

整数論に基づく無理数近似値アナログ信号生成回路

平井 愛統*, 桑名 杏奈, 小林 春夫 (群馬大学)

Analog Signal Generator for Irrational Number Approximation Based on Number Theory

Manato Hirai*, Anna Kuwana, Haruo Kobayashi (Gunma University)

キーワード: 無理数値, 抵抗ネットワーク, 連分数展開, 整数論, 信号生成回路

Keywords: Irrational Number, Resistor Network, Number Theory, Signal Generation Circuit

1. はじめに

抵抗ラダーネットワークは, 電流や電圧をある比で分割するために使われ, アナログデジタル変換器/デジタルアナログ変換器(ADC/DAC)の内部回路やアナログ空間フィルタとして回路構成に組み込まれている[1, 2, 3]. 例えば R-2R ラダーは, 多段に接続した抵抗が, 各ノードから見て等価的に一定の抵抗値を持つことを用いて, 各ノードで電流を分割する。この性質を用いた R-2R DA 変換器は広く使われている[1].

R-R ラダーの各ノードから右側を見た合成抵抗は, フィボナッチ数に基づいた抵抗値になる [2]. また, 隣り合う二つのフィボナッチ数の比は黄金数 $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ に収束する [2, 4]. ここから, R-R ラダーの抵抗は黄金数に収束すると考え, この性質を用いて, 二種類の抵抗 R, r からなる抵抗ラダーの合成抵抗と, 各段の抵抗値が異なる抵抗ラダーの合成抵抗を求め, それらの合成抵抗が収束する値を求めた。そして, それらの合成抵抗が連分数としてあらわせることを示した。集積回路内では比精度が良く実現できるので, ラダーを構成する抵抗値が整数比の場合には, 設計値に対して精度のよい信号が発生できる。

本論文は, 抵抗ラダーと無理数の関係について明らかにし, 抵抗ラダーを用いて無理数近似アナログ信号を出力することを検討した内容を報告する。

2. R-r 抵抗ラダー

図 1 は, 二種類の抵抗 R と r からなる抵抗ラダーである。この抵抗ラダーは図 2 のような単位に分解できる。

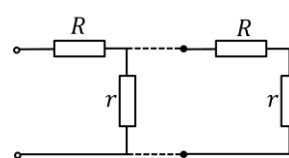


図 1 R-r 抵抗ラダー
Fig. 1 R-r resistor ladder

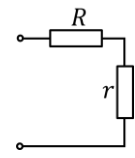


図 2 抵抗ラダーの単位
Fig. 2 Resistor ladder unit

抵抗ラダーを図 2 に示すような回路に分割すると, 端子から見た抵抗値 Z_1 は次式であらわされる。

$$Z_1 = R + r \quad (1)$$

図 2 の抵抗の左に同じ抵抗を接続すると, 図 3 のようになる。

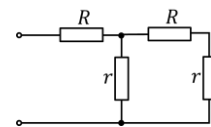


図 3 2 段抵抗ラダー
Fig. 3 2-stage resistor ladder

この抵抗値 Z_2 は, 次式であらわされる。

$$Z_2 = R + \frac{r(R+r)}{r+(R+r)} \quad (2)$$

以上のようにして, R と r の抵抗を多段に接続した場合, n 段接続したときの抵抗 Z_n と n+1 段接続した場合の抵抗 Z_{n+1} の間には次式のような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= R + \frac{rZ_n}{r+Z_n} \\ &= \frac{(r+R)Z_n + rR}{Z_n + r} \end{aligned} \quad (3)$$

これは Z_n に関する漸化式であり, これを解くことで二種類の抵抗 R, r とラダーの段数 n を定めた場合の合成抵抗値を求めた。 Z_n は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
Z_n &= \frac{\alpha k^n - \beta}{k^n - 1} \\
\alpha &= \frac{1}{2}(R + \sqrt{R^2 + 4rR}) \\
\beta &= \frac{1}{2}(R - \sqrt{R^2 + 4rR}) \\
k &= \frac{R + r - \beta}{R + r - \alpha}
\end{aligned} \tag{4}$$

(4)式において、 $1 < k$ であるため、抵抗を接続する段数を増やし n の値が大きくなると、この抵抗値は次式の値 Z_∞ に収束する。

$$\begin{aligned}
Z_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta k^{-n}}{1 - k^{-n}} \\
&\rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(R + \sqrt{R^2 + 4rR})
\end{aligned} \tag{5}$$

$$Z_\infty = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R(R + 4r)}}{2} \tag{6}$$

また、(3)式から R・r ラダーの合成抵抗は、次式のように連分数で表示することができる。 k は整数である。

$$\begin{aligned}
Z_{n+1} &= \frac{R}{k} \left(k + \frac{1}{\frac{R}{kr} + \frac{R}{kZ_n}} \right) \\
&= \frac{R}{k} \left(k + \frac{1}{\frac{R}{kr} + \frac{1}{k + \frac{1}{\frac{R}{kr} + \frac{1}{\ddots}}}} \right)
\end{aligned} \tag{7}$$

図 4 のように、各段の抵抗の値が異なる抵抗ラダーを考える。抵抗ラダーの n 段目の抵抗値は、ある抵抗値 R に対して、 $p_n R$ と $q_n R$ として、 p_n と q_n によって重みづけられているとする。

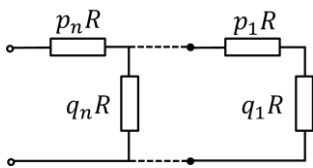


図 4 各段の抵抗値が異なる抵抗ラダー
Fig. 4 Resistor ladder
(different resistance value of each stage)

この時の n 段抵抗ラダーの合成抵抗は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
Z_n &= p_n R + \frac{1}{\frac{1}{q_n R} + \frac{1}{Z_{n-1}}} \\
&= R \left(p_n + \frac{1}{\frac{1}{q_n} + \frac{R}{Z_{n-1}}} \right)
\end{aligned}$$

$$= R \left(p_n + \frac{1}{\frac{1}{q_n} + \frac{1}{p_{n-1} + \frac{1}{\frac{1}{q_{n-1}} + \frac{1}{\ddots}}}} \right) \tag{8}$$

(8)式から、任意の数について、その連分数表示に従って整数比の抵抗を接続することで、 R に対してその数の比を持つ抵抗を作ることができる。

3. 抵抗ラダーを用いた無理数(近似)信号の出力

〈3・1〉 貴金属数

貴金属数は二次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解であり、正の整数 n の値に対して順に、第 n 貴金属数と呼ばれる[5]。二次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解 λ_n とその連分数表示は次式のようにあらわすことができる。

$$\lambda_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \tag{9}$$

$$\lambda_n = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\ddots}}} \tag{10}$$

しばしば、 $n = 1$ の場合を黄金数 ϕ 、 $n = 2$ の場合を白銀数 τ 、 $n = 3$ の場合を青銅数 ξ と呼ぶ[5]。 ϕ 、 τ 、 ξ それぞれの数値は、

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$\tau = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414$$

$$\xi = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3.303$$

である。

貴金属数が(10)式のように連分数展開できることから、(7)式において k と $R/(kr)$ をある整数値 n とすることで、抵抗値が、無理数である貴金属数の比になることが予想される。

(6)式から、R・R ラダーの合成抵抗の収束する値 $Z_{R,R}$ は、次式の黄金数になる。

$$Z_{R,R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} R \tag{11}$$

また、2R・0.5R ラダーの合成抵抗の収束する値 $Z_{2R,0.5R}$ は、(6)式と(7)式から次式の白銀数になる。

$$\begin{aligned}
Z_{2R,0.5R} &= (1 + \sqrt{2})R \\
&= R \cdot \left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

〈3・2〉 $\sqrt{2}$ の近似を出力するラダー

$\sqrt{2}$ は連分数として次式のようにあらわすことができる

[3].

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (13)$$

(13)式と(12)式の連分数部分を比較すると、(12)式の整数部分を1にしたものが(13)式である。これは、白銀数 τ から1を減じたものが $\sqrt{2}$ であることによるものである。

2R-0.5R ラダーの先頭の抵抗を 2R から R に変えた場合を考える。この抵抗ラダーの合成抵抗の収束する値は次式であらわされる。

$$\begin{aligned} Z_{\sqrt{2}} &= R + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \cdot R \\ &= \sqrt{2}R \end{aligned} \quad (14)$$

〈3・2〉 ネイピア数e, 円周率 π の近似を出力するラダー

ネイピア数eは連分数として次式のようにあらわすことができる[6].

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (15)$$

(15)式では省略したが、分数部分の分子をすべて1とした場合の整数部分を並べて表示すると、以下のように規則性を持つ[6].

$$\begin{aligned} e &\approx 2.71828 \dots \\ &= [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots] \end{aligned} \quad (16)$$

図4の、各段の抵抗値が異なる抵抗ラダーにおいて、(8)式の p_n を連分数展開整数部分の奇数番目、 q_n を偶数番目の逆数とすると、抵抗ラダーの合成抵抗のRに対する比は、近似的にネイピア数eになる。

円周率 π を連分数展開すると、その整数部分は規則性を持たない[6]. 円周率 π を次式のように近似すると、連分数として次式のようにあらわされる[6].

$$\begin{aligned} \pi &\approx 3.14159 \\ &= [3, 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4] \end{aligned} \quad (17)$$

これを用いて、ネイピア数の場合と同様に抵抗を接続して抵抗ラダーの合成抵抗のRに対する比は、近似的に円周率 π になる。

4. 回路シミュレータによる検証

〈4・1〉 貴金属数

(12)式を用いて、Rを1k Ω とし、2R-0.5R ラダーに1mAの電流を流し、その時の出力電圧から、抵抗ラダーの合成抵抗を求めた。

段数を3段・5段にしてシミュレーションを行った。シミュレーションに用いた抵抗ラダーを図5(a)に、この時のシ

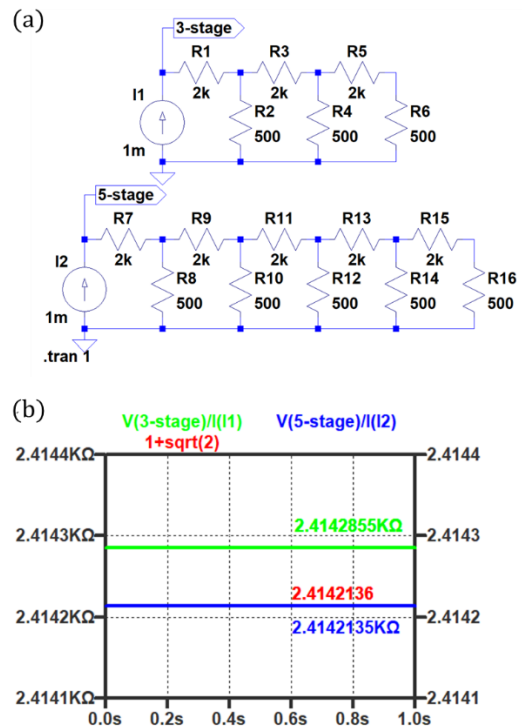
ミュレーション結果を図5(b)に示す。3段の場合の合成抵抗の値は、2.4142855k Ω であり、5段の場合の合成抵抗の値は、2.4142135k Ω であった。

段数の増加に伴い、合成抵抗の値は $\tau = 1 + \sqrt{2}$ に近づいた。

〈4・2〉 $\sqrt{2}$ の近似を出力するラダー

(14)式を用いて、Rを1k Ω とし、先頭の抵抗を2RからRに変えた2R-0.5Rラダーに1mAの電流を流し、その時の出力電圧から、抵抗ラダーの合成抵抗を求めた。

段数を2段・5段にしてシミュレーションを行った。シミュレーションに用いた抵抗ラダーを図6(a)に、この時のシミュレーション結果を図6(b)に示す。

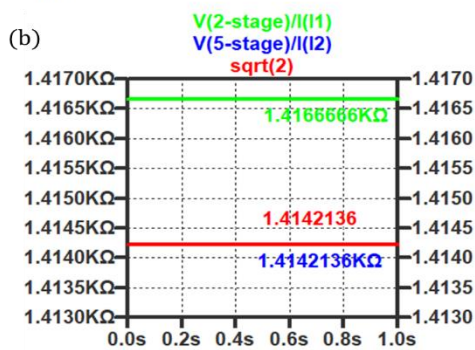
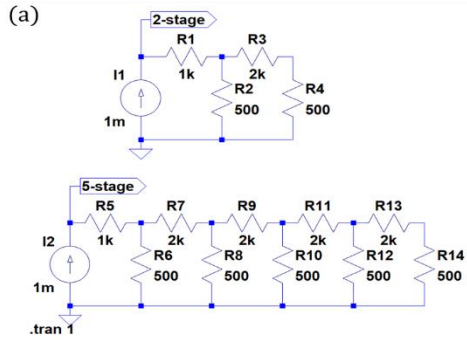


(a)回路図 (b)シミュレーション結果

図5 2R-0.5R ラダー

(a) Circuit diagram. (b) Simulation result

Fig. 5 2R-0.5R ladder



(a)回路図 (b)シミュレーション結果
図 6 $\sqrt{2}$ ラダー

(a) Circuit diagram. (b) Simulation result

Fig. 6 $\sqrt{2}$ resistor ladder

2 段の場合の合成抵抗の値は, 1.4166666 k Ω であり, 5 段の場合の合成抵抗の値は, 1.4142136 k Ω であった.

段数を増やすほど, 合成抵抗の値は(14)式の値に近づくことが確認できた.

〈4・3〉 ネイピア数eと円周率 π の近似を出力するラダー

(16)式を用いて, ネイピア数eを, 次式のように近似した.

$$e \approx [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1] \quad (18)$$

(18)式と(8)式から, (8)式のRを 1 k Ω , p_n を p_4 から順に(18)式の奇数番目, q_n を q_4 から順に(18)式の偶数番目の逆数として, 合成抵抗がネイピア数になる 4 段の抵抗ラダーを作り, シミュレーションで確認した. シミュレーションに用いた回路図を図 7(a)に示す.

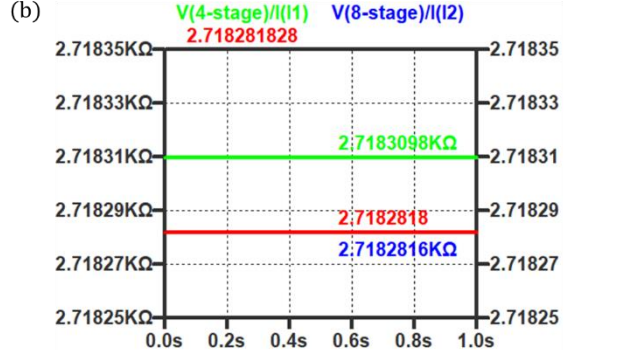
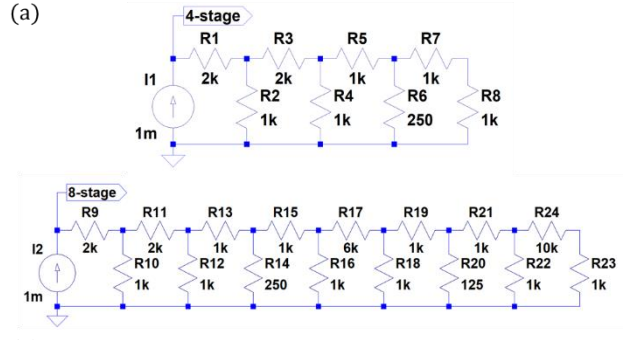
次にネイピア数eを次式のように近似し, ラダーの段数を増やした.

$$e \approx [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1] \quad (19)$$

(19)式で近似した値を用いて, 合成抵抗がネイピア数になる 8 段の抵抗ラダーを作り, シミュレーションで確認した. シミュレーションに用いた回路図を図 7(a)に示す.

4 段と 8 段のシミュレーション結果を図 7(b)に示す. 4 段のラダーでの合成抵抗 Z_e は, 2.7183098 k Ω になり, 8 段のラダーでの合成抵抗は 2.7182816 k Ω になった.

段数を増やすほど, 合成抵抗の値がネイピア数eに近づくことが確認できた.



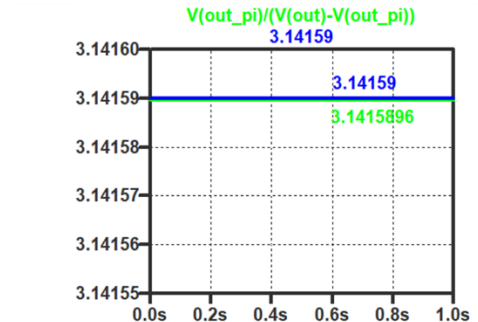
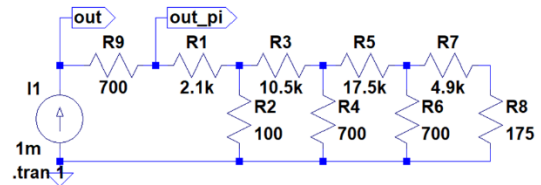
(a)回路図 (b)シミュレーション結果
図 7 ネイピア数e 近似出力ラダー

(a) Circuit diagram. (b) Simulation result

Fig. 7 Napier's constant approximation resistor ladder

(8)式と(17)式から, (8)式においてRを 700 Ω , p_n を p_4 から順に(17)式整数部分の奇数番目, q_n を q_4 から偶数番目の逆数として, 抵抗Rに対して円周率 π の比を持つ抵抗ラダーを作り, シミュレーションで確認した. シミュレーションに用いた回路図を図 8 (a)に, シミュレーション結果を図 8 (b)に示す.

図 8 (b)の出力電圧の比から, 後段の抵抗ラダーと 700 Ω の抵抗 R9 の比は, (17)式で近似した円周率 π に一致した.



(a)回路図 (b)シミュレーション結果
図 8 円周率 π 近似出力ラダー

(a) Circuit diagram. (b) Simulation result

Fig. 8 π approximation resistor ladder

Fig. 8 π approximation resistor ladder

5. まとめ

抵抗ラダーを用いて無理数比の電圧を生成する回路を検討した。対象無理数を連分解することでその抵抗ラダーの構成することができる。例として黄金比、貴金属数、 $\sqrt{2}$ 、ネイピア数 e 、円周率 π の場合の構成を示し、いくつかをSPICEシミュレーションで動作を検証した。

文 献

-
- [1] F. Maloberti, Data Converters, Springer (2007).
 - [2] Y. Kobayashi, S. Shibuya, T. Arafune, S. Sasaki, H. Kobayashi, "SAR ADC Design Using Golden Ratio Weight Algorithm", The 15th International Symposium on Communications and Information Technologies, Nara, Japan (Oct. 2015).
 - [3] H. Kobayashi, J. L. White and A. A. Abidi, "An Active Resistor Network for Gaussian Filtering of Images", IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol.26, no.5, pp.738-748 (May, 1991)
 - [4] 櫻井進、雪月花の数学、祥伝社黄金文庫 (2010)
 - [5] 岩本誠一、江口将生、吉良知文、「黄金・白銀・青銅：数と比と形と率と」(2008)
https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac_download_md/15758/KJ00005471244.pdf
 - [6] 芹沢正三、数論入門、講談社ブルーバックス (2008)