

貴金属比を用いた 等価時間サンプリングでの高効率波形取得条件の検討

佐々木 優斗 山本 修平* 桑名 杏奈 小林 春夫 (群馬大学)

Efficient Waveform Acquisition Condition in Equivalent-Time Sampling System by Metallic Ratio
Yuto Sasaki, Shuhei Yamamoto*, Anna Kuwana, Haruo Kobayashi, (Gunma University)

キーワード: 等価時間サンプリング, オシロスコープ, 波形抜け, 黄金比, 白銀比, 貴金属比
(equivalent-time sampling, sampling oscilloscope, waveform missing, golden ratio, silver ratio, metallic ratio)

1. はじめに

サンプリング・オシロスコープは、被測定信号が繰り返し信号である場合、等価時間サンプリング技術を用いて広帯域の信号を比較的低い周波数でサンプリングする(文献⁽⁴⁾)。この技術を用いると、ナイキスト・レートよりも低いサンプリング周波数を用いても高周波波形を再現することができる。しかし、被測定信号の周波数 (f_{sig}) とサンプリング・クロック (f_{CLK}) の周波数がある関係にあるとき、波形抜けが起こってしまうという問題がある。このとき、波形を再現するために非常に多くのデータが必要となり、測定に長時間かかってしまうため非効率である。

筆者らは、被測定信号とサンプリング・クロックの周波数比が黄金比 (1 : 1.618...) であるとき、効率的に波形を取得できることを発見した(文献⁽⁵⁾)。本論文では、白銀比等の同じ貴金属比の場合にも効率的波形取得が可能であるか検討する。

2. 等価時間サンプリング

波形をサンプリングし測定するための技術には、実時間サンプリングと等価時間サンプリングがある。実時間サンプリングは単発信号を測定することができるが、サンプリング・クロックの周期以上の時間分解能を得ることができない。一方、等価時間サンプリングは繰り返し信号しか測定することができないが、サンプリング・クロックの周期以上の時間分解能を得ることができる。等価時間サンプリング技術にはシーケンシャルサンプリング等いくつかの種類が存在するが、本研究ではランダム・サンプリングをターゲットとする。

(2.1) ランダム・サンプリング

図1にランダム・サンプリングの原理を示す。ランダム・サンプリングは、被測定信号と非同期的なサンプリング・クロックを用いて波形を取得する。被測定信号は繰り返し信号

であり、サンプリング・クロックによりサンプリングされた時間(位相)は保持される。多数のデータを集め波形を再現することができる。

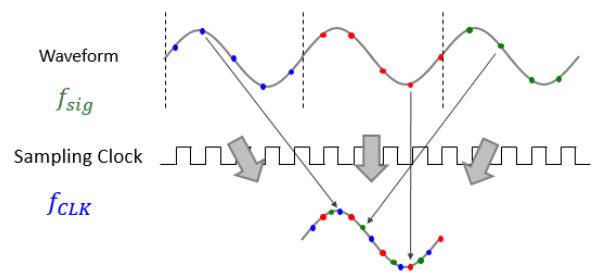


図1 ランダム・サンプリングの原理
Fig. 1 Principle of random sampling.

(2.2) 波形抜け

ランダム・サンプリングでは、一般にサンプリング点が被測定信号の一周期に渡ってランダムに出現する(図2参照)。しかし、(1) サンプリング・クロックの周波数が被測定信号に比べて大きすぎる場合(図3参照)、(2) サンプリング・クロックの周波数が被測定信号の高調波や低調波の整数倍に近い場合(図4参照)、(3) サンプリング・クロックの周波数が被測定信号と近い場合(図5参照)では波形抜けが生じ、波形を再現するために非常に多くのデータが必要となり、波形全体を再現するのに時間がかかってしまう。

$$f_{CLK} \gg f_{sig} \dots \dots \dots (1)$$

$$f_{CLK} \approx \frac{1}{\alpha} \times f_{sig} \dots \dots \dots (2)$$
$$\left(\alpha \approx \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots \right) \dots \dots \dots$$

$$f_{CLK} \approx f_{sig} \dots \dots \dots (3)$$

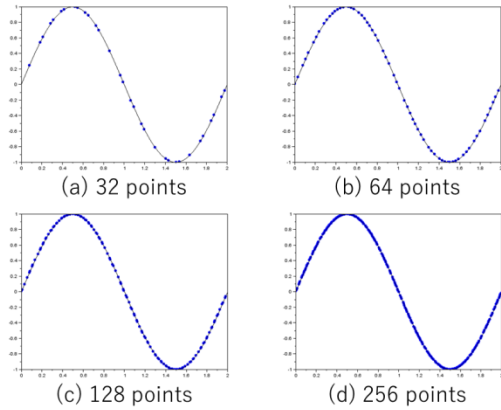


図 2 一般的なランダム・サンプリングの推移
Fig. 2 Development of reconstructed waveform for random sampling.

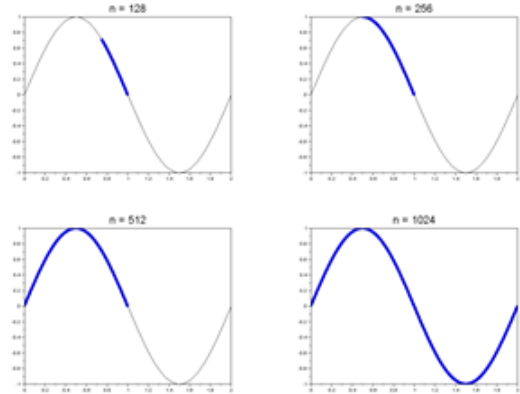


図 5 波形抜け ($f_{CLK} \approx f_{sig}$)
Fig. 5 Waveform missing in case of $f_{CLK} \approx f_{sig}$.

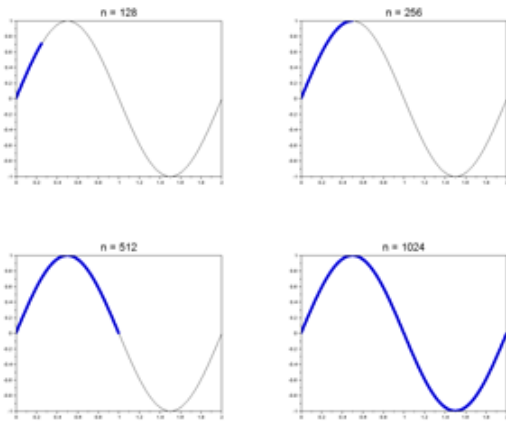


図 3 波形抜け ($f_{CLK} \gg f_{sig}$)
Fig. 3 Waveform missing in case of $f_{CLK} \gg f_{sig}$.

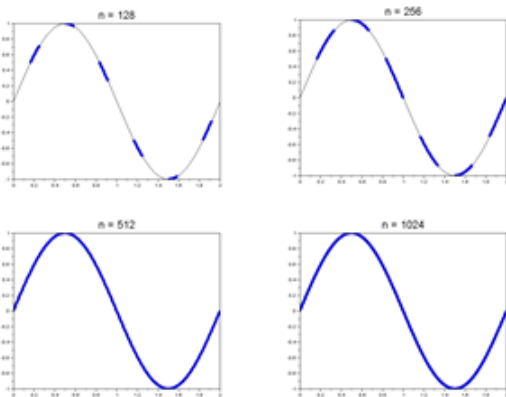


図 4 波形抜け ($f_{CLK} \approx (1/6)f_{sig}$)
Fig. 4 Waveform missing in case of $f_{CLK} \approx (1/6)f_{sig}$.

〈2.3〉 効率について

一般に、高効率とは高速で高分解能を意味する。しかし、本研究ではサンプリング中に波形抜けが起こらないことを高効率と定義する (図 6 参照)。したがって、波形抜け条件 (1) は高速で高分解能だが、高効率とはみなさない。波形抜けは隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離の比が大きいことと定義することができる。一方、最大の距離と最小の距離の比が最小 (1 : 1) となるのは、サンプリング点が周期を等分している場合である。しかし、これはランダム・サンプリングでは起こりえない。つまり、隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離の比を小さく保ったままサンプリングできることを高効率とする。

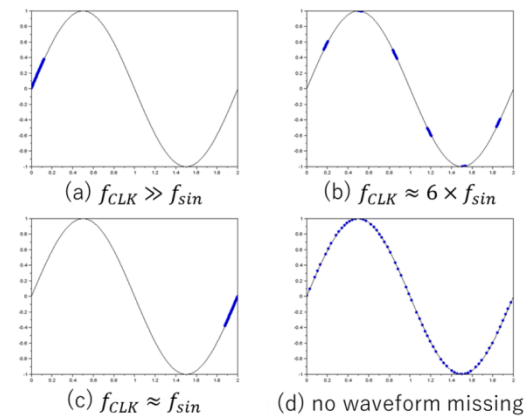


図 6 波形抜けと高効率サンプリング
Fig. 6 Waveform reconstruction comparison for random sampling.

3. 黄金比サンプリング

黄金比（1 : φとおく）とは、

$$1: \frac{1+\sqrt{5}}{2} \dots\dots\dots (4)$$

の比である。被測定信号とサンプリング・クロックの周波数比を黄金比にすることを黄金比サンプリングと呼ぶ（式5参照）。

$$f_{CLK} = \varphi \times f_{sig} \dots\dots\dots (5)$$

図7に黄金比サンプリングで位相0からサンプリングされた正弦波を示す。番号はサンプリングされた順番である。表1に図7のサンプリング点の位相と前後のサンプリング点との距離、隣接するサンプリング点間の最大、最小の距離を示す。位相は0～1に正規化してある。前のサンプリング点と次のサンプリング点の距離は常に1/φまたは1/φ²であり、近付きすぎることがない。また、隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離の比が1 : φまたは1 : φ²を保ったままサンプリングされている。加えて、隣接するサンプリング点間の距離の比にこれ以外の比は存在しない。

図8に黄金比サンプリングしたときのサンプリング点数(N)毎の隣接するサンプリング点間の最大・最小距離を示す。赤い点が最大の距離、青い点が最小の距離を表す。最大、最小の距離はフィボナッチ数

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{m+2} = F_m + F_{m+1} \dots\dots\dots (6)$$

(1, 1, 2, 3, 5...) 毎に1/φとなっている。フィボナッチ数列の隣り合う項の比の極限は黄金比に収束し（式7参照）、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \varphi \dots\dots\dots (7)$$

また、フィボナッチ数の総和は

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1 \dots\dots\dots (8)$$

となるため、およそサンプリング点数をφ倍にすると隣接するサンプリング点間の最大と最小の距離が1/φとなる（式9参照）。

$$\frac{\sum_{k=1}^{m+1} F_k}{\sum_{k=1}^m F_k} = \frac{F_{m+3}-1}{F_{m+2}-1} \approx \varphi \dots\dots\dots (9)$$

結果、約1/Nで時間分解能が向上する。サンプリング点が位相にランダムに現れる場合は1/N、サンプリング点が位相を等分する場合は1/Nの時間分解能なので、黄金比サンプリングによって隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離の比を小さく保ったまま高効率な波形取得がなされることがわかる。

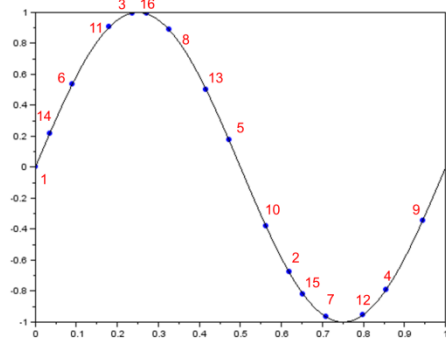


図7 正弦波の黄金比サンプリング

Fig. 7 Sampling order with the golden ratio sampling starting from phase 0 (16 points).

表1 図7のサンプリング点の位相と間隔

Table 1 Sampled phases and their gaps (Fig. 7).

No.	Phase	Phase Distance	Max. Step	Min. Step
1	0.000	0.618	1	1
2	0.618		0.618	0.382
3	0.236	0.618	0.382	0.236
4	0.854		0.382	0.146
5	0.472	0.382	0.236	0.146
6	0.090		0.236	0.090
7	0.708	0.382	0.236	0.090
8	0.326		0.146	0.090
9	0.944	0.382	0.146	0.056
10	0.562		0.146	0.056
11	0.180	0.618	0.146	0.056
12	0.798		0.146	0.056
13	0.416	0.382	0.090	0.056
14	0.034		0.090	0.034
15	0.652	0.381	0.090	0.034
16	0.271		0.090	0.034

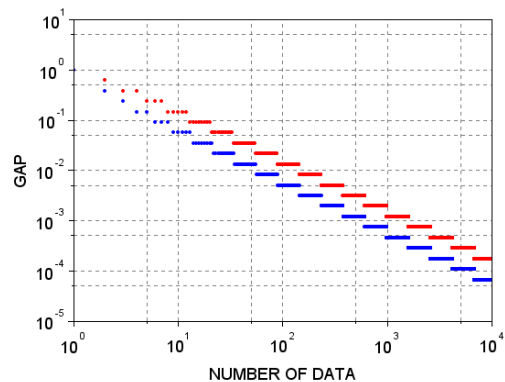


図8 黄金比サンプリングしたときの隣接するサンプリング点間の最大・最小距離の推移

Fig. 8 Maximum and minimum steps in golden ratio sampling.

4. 貴金属比サンプリング

貴金属比 (1 : Mとおく) とは、

$$1: \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots \dots \dots (10)$$

の比である。n = 1 の場合は黄金比であり、n = 2 の場合は白銀比、n = 3 の場合は青銅比と呼ばれる。被測定信号とサンプリング・クロックの周波数比を貴金属比にすることを貴金属比サンプリングと呼ぶ。フィボナッチ数列の隣り合う項の比の極限が黄金比になるように、第n貴金属数にも隣り合う項の比の極限が貴金属比になる数列が存在する(式11)。

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{m+2} = nF_{m+1} + F_m \dots \dots \dots (11)$$

図9に白銀比サンプリングしたとき、図10に青銅比サンプリングしたときのサンプリング点数毎の隣接するサンプリング点の最大・最小の距離を示す。最小の距離は

$$F_0 = 1, F_1 = n - 1, F_{m+2} = nF_{m+1} + F_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \dots \dots \dots (12)$$

点毎に 1/M 倍になっている。また、最大の距離は

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{m+2} = nF_{m+1} + F_m \quad (m = 0 \dots 0_n, 1_1 \dots 1_n, 2_1 \dots 2_n, \dots) \dots \dots \dots (13)$$

点毎に減少しており、nF_m点毎に 1/M 倍となっている。

サンプリング中に同時に出現するサンプリング点間の距離の値はnの値に関わらず2~3個であり、それらの比の最大は、n + 1パターン存在し

$$1: M - m \quad (\text{while } M - m > 1, m = -1, 0, 1, 2, \dots) \dots \dots (14)$$

となっている。つまり、隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離の比を小さく保ったままサンプリングできる。また、黄金比サンプリングと同様にして、約 1/N で時間分解能が向上している。

n = 1 (黄金比) の場合が最大の距離と最小の距離の比が一番小さく、数字が増えるにつれ比が大きくなっていく。しかし、一周周期当たりのサンプリング数が増加するため、高速にサンプリングすることができる。

5. まとめ

本論文では、貴金属比を用いた等価時間サンプリングでの効率的波形取得条件について検討した。黄金比サンプリングするとサンプリング点間の比を保ったまま高効率にサンプリングできることは確認できていたが、貴金属比サンプリングでも同様に高効率にサンプリングすることができることを今回新たに確認した。黄金比サンプリングの場合は被測定信号の一回の繰り返しにつき1~2点しかサンプリングできないが最も効率が良く、貴金属比サンプリングの場合は一回の繰り返し毎にサンプリングできる点数を増やすことができるため高速である。

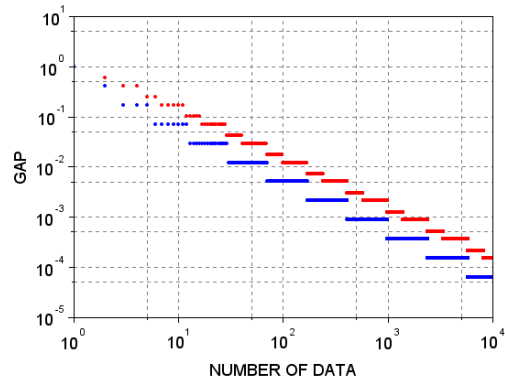


図9 白銀比サンプリングしたときの隣接するサンプリング点間の最大・最小距離の推移
Fig. 9 Maximum and minimum steps in silver ratio sampling.

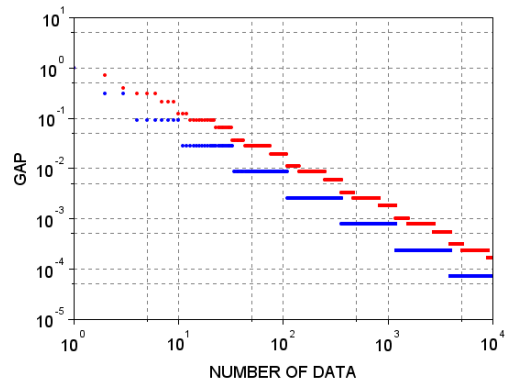


図10 青銅比サンプリングしたときの隣接するサンプリング点間の最大・最小距離の推移
Fig. 10 Maximum and minimum steps in bronze ratio sampling.

文 献

- (1) D. E. Toeppen : "Acquisition Clock Dithering in a Digital Oscilloscope", Hewlett-Packard Journal, Vol.48, No.2 pp.26-28 (1997)
- (2) K. Rush and D. J. Oldfield : "A Data Acquisition System for 1-GHz Digitizing Oscilloscope", Hewlett-Packard Journal, Vol.37, No.4 pp.4-11 (1986)
- (3) M. Kimura, A. Minegishi, K. Kobayashi, and H. Kobayashi : "A New Coherent Sampling System with a Triggered Time Interpolation", IEICE Trans. On Fundamentals, Vol.E84-A, No.3 pp.713-719 (2001)
- (4) M. Kimura, K. Kobayashi, and H. Kobayashi : "A Quasi-Coherent Sampling Method for Wideband Data Acquisition", IEICE Trans. On Fundamentals, Vol.E85-A, No.4 pp.757-763 (2002)
- (5) Y. Sasaki, Y. Zhao, Anna Kuwana, and H. Kobayashi : "Highly Efficient Waveform Acquisition Condition in Equivalent-Time Sampling System", 27th IEEE Asian Test Symposium, Hefei, Anhui, China (2018)