

クレストファクタ低減アルゴリズムの共通性の解析

柴崎有祈子* 浅見幸司 桑名杏奈 小林春夫 (群馬大学)

Analysis of Multi-Tone Generation Algorithms for Crest Factor Reduction

Yukiko Shibasaki*, Koji Asami, Anna Kuwana, Haruo Kobayashi (Gunma University)

キーワード: マルチトーン信号, アナログ IC テスト, 信号生成, クレストファクタ(PAPR)低減
(Multi-Tone Signal, Analog IC Testing, Signal Generation, Crest Factor Reduction, PAPR Reduction)

1. はじめに

近年、シリコン半導体の価格は下落しているものの、LSIの高集積化に伴って、集積回路テストにかかるコストは増大している。テスト時間の短縮によるテストコスト削減が重要課題である。また、車載・医療用LSIの需要の高まりやIoT (Internet of Things)の発展を受けて、システムの高信頼性化要求が高くなり、LSIテスト品質の要求水準も高くなっている。こうした背景から、低コスト・高品質を両立するLSIテスト技術が求められている。

線形システムの周波数応答測定において、プローブ信号としてシングルトーン (単一正弦波) 信号を用いると、精度は高くなるものの、テストに膨大な時間がかかってしまう。そこで広帯域を測定する場合には、マルチトーン (複数正弦波の和) 信号が用いられるが、各トーン信号の振幅が小さくなってしまふことで、SNRが悪くなり、テスト精度が低くなってしまふ。この問題を解決するために、クレストファクタ低減アルゴリズムを用いてマルチトーン信号を生成する必要がある。

本論文では、4つのアルゴリズムのクレストファクタ低減効果の類似性を示し、Narahashi位相の導出を利用して、それらの初期位相設定式の統一を行う。

2. マルチトーン信号について

マルチトーン信号とは、複数のトーン信号から構成される信号で、式(1)のように表される。

$$s(t) = \sum_{k=1}^N \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \theta_k\right) \quad (1)$$

ただし、Nはトーン数、kは周波数、Tは1周期の分解能、tは時間、 θ_k は初期位相を表している。本論文では、等振幅・等周波数間隔のマルチトーン信号を扱う。

マルチトーン信号の最大振幅は、基本的にトーン数Nと

共に増大する。広帯域を測定する際には使用するトーン数が多くなってしまふが、このようなマルチトーン信号を使用すると、ハードウェアの設計・テストに問題が生じてしまふ。マルチトーン信号は、単一の伝送経路でN個のトーンを通すことが望ましい。等振幅のトーン信号において、伝送路の増幅器がマルチトーン信号の最大振幅に対応するように設計されていないと、深刻な相互変調(IM)歪みが発生する可能性がある。しかし、増幅器がこのようなピークに対応するように設計されていたとしても、最大振幅の大きなマルチトーン信号を入力してしまふと、各トーンあたりの増幅度が小さくなるので、効率が著しく劣化してしまふ、SNRが低くなってしまふ。したがって、相互変調歪の影響を低減し、なおかつ高いSNRをもつマルチトーン信号を生成するためには、トーン数Nが大きい場合において、マルチトーン信号の最大振幅を低減することが不可欠となる[1]。

等振幅・等周波数間隔のマルチトーン信号の最大振幅低減効果は、クレストファクタの指標を用いて評価される。クレストファクタは式(2)に示すように、実効値に対する最大振幅の比として定義される[2]。

$$Crest\ Factor[dB] = 20\log_{10} \left[\frac{\text{最大振幅}}{\text{実効値}} \right] \quad (2)$$

マルチトーン信号の最大振幅は、実効値とは異なり、各トーンの初期位相によって大きく変動する。したがって、初期位相を適切な値に設定することにより、マルチトーン信号の最大振幅、すなわちクレストファクタ低減が可能となるため、各種の初期位相設定法が検討されている。

3. シミュレーション結果

3.1 初期位相がすべて0のマルチトーン信号

ここでは、式(1)における θ_k がすべて0の場合におけるシミュレーション結果を図1に示す。トーン数NはN=2, 16,

128, 1024, 振幅はすべて 1 に正規化し、時間軸は 0 から 8191 の 8192 ポイントに設定した。トーン数 N が増加するにしたがって、インパルス信号のような波形に近づくことがわかる。

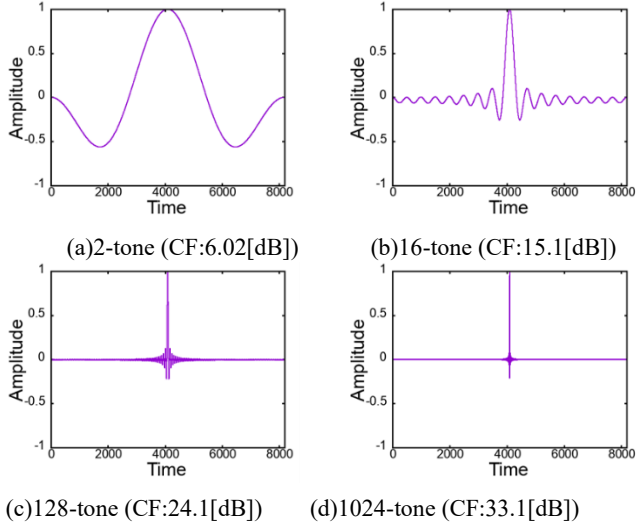


図 1 ゼロ位相のマルチトーン信号

3.2 初期位相が乱数であるマルチトーン信号

ここでは、式(1)における θ_k がすべて乱数の場合のシミュレーション結果を図 2 に示す。[3]に記載されている平均 0、分散 1 の正規分布の乱数を種として使用した。トーン数 N は $N=2, 16, 128, 1024$ 、振幅はすべて 1 に正規化し、時間軸は 0 から 8191 の 8192 ポイントに設定した。ホワイトノイズのような波形が生成されることがわかる。

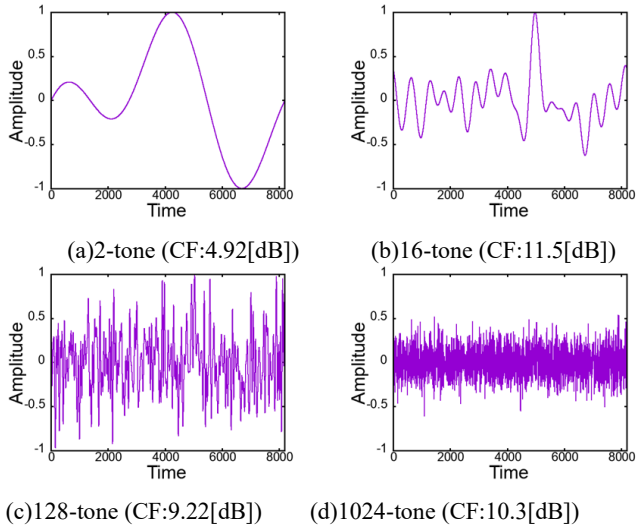


図 2 ランダム位相のマルチトーン信号

3.3 4つの Crest Factor 低減アルゴリズム

ここでは、Newman[3], Kitayoshi[4], Schroeder[5], Narahashi[6]の4つの初期位相設定式で定義されたものを式(1)の θ_k として用いた。定義式を以下に示す。

$$\text{Newman} \quad \theta_k = \frac{\pi}{N} (k-1)^2 \quad (3)$$

$$\text{Kitayoshi} \quad \theta_k = \frac{\pi}{N} k(k+1) \quad (4)$$

$$\text{Schroeder} \quad \theta_k = -\frac{\pi}{N} (k-1)k \quad (5)$$

$$\text{Narahashi} \quad \theta_k = \frac{\pi}{N-1} (k-1)(k-2) \quad (6)$$

トーン数 N は $N=2, 16, 128, 1024$ 、振幅はすべて 1 に正規化し、時間軸は 0 から 8191 の 8192 ポイントに設定した。Newman 位相を用いた結果を図 3 に示す。

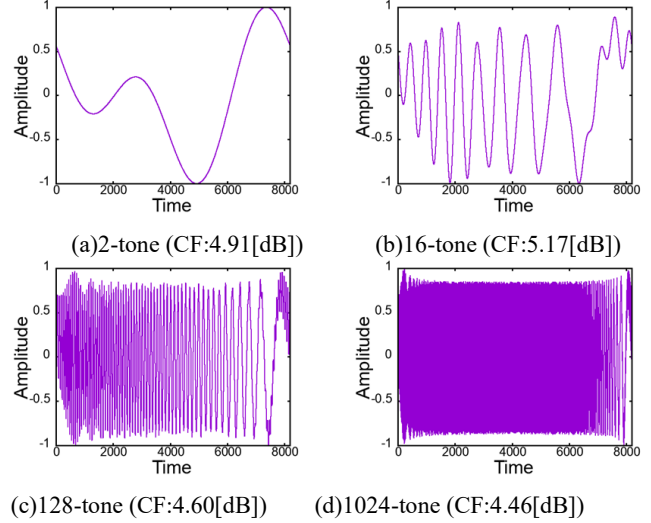


図 3 Newman 位相のマルチトーン信号

3.4 クレストファクタ低減効果の比較

シミュレーションで得られた Crest Factor の比較を行う。最初に 3.1 節で示したゼロ位相、3.2 節で示したランダム位相、3.3 節で示した4つのアルゴリズムの結果の比較を図 4 に示す。横軸はトーン数 N 、縦軸は Crest Factor である。ゼロ位相とランダム位相については、トーン数 N の増大と共に Crest Factor が増大しているが、4つの初期位相設定式においては、トーン数 N が増大しても、Crest Factor を適切に低減できていることがわかる。

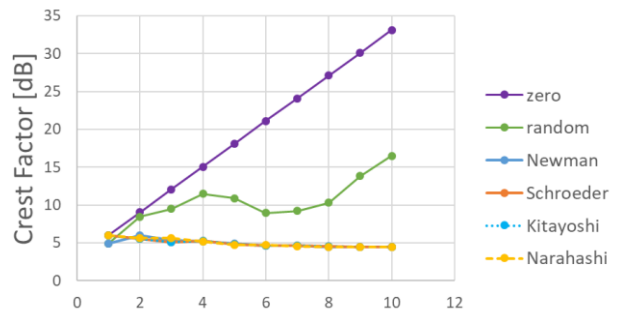


図 4 クレストファクタの比較

次に、4つのアルゴリズムで生成したマルチトーン信号の Crest Factor を比較したものを図 5 に示す。Schroeder 位相と Kitayoshi 位相の結果が完全に一致していることがわかる。また、4つのアルゴリズムすべてに関してトーン数 N

が増加すると、クレストファクタが 4.5[dB]程度に収束するという傾向があり、クレストファクタ低減効果はほとんど同程度であることがわかった。

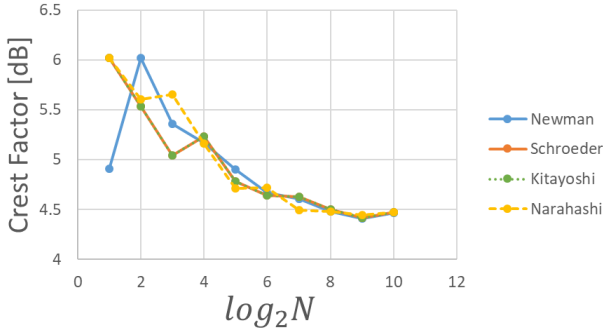


図5 4つのアルゴリズムのクレストファクタ比較

4. 4つのアルゴリズムの共通性の解析

3.4節において、4つのアルゴリズムはほぼ同等のクレストファクタ低減効果を持つことを示した。ここでは、Narahashi 位相の導出を利用して、それらのアルゴリズムの共通性を解析する。

4.1 Narahashi 位相の導出

ここでは、Narahashi 位相の導出を行う。[1]において、クレストファクタは式(7)のように表される。

$$PAPR = \max_t \left[1 + \frac{2}{N} P_0(t) \right] \quad (7)$$

$P_0(t)$ を展開すると、式(8)に示すように、周波数に対して独立な、 $N-1$ 組の総和項からなることがわかる。

$$P_0(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \cos(2\pi\Delta f_0 t + \theta_{k+1} - \theta_k) + \sum_{k=1}^{N-2} \cos(2\pi \cdot 2 \cdot \Delta f_0 t + \theta_{k+2} - \theta_k) + \dots + \cos\{2\pi(N-1)\Delta f_0 t + \theta_N - \theta_1\} \quad (8)$$

$P_0(t)$ は平均電力からの変動分を表しており、これを最小にするような初期位相 θ_k を求めればよい。しかし、このような初期位相を解析的に求めることは困難であるため[7]、第1総和項を最小にできる初期位相を設定する。この際、 $P_0(t)$ の第1総和項には同一の周波数成分 Δf_0 を有する \cos の項が $N-1$ だけあるので、対称多相交流回路の起電力の瞬時値とのアナロジーにより $P_0(t)$ の第1総和項をゼロにすることができる。よって、式(9)が得られる。

$$\{\theta_{k+1} - \theta_k\} - \{\theta_k - \theta_{k-1}\} = \frac{2\pi}{N-1} \quad (9)$$

これより、Narahashi 位相の基本式が式(10)のように導出できる。

$$\theta_k = (k-1)\theta_2 - (k-2)\theta_1 + \frac{(k-1)(k-2)}{N-1}\pi \quad (10)$$

4.2 4つのアルゴリズムの統一

ここでは、4.1で説明した Narahashi 位相の考え方を応用して、他の3つの初期位相設定式の統一を行う。

まず、Narahashi 位相について、二階微分をとった結果を図6に示す。ここでは、 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ とし、初期位相の式は $\theta_k = (k-1)(k-2)\pi/(N-1)$ とする。これを見ると、二階微分の値が式(9)と一致することがわかる。

k	1	2	3	4	5	6
θ_k	0	0	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 2$	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 6$	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 12$	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 20$
Ψ_k	0	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 2$	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 4$	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 6$	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 8$	
二階微分		$\frac{\pi}{N-1} \cdot 2$	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 2$	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 2$	$\frac{\pi}{N-1} \cdot 2$	

図6 Narahashi 位相の二階微分

次に、Newman 位相について、二階微分をとった結果を図7に示す。初期位相の式は、式(3)とする。

k	1	2	3	4	5	6
θ_k	0	$\frac{\pi}{N}$	$\frac{\pi}{N} \cdot 4$	$\frac{\pi}{N} \cdot 9$	$\frac{\pi}{N} \cdot 16$	$\frac{\pi}{N} \cdot 25$
Ψ_k	$\frac{\pi}{N}$	$\frac{\pi}{N} \cdot 3$	$\frac{\pi}{N} \cdot 5$	$\frac{\pi}{N} \cdot 7$	$\frac{\pi}{N} \cdot 9$	
二階微分		$\frac{\pi}{N} \cdot 2$	$\frac{\pi}{N} \cdot 2$	$\frac{\pi}{N} \cdot 2$	$\frac{\pi}{N} \cdot 2$	

図7 Newman 位相の二階微分

図7より、Narahashi 位相と Newman 位相において、二階微分が同じ値をとることがわかった。(分母が $N-1$ と N で異なるが、同一であるとみなしてよい。これについては、4.3に後述する。よって以下では、二階微分の分母を M とおく。)

次に、これらの2式が異なる原因を分析する。式(3)と(10)を k について解くと、式(11)、(12)のようになる。

$$\theta_k = \frac{\pi}{M} k^2 + \left(-\frac{3\pi}{M} + \theta_2 - \theta_1 \right) k + \left(\frac{\pi}{M} - \theta_2 + \theta_1 \right) \quad (11)$$

$$\theta_k = \frac{\pi}{M} (k-1)^2 = \frac{\pi}{M} k^2 - 2 \cdot \frac{\pi}{M} k + \frac{\pi}{M} \quad (12)$$

これら2式について係数比較を行うと、 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/M$ となっている。他の位相式についても同様に調べてみると、Kitayoshi 位相については $\theta_1 = 2\pi/M, \theta_2 = 6\pi/M$ 、Schroeder 位相については $\theta_1 = 0, \theta_2 = 2\pi/M$ となっている。

以上のことから、4つのアルゴリズムは式(10)において θ_1 と θ_2 の設定値を変えるだけで導出することができる。図5で、クレストファクタ低減効果がほぼ同等であったのは、このためである。

4.3 分母 (N と N-1) の不一致

4.2において、二階微分した値の分母が、Narahashi 位相では N-1、他3つの初期位相設定法においては N と異なっている。これについて、なぜ両者を同じ M とおいてよいかを述べる。

まず、3つの初期位相設定方法 (Newman、Kitayoshi、Schroeder 位相) について考える。例として、Newman で N=6 のとき、位相は図8のようにベクトル図において、単位円を6分割、すなわち N 分割している。したがって、二階微分の分母は N になる。

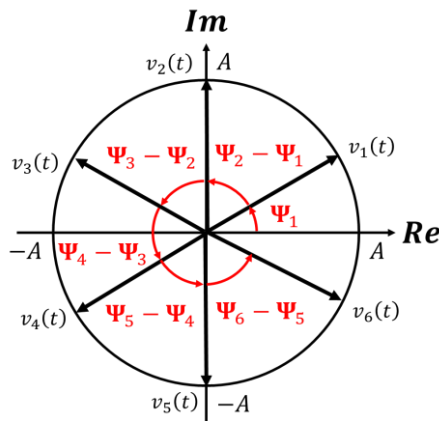


図8 Newman 位相のベクトル図

これに対して、Narahashi の初期位相設定方法においては、N=6 のとき、位相は図9のベクトル図において、単位円を5等分、すなわち N-1 等分していることから、二階微分の分母は N-1 となるのである。

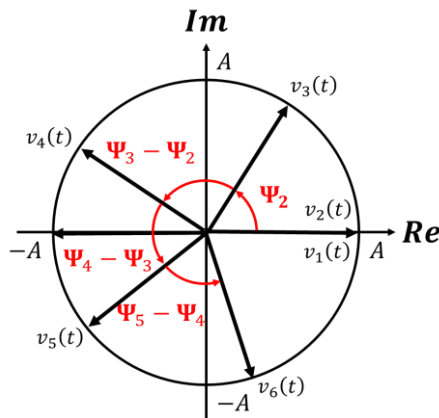


図9 Narahashi 位相のベクトル図

したがって、分母の不一致は、 θ_1 と θ_2 の設定値によって単位円を分割する数に変化することで起こるため、4.2において同じ M とおいても問題がないことがわかる。

5. まとめ

本論文ではゼロ位相・乱数位相・4つのアルゴリズムで生成したマルチトーン信号をシミュレーションし、結果を比較することで、アルゴリズムが適切にクレストファクタを低減できることを示した。また、4つのアルゴリズムのクレストファクタ低減効果の類似性について、Narahashi 位相の導出を応用することで、別々の理論から導出された4つの初期位相設定式を、Narahashi 位相の基本式に統一できることを示した。

文 献

- [1] 檜橋, 野島, “マルチトーン信号のピーク対平均電力比 (PAPR) を低減する初期位相設定法,” 電子情報通信学会論文誌, vol. J78-B-II, no.11, pp.663-670, '95/11.
- [2] S. Boyd, “Multitone Signals with Low Crest Factor,” IEEE Trans. Circuit Syst., vol. CAS-33, no.10, pp. 1018-1022, Oct. 1986.
- [3] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, “Numerical recipes in C [日本語版], (丹慶勝市, 奥村晴彦, 佐藤俊郎, 小林誠訳), 技術評論社
- [4] D. J. Newman, “An L1 Extremal Problem for Polynomials,” Proc. Amer. Math. Soc., no.16, pp. 1287-1290, Dec. 1965.
- [5] H. Kitayoshi, et. al., “DSP Synthesized Signal Source for Analog Testing Stimulus and New Test Method”, IEEE International Test Conference, Jan. 1985.
- [6] M. R. Schroeder, “Synthesis of Low-Peak-Factor Signals and Binary Sequence with Low Autocorrelation,” IEEE Transactions on Information Theory, vol. 16, pp. 85-89, Jan. 1970.
- [7] B. M. Popovic, “Synthesis of Power Efficient Multitone Signals with Flat Amplitude Spectrum,” IEEE Trans. Commun., vol. 39, no. 7, pp. 1031-1033, Jun. 1991.