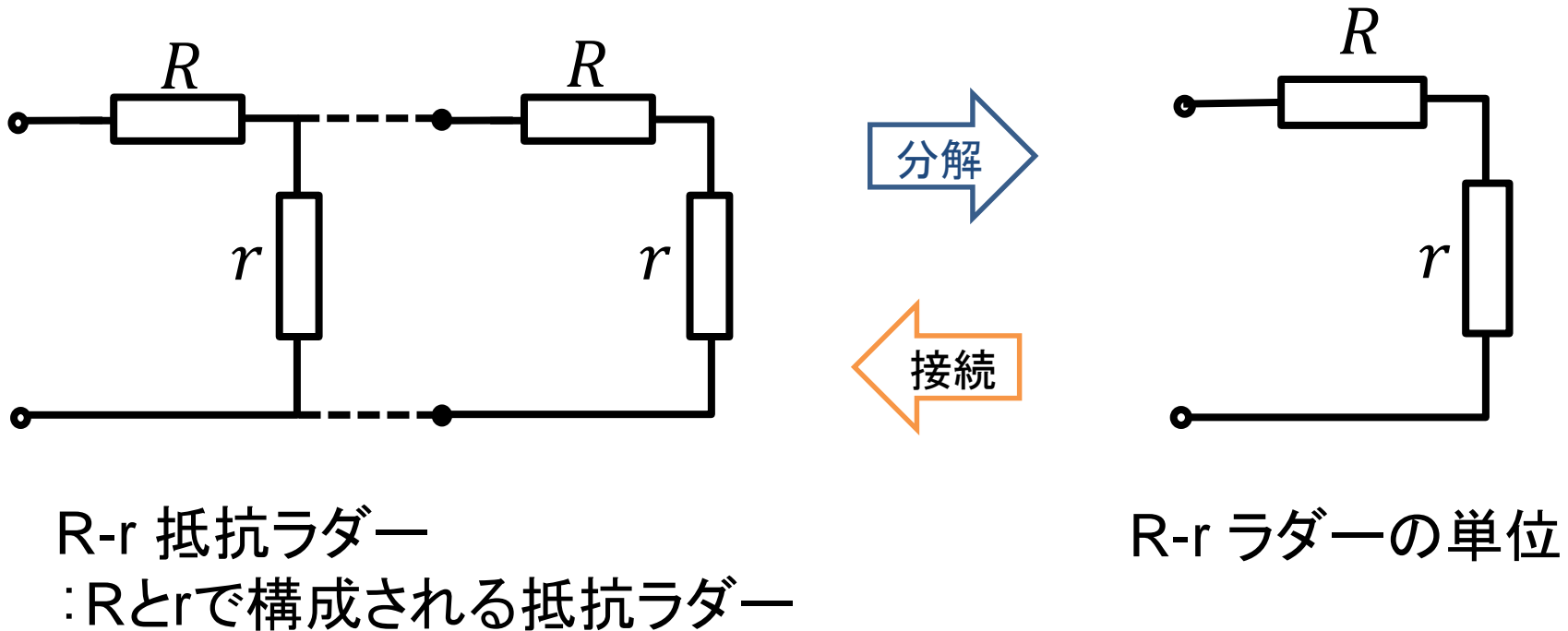


- 整数比の抵抗でのネットワークで  
無理数(近似)の比抵抗を構成
- 無理数アナログ信号を生成

# Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
  - 合成抵抗の収束値
  - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
  - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
  - 合成抵抗と連分数展開との対応
  - ネイピア数 $e$ , 円周率 $\pi$
- まとめ

# R-r ラダーの合成抵抗値




抵抗ラダーはRとrの単位に分割できる

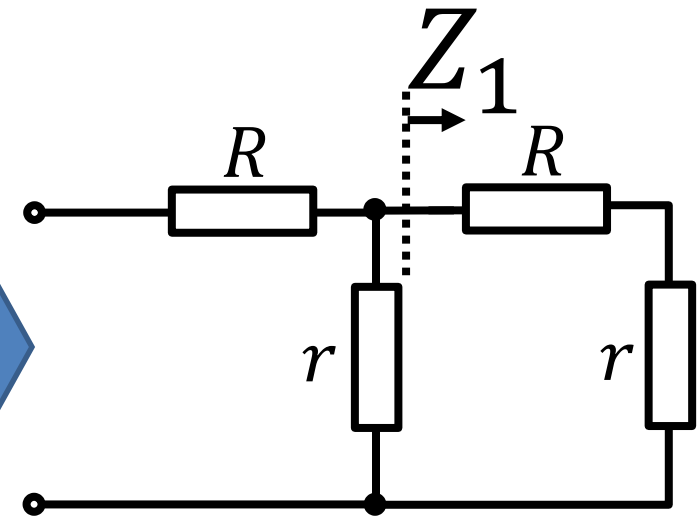
# R-rラダーの合成抵抗値

- ・接続する”単位”を増やす

二段ラダー  $Z_2$


$$Z_2 = R + \frac{r(R+r)}{r+(R+r)}$$

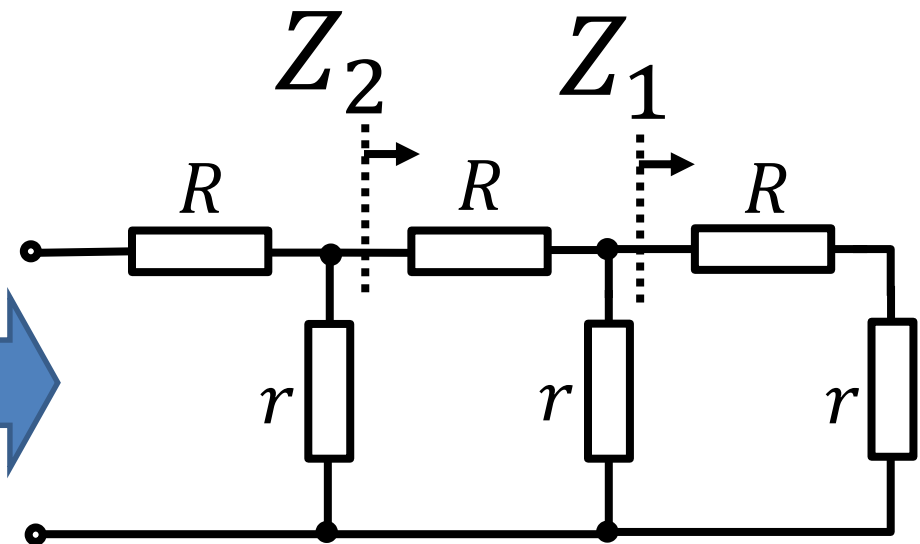
$Z_2$  



三段ラダー  $Z_3$

$$Z_3 = R + \frac{rZ_2}{r+Z_2}$$

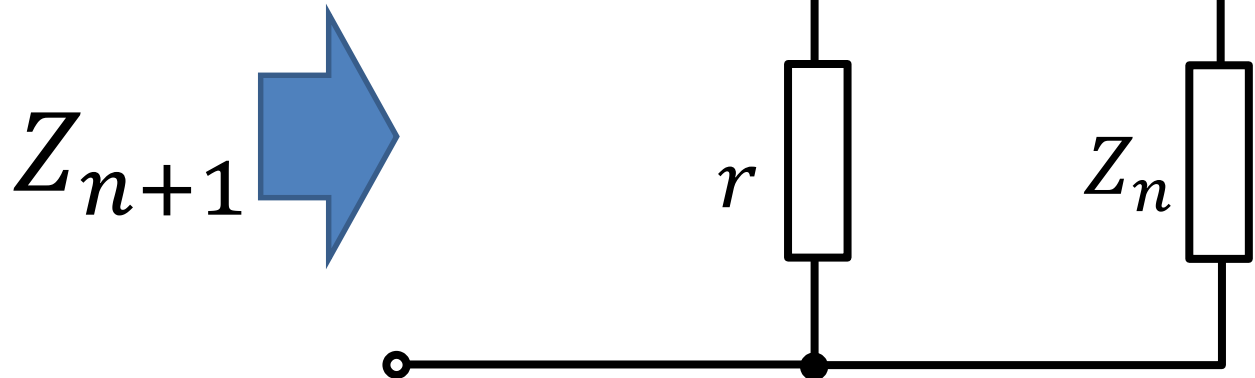
$Z_3$  



# n段R-rラダーの合成抵抗

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= R + \frac{rZ_n}{r + Z_n} \\ &= \frac{(r + R)Z_n + rR}{Z_n + r} \end{aligned}$$

→ $Z_n$ に関する漸化式





# n段ラダーの合成抵抗

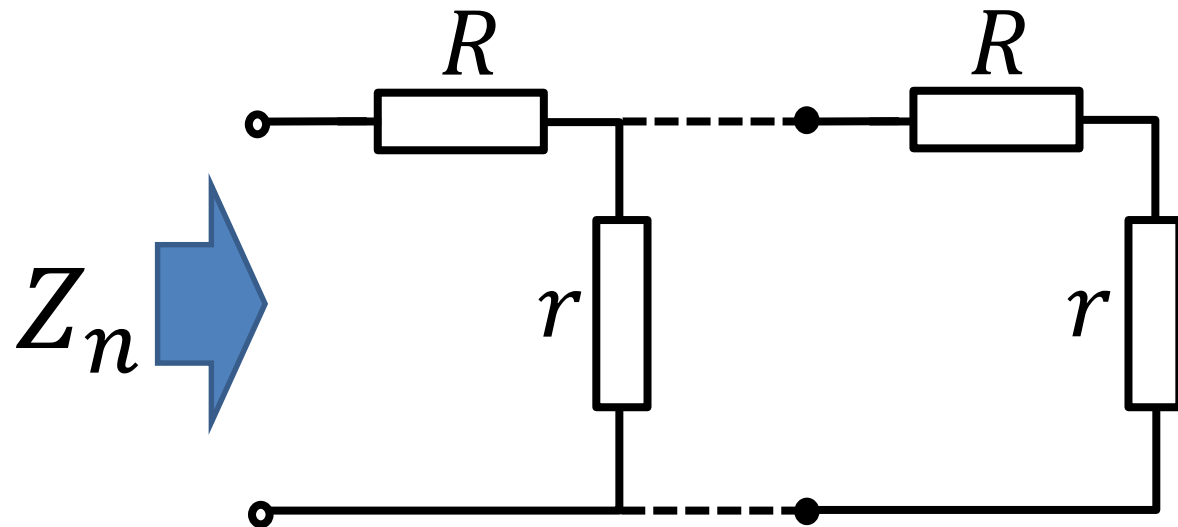
$$Z_n = \frac{\alpha k^n - \beta}{k^n - 1}$$

ただし、

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left( R - \sqrt{R^2 + 4rR} \right),$$

$$k = \frac{R + r - \beta}{R + r - \alpha}, 1 < k$$

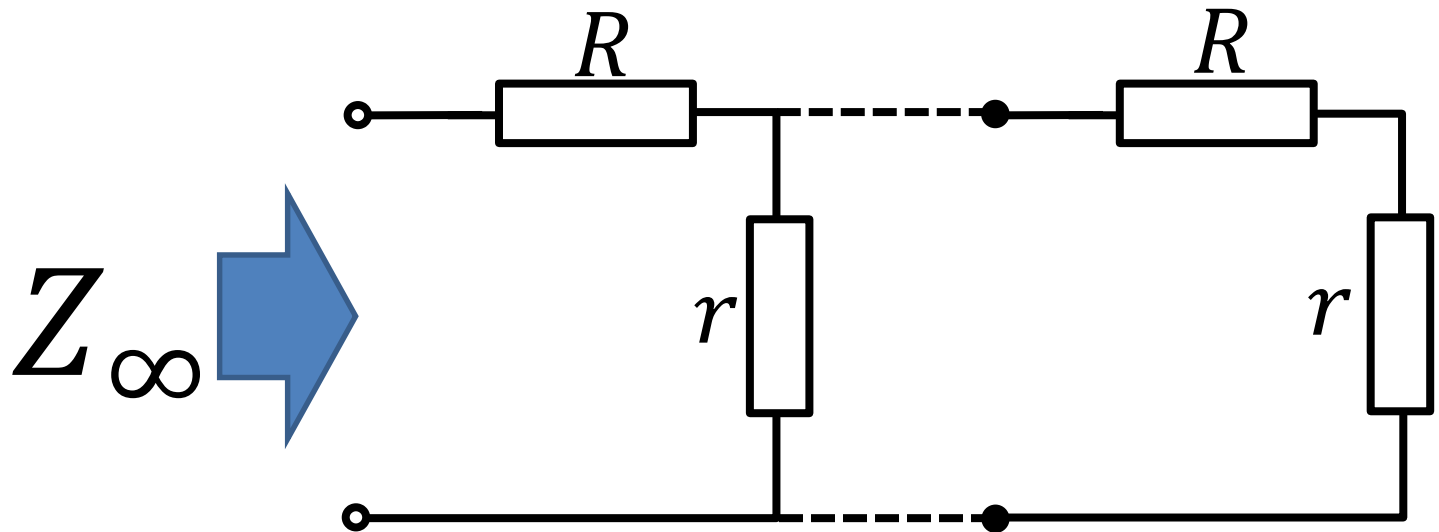


# 合成抵抗の収束値

$$Z_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta k^{-n}}{1 - k^{-n}}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \left( R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right)$$

$$Z_{\infty} = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R(R + 4r)}}{2}$$



# Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
  - 合成抵抗の収束値
  - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
  - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
  - 合成抵抗と連分数展開との対応
  - ネイピア数 $e$ , 円周率 $\pi$
- まとめ

# 貴金属数 $\lambda$

・  $x^2 - nx - 1 = 0$  の正の解

$$\lambda_n = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

・  $n$  について「第  $n$  貴金属数」

・  $n = 1$ : 黄金数  $\phi$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

・  $n = 2$ : 白銀数  $\tau$

$$\tau = 1 + \sqrt{2}$$

・  $n = 3$ : 青銅数  $\xi$

$$\xi = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

・ 連分数形式

$$\lambda_n = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\ddots}}}}$$

・  $1 : (\lambda_n - 1)$  を「第  $n$  貴金属比」

参考：岩本誠一、江口将生、吉良知文、「黄金・白銀・青銅：数と比と形と率と」(2008)

[https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac\\_download\\_md/15758/KJ00005471244.pdf](https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac_download_md/15758/KJ00005471244.pdf)

# R-rラダーと貴金属数

R-r ラダーの抵抗

貴金属数

$$Z_{\infty} = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R(R+4r)}}{2}$$

$$\lambda_n = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= R + \frac{rZ_n}{r + Z_n} \\ &= \frac{R}{k} \left( k + \frac{1}{\frac{R}{kr} + \frac{R}{kZ_n}} \right) \\ &= \frac{R}{k} \left( k + \frac{1}{\frac{R}{kr} + \frac{1}{k + \frac{1}{\frac{R}{kr} + \frac{1}{\ddots}}}} \right) \end{aligned}$$

$$\lambda_n = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\ddots}}}}$$

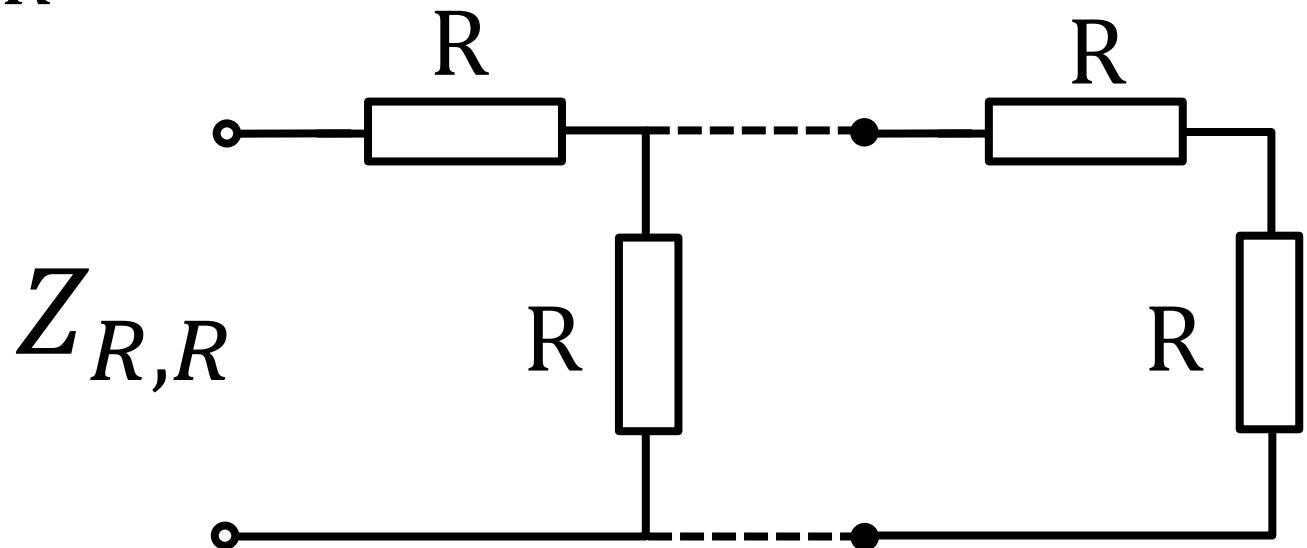
R-r ラダーの合成抵抗

貴金属数(無理数)比になりうる

# R-Rラダー

$$\begin{aligned}
 Z_{R,R} &= \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R(R+4r)}}{2} \\
 &= \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R(R+4R)}}{2} \\
 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}R
 \end{aligned}$$

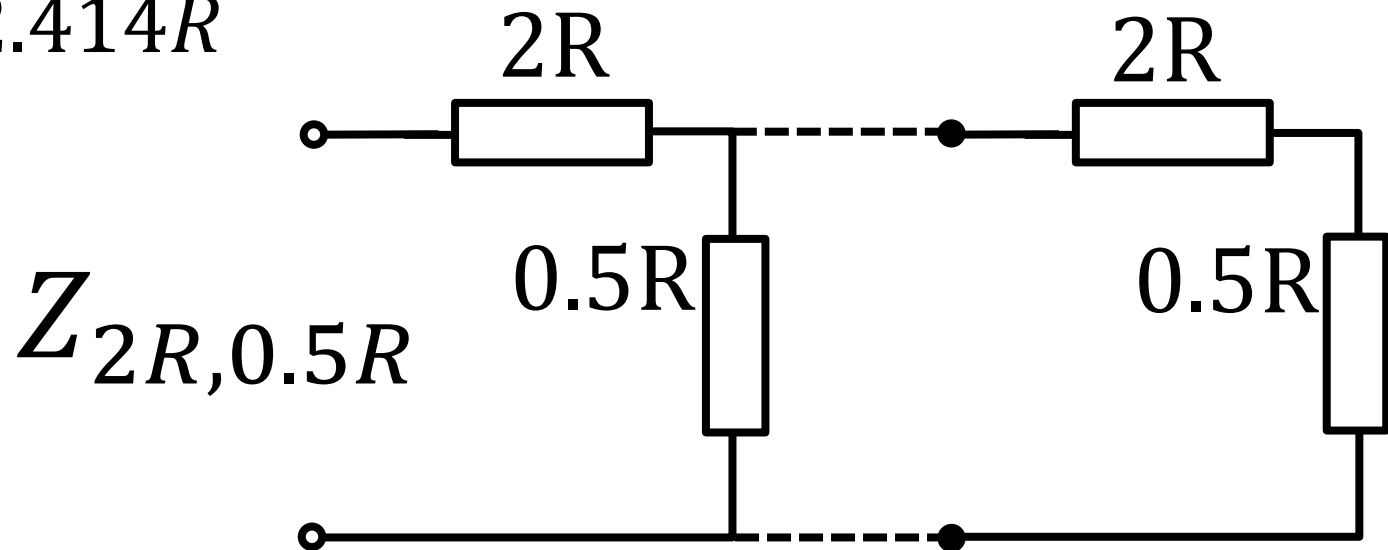
黄金数 $\phi$ ラダー



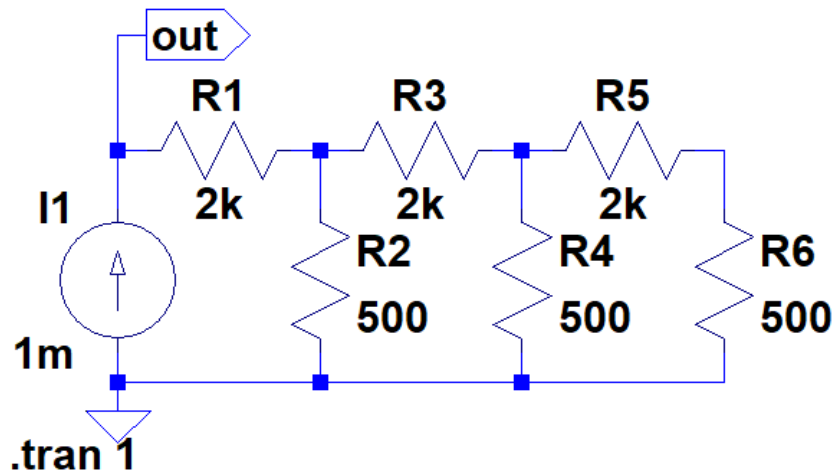
# 2R-0.5Rラダー

$$\begin{aligned}
 Z_{2R,0.5R} &= \frac{2R}{2} + \frac{\sqrt{2R(2R + 4 \cdot 0.5R)}}{2} \\
 &= R + \frac{2\sqrt{2R^2}}{2} \\
 &= (1 + \sqrt{2})R \\
 &\approx 2.414R
 \end{aligned}$$

白銀数 $\tau$ ラダー



# 白銀数 $1 + \sqrt{2}$ ラダー (3段)



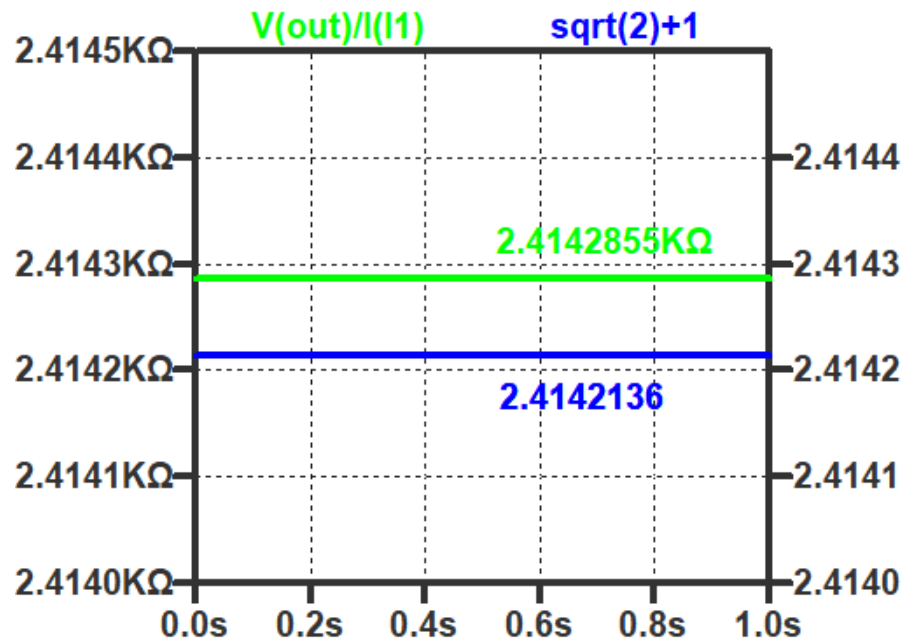
## 条件

- $R$  は  $1 \text{ k}\Omega$
- 電流  $1 \text{ mA}$  を流して、  
電圧  $V(\text{out})$  から抵抗を計算

## 結果

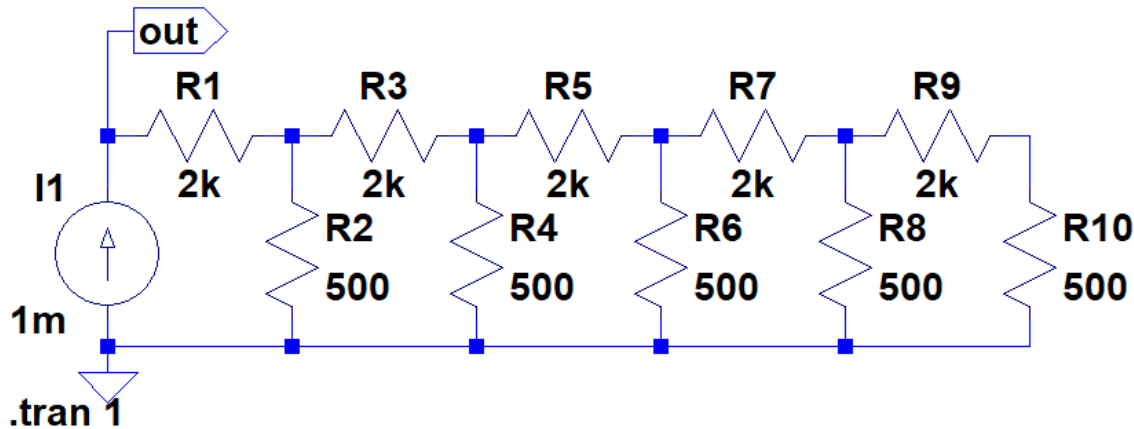
抵抗値 **2.4142855 k $\Omega$**

$$1 + \sqrt{2} = 2.414213562373095 \dots$$





# 白銀数 $1 + \sqrt{2}$ ラダー (5段)



## 条件

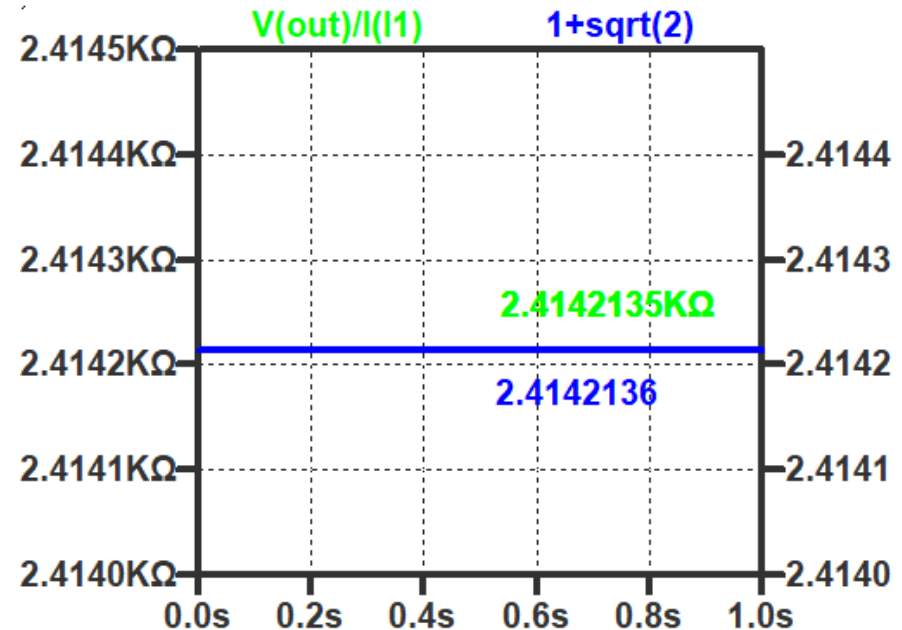
- $R$  は  $1 \text{ k}\Omega$
- 電流  $1 \text{ mA}$  を流して、電圧  $V(\text{out})$  から抵抗を計算

## 結果

抵抗値 **2.4142135 k $\Omega$**

$$1 + \sqrt{2} = 2.414213562373095 \dots$$

段数を増加  $\rightarrow 1 + \sqrt{2}$  に近づく



# Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
  - 合成抵抗の収束値
  - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
  - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
  - 合成抵抗と連分数展開との対応
  - ネイピア数 $e$ , 円周率 $\pi$
- まとめ

# $\sqrt{2}$ ラダー

- 合成抵抗の比を $\sqrt{2}$ にしたい

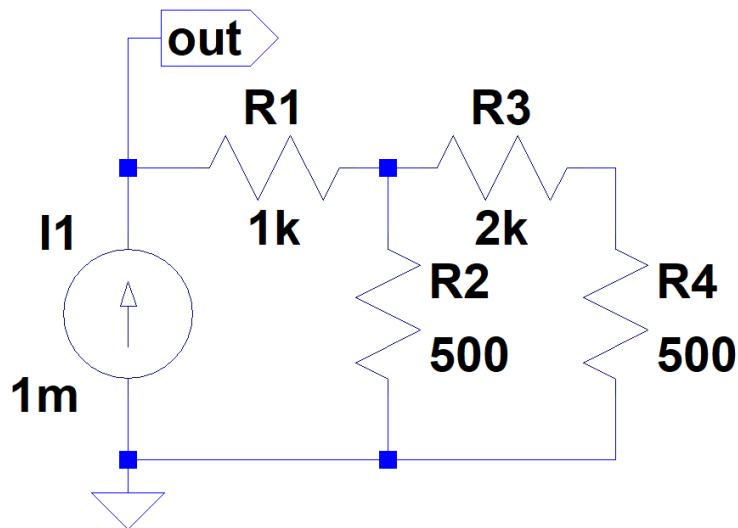
$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= (1 + \sqrt{2}) - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}\end{aligned}$$

$$Z_{2R,0.5R} = (1 + \sqrt{2})R$$

$$Z_{2R,0.5R} - R = \sqrt{2}R$$

2R-0.5Rラダーの先頭の2RをRにする！

# $\sqrt{2}$ ラダー (2段) シミュレーション



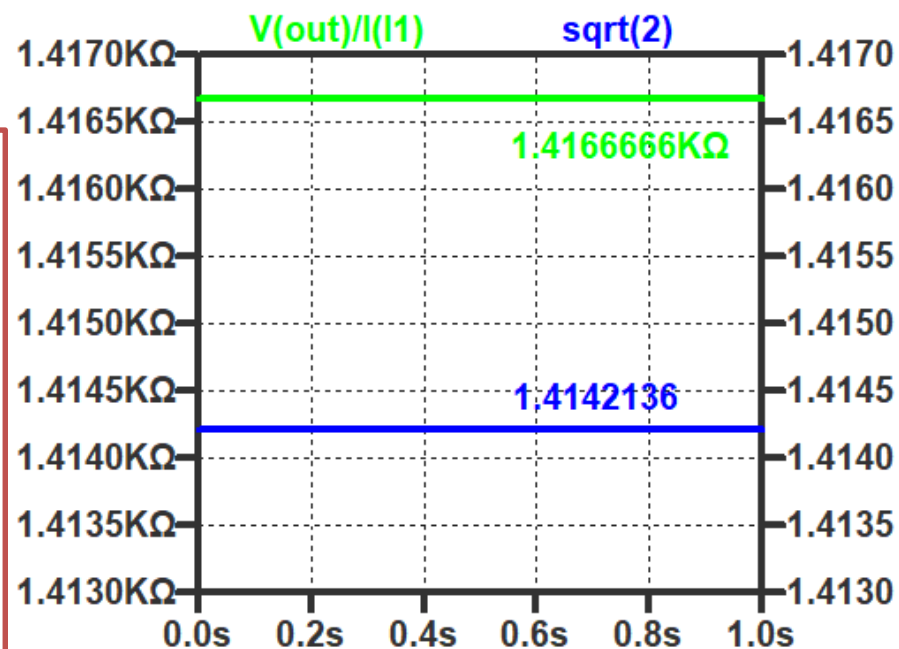
## 条件

- $R$  は  $1\text{ k}\Omega$
- 電流  $1\text{ mA}$ を流して、  
電圧  $V(\text{out})$ から抵抗を計算

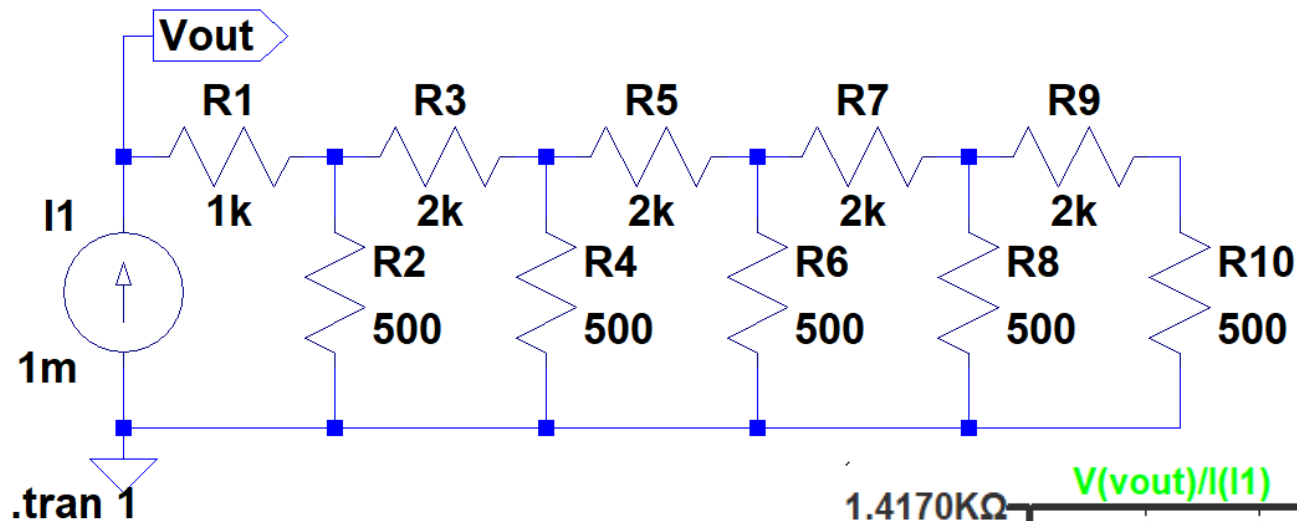
## 結果

抵抗値  $1.41666666\text{ k}\Omega$

$\sqrt{2} = 1.414213562373095\dots$



# $\sqrt{2}$ ラダー (5段) シミュレーション



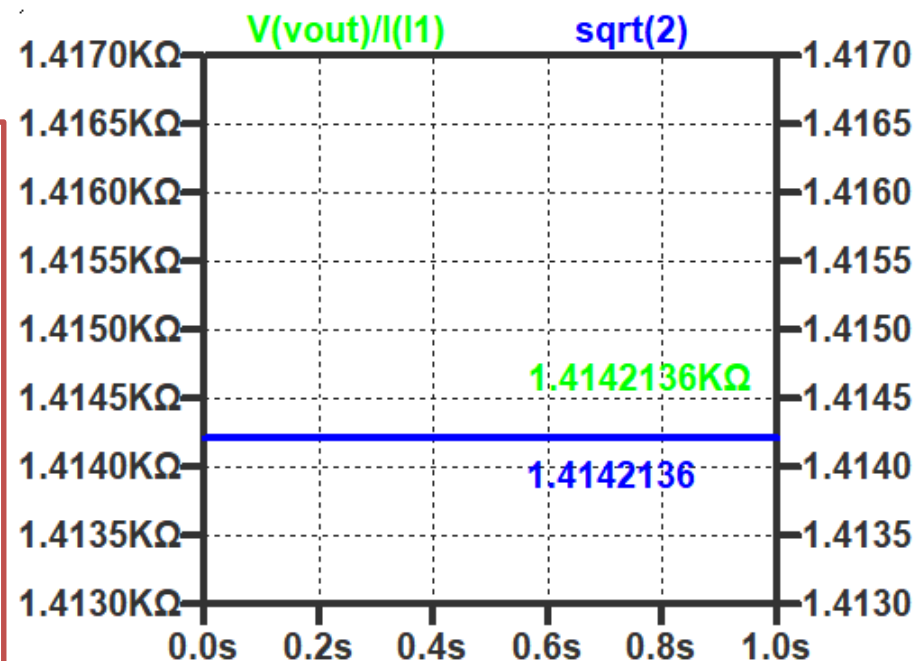
## 条件

- $R$  は 1 k $\Omega$
- 電流 1 mAを流して、電圧  $V(out)$ から抵抗を計算

## 結果

抵抗値 1.4142136 k $\Omega$

$\sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$

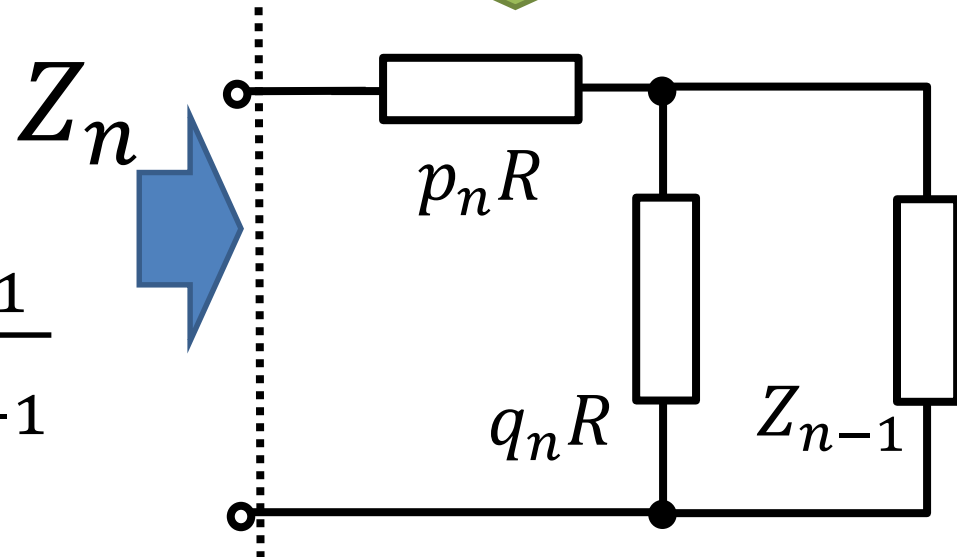
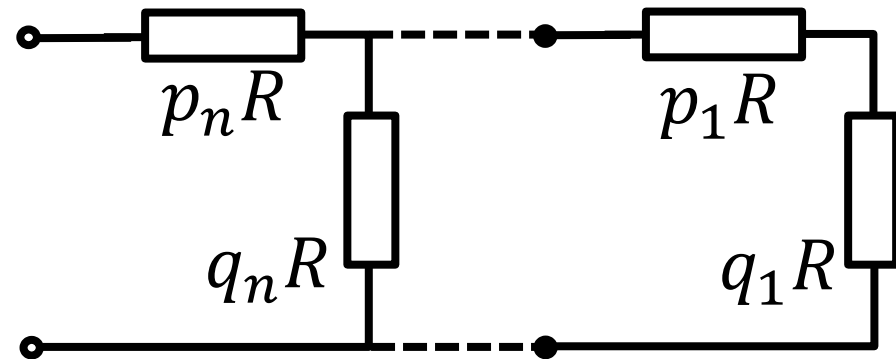


# Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
  - 合成抵抗の収束値
  - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
  - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- **各段の抵抗値が異なるラダー**
  - 合成抵抗と連分数展開との対応
  - ネイピア数 $e$ , 円周率 $\pi$
- まとめ

# 各段の抵抗値が異なるラダー

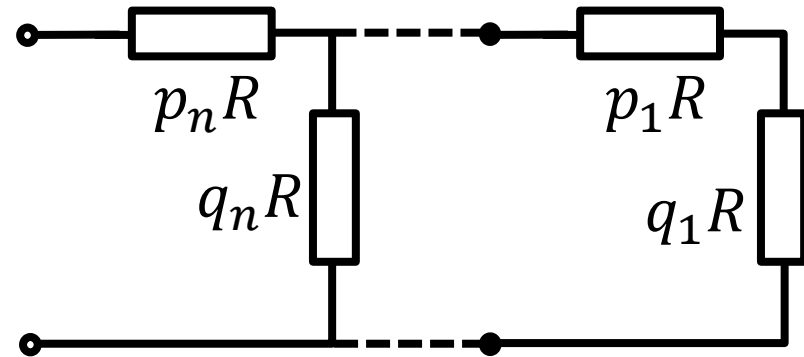
$n$ 段目の抵抗を  
 $p_n, q_n$ で重みづけ



$$Z_n = p_n R + \frac{q_n R \cdot Z_{n-1}}{q_n R + Z_{n-1}}$$

# 各段の抵抗値が異なるラダー

$$\begin{aligned}
 Z_n &= p_n R + \frac{q_n R \cdot Z_{n-1}}{q_n R + Z_{n-1}} \\
 &= R \left( p_n + \frac{1}{\frac{1}{q_n} + \frac{R}{Z_{n-1}}} \right) \\
 &= R \left( p_n + \frac{1}{\frac{1}{q_n} + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{\frac{1}{q_{n-1}} + \frac{1}{\ddots}}}}} \right)
 \end{aligned}$$



任意の数の連分数展開から  $p_n$  と  $q_n$  を決定  
 → 抵抗の比は任意の数に



# Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
  - 合成抵抗の収束値
  - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
  - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
  - 合成抵抗と連分数展開との対応
  - ネイピア数 $e$ , 円周率 $\pi$
- まとめ

# ネイピア数 $e$ の比を持つ抵抗ラダー

- ・無理数
- ・自然対数の底
- ・連分数展開が規則性を持つ

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}}}}$$

$$= [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \dots]$$

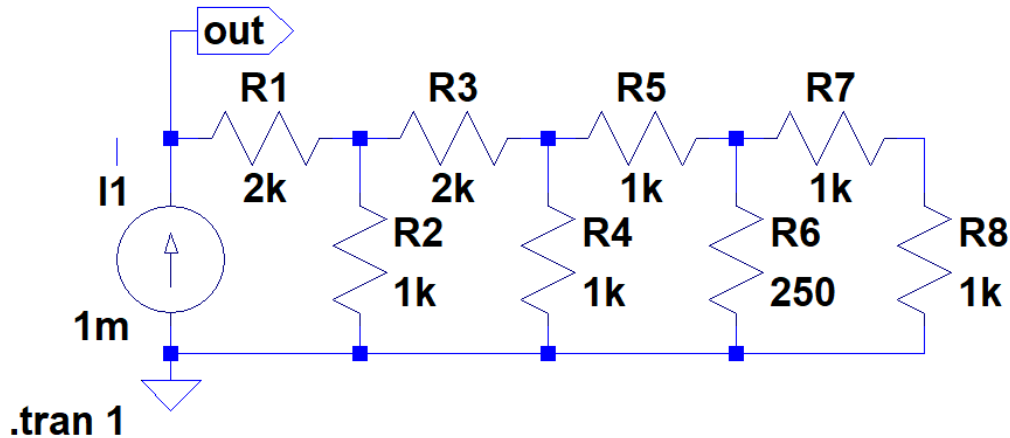
$p_n$  → 連分数展開 整数部分の奇数番目

2, 2, 1, 1, 6, ...

$q_n$  → 連分数展開 整数部分の偶数番目の逆数

1, 1, 1/4, 1, 1, ...

# ネイピア数 $e$ ラダー(4段)



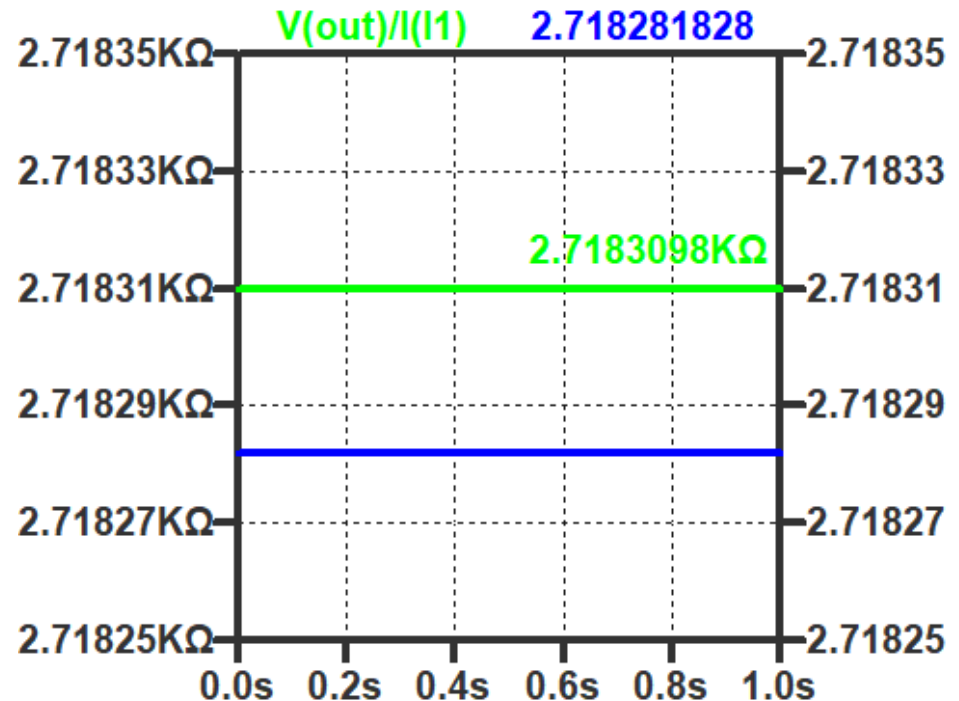
$$e \approx [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1]$$

## 条件

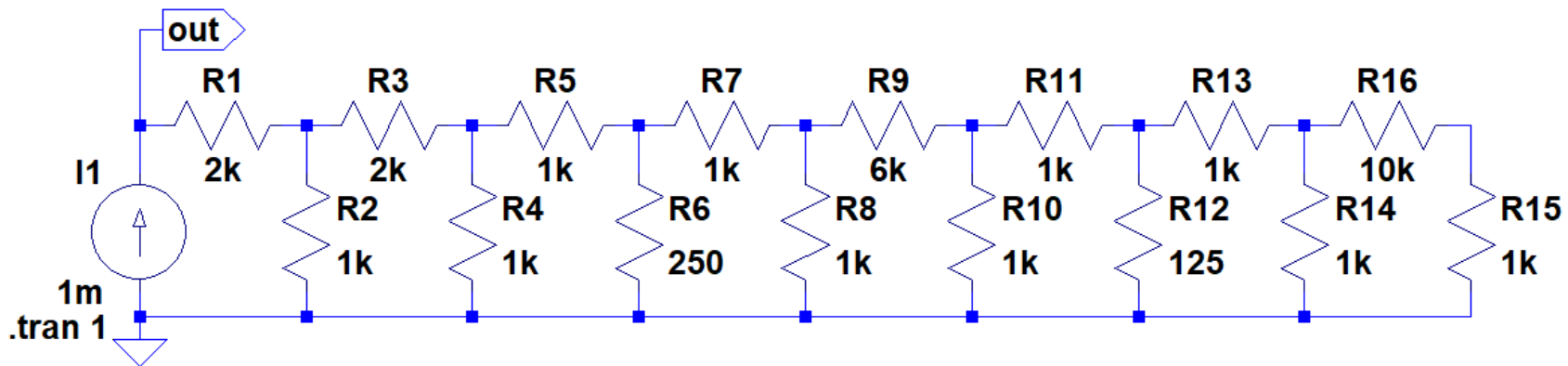
- $R$  は  $1 \text{ k}\Omega$
- 電流  $1 \text{ mA}$ を流して、  
電圧  $V(\text{out})$ から抵抗を計算

## 結果

抵抗値 **2.7183098 k $\Omega$**   
( $e = 2.718281828459536 \dots$ )



# ネイピア数eラダー(8段)



$$e \approx [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1]$$

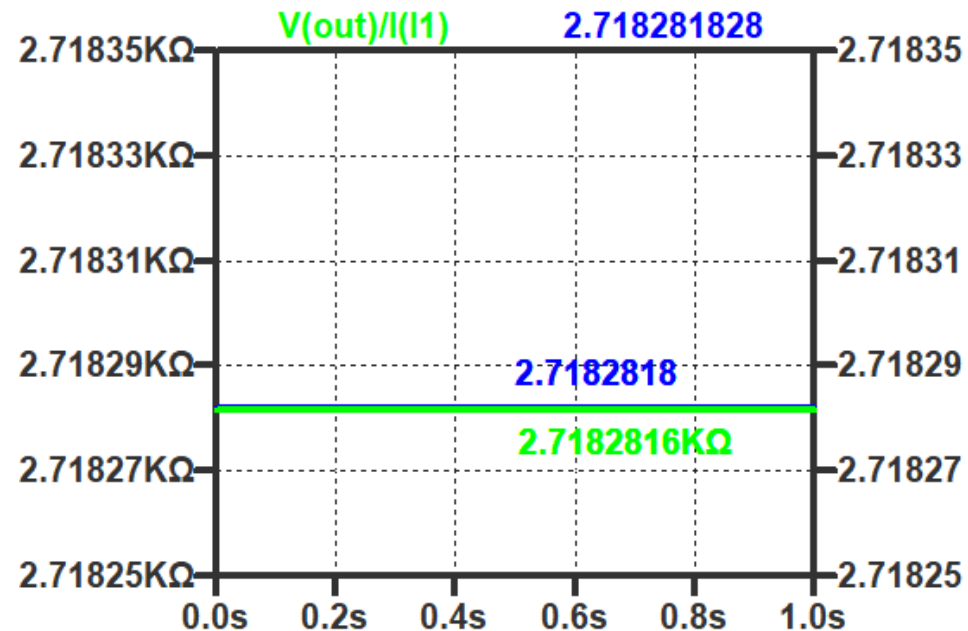
## 条件

- $R$  は  $1 \text{ k}\Omega$
- 電流  $1 \text{ mA}$  を流して、  
電圧  $V(\text{out})$  から抵抗を計算

## 結果

抵抗値  $2.7182816 \text{ k}\Omega$

( $e = 2.718281828459536 \dots$ )



# 円周率 $\pi$ の比を持つ抵抗ラダー

- ・無理数
- ・規則性をもたない連分数表示
- ・円の周と直径との比（少数第5位までで近似した連分数）

$$\pi \approx 3.14159$$

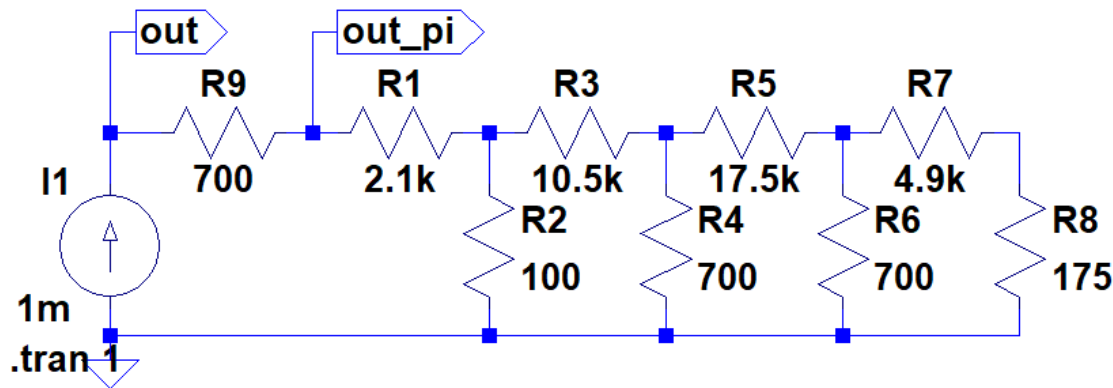
$$= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

$$= [3; 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4]$$

$p_n$  → 連分数展開 整数部分の奇数番目  
3, 15, 25, 7

$q_n$  → 連分数展開 整数部分の偶数番目の逆数  
1/7, 1, 1, 1/4

# 円周率 $\pi$ のラダー（シミュレーション）



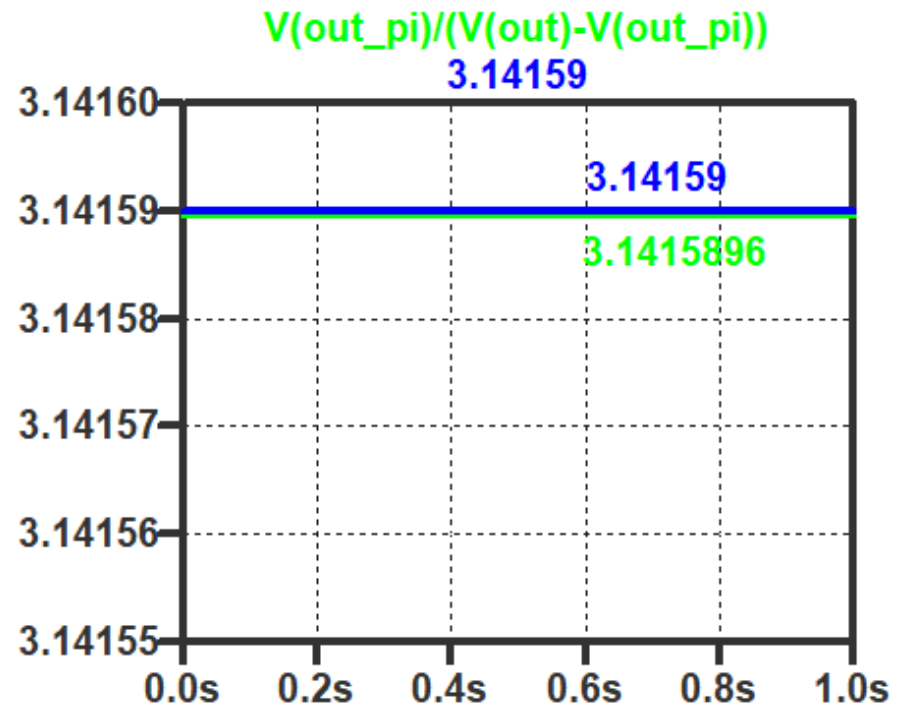
$$\pi \approx [3; 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4]$$

## 条件

- $R$  は  $700 \Omega$
- $R$  と抵抗ラダーに電流  $1 \text{ mA}$  を流す
- 抵抗にかかる電圧の比から抵抗比を計算

## 結果

$R$  に対して **3.1415896** 倍の値  
(設計値 : **3.14159** 倍)



# アナログ信号処理への応用

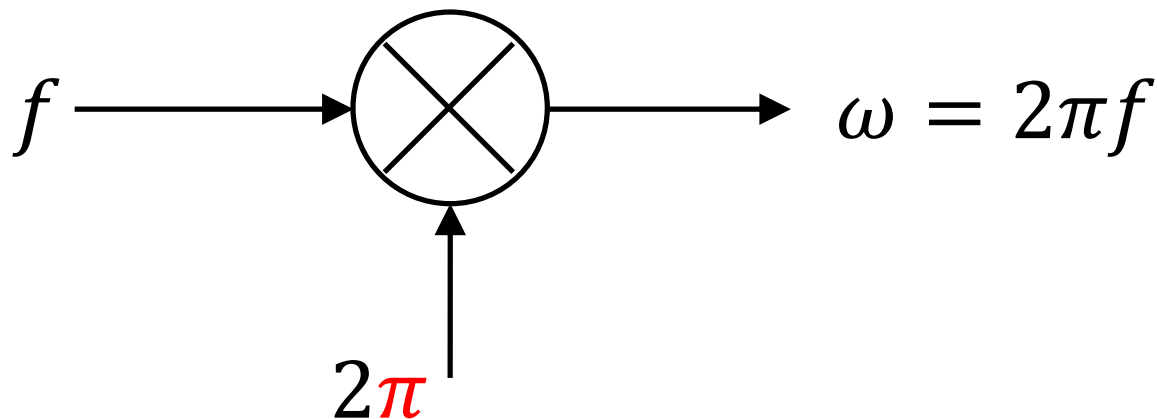
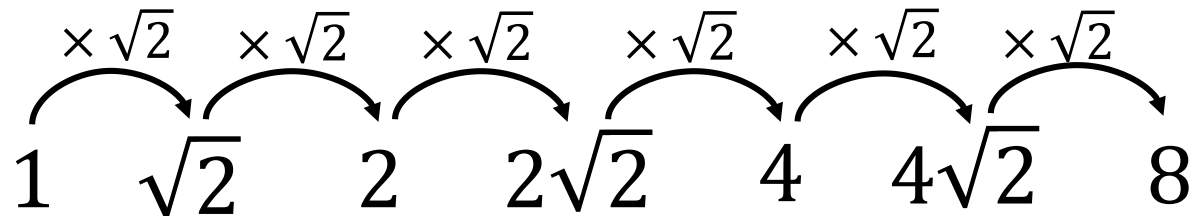
- ADCの冗長設計

- 黄金比  $1 : \phi - 1$

- フィボナッチ重み付け SAR (逐次比較近似) ADC

- 白銀比  $1 : \tau - 1$

- $\sqrt{2}$  (白銀比) 重み付け SAR ADC



# Outline

- 研究背景・目的
- R-r ラダーネットワーク
  - 合成抵抗の収束値
  - 貴金属数比のラダー, シミュレーション検証
  - $\sqrt{2}$ の比のラダー, シミュレーション検証
- 各段の抵抗値が異なるラダー
  - 合成抵抗と連分数展開との対応
  - ネイピア数 $e$ , 円周率 $\pi$
- まとめ



# まとめ

<まとめ>

次を明らかにした。

- R-r ラダーの合成抵抗は「貴金属数」比を持つ
- 任意の数の連分数展開を用いて、その数の比を持つ抵抗を作ることができる
- 近似精度は用いる抵抗の数を増やすことでよくなる

# 数学によるアナログ信号処理の新機軸



Ludolph van Ceulen

円周率  $\pi$

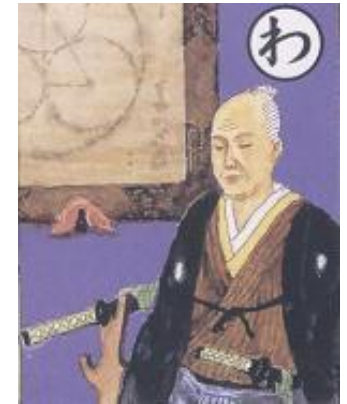


Leonhard Euler

ネイピア数  $e$



John Napier



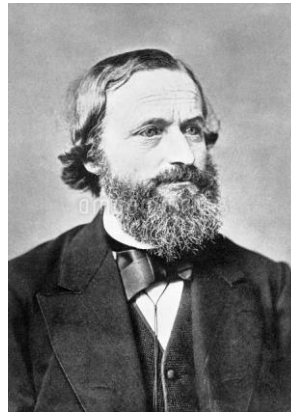
関孝和

連分数展開



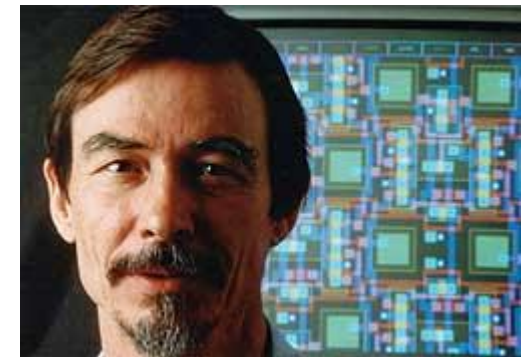
Georg Simon Ohm

オームの法則



Gustav Robert Kirchhoff

キリヒホッフの法則



Carver Mead

抵抗ネットワーク

# $Z_n$ に関する漸化式

特性方程式

$$x = \frac{(R+r)x + rR}{x+r}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Rx - rR = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{R \pm \sqrt{(-R)^2 + 4rR}}{2}$$

重解があるとき

$$(-R)^2 + 4rR = 0$$

$$\Leftrightarrow R(R + 4r) = 0$$

$R > 0, r > 0$ より重解なし

二項間一般分数系漸化式で、重解のない場合

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ta_n + s}, \quad (\text{特性方程式 } x = \frac{px + q}{tx + s})$$

→特性方程式の二つの解を $\alpha, \beta$ として、

$$a_n = \frac{\alpha b_1 k^{n-1} - \beta}{b_1 k^{n-1} - 1}, \quad b_n = \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}, \quad k = \frac{p - t\beta}{p - t\alpha}.$$

$Z_n$ の一般式は

$$p = R + r, q = rR, t = 1, s = r,$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left( R - \sqrt{R^2 + 4rR} \right),$$

$$k = \frac{R + r - \beta}{R + r - \alpha}.$$

# 質疑・コメント

Q. Rとrの比だけでいいのか？

Rには絶対値が必要ではないか？

A. Rには具体的な値が必要。その値Rに対し、合成抵抗がスライド14・15のようにある比

$(\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  や  $1 + \sqrt{2})$ を持つ。

Q. 今回はシミュレーションで検証をしているが実験もできそう。実際の誤差に対して、結果が強いのか弱いのかは検証が必要だと思う。

A. 素子の誤差に関しては、検証が必要だと考えている。ただ、図中左の抵抗ほど合成抵抗に与える影響が大きいことは確認している。