

連分数展開を用いる近似無理数の抵抗回路

— 零約術の電気回路への応用 —

Resistance Circuit of Irrational Number Approximation
Based on Continued Fractions

平井愛統, 桑名杏奈, 小林春夫 (群馬大学)

Manato Hirai, Anna Kuwana, Haruo Kobayashi (Gunma University)

Abstract

This paper describes the method to generate irrational number ratio signals by using a resistor ladder and the relation between resistor ladders and irrational numbers. Irrational numbers are expressed as simple continued fractions configured by integers. The combined resistance of resistor ladders is expressed as continued fractions, too. We have designed resistor ladder networks whose overall equivalent resistance values are irrational number approximation ratios to a certain resistance value. Our Circuit simulation has verified this method.

1. はじめに

連分数は分数の分母にさらに分数が連なったものであり、桁数の多い少数や無理数の近似値を連分数としてあらわすことができる。零約術は関孝和が考案し、建部賢弘とその兄の建部賢明が発展させたといわれている。賢明が考案した零約術は、長い小数を分数に近似する方法で、互除法を駆使するが、その結果は、今日では連分数展開とも呼ばれている[1]。

本稿は、この連分数展開を用いて、電子回路中で、整数比の抵抗値を持つ抵抗から無理数近似値の比を持つ等価的な抵抗を作り出す方法を調査し回路シミュレーション検証した結果を報告するものである。

2. 連分数展開を用いた抵抗ラダーの構成

電子回路中の素子の一つである抵抗は、ある電圧を印加したときにその電圧の大きさに比例した電流が流れる、という性質を持つ。この時の電流 I (単位は A、アンペア) と電圧 V (単位は V、ボルト) の比を、電気抵抗 R (単位は Ω 、オーム) といい、 $R = V/I$ である。

いま、二種類の抵抗 R と r があるとすると、この二種類の抵抗を図 1(a) と図 1(b) のようにそれぞれ直列接続、並列接続すると、これらは等価的に

$$R_S = R + r \tag{1}$$

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \leftrightarrow R_P = \frac{R \cdot r}{R + r} \tag{2}$$

という抵抗になる。つまり、二つの抵抗を直列に接続した場合の合成抵抗は「それぞれの抵抗の和」になり、並列に接続した場合の合成抵抗の逆数は「それぞれ抵抗の逆数の和」になる。

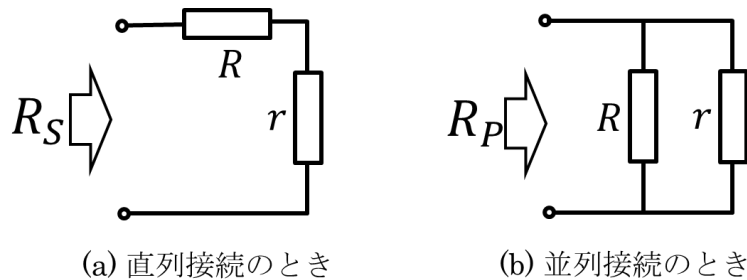
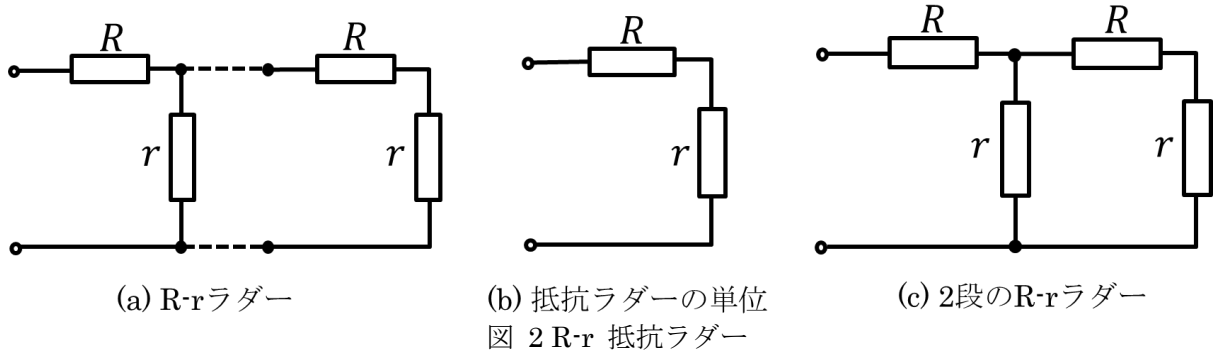


図 1 抵抗の接続

この二種類の抵抗 R と r で、図 2(a) に示すような“抵抗ラダー”、つまり抵抗のはしごを構成した場合の

合成抵抗を考え、これを R-r ラダーと呼ぶことにする。ラダーが一段の場合の合成抵抗 Z_1 は、上記の直列接続の場合の合成抵抗から、 $Z_1 = R + r$ である。ラダーが二段の場合の合成抵抗 Z_2 は、 $Z_2 = R + \frac{r(R+r)}{r+(R+r)}$ で



ある。

この作業を繰り返すと、 k 段接続した場合の合成抵抗 Z_k と $k + 1$ 段接続した場合の合成抵抗 Z_{k+1} の関係から、次のような漸化式がたつ。

$$Z_{k+1} = R + \frac{rZ_k}{r + Z_k} = \frac{(r + R)Z_k + rR}{Z_k + r} \quad (3)$$

この漸化式から、図のような R と r からなる k 段の抵抗ラダーの合成抵抗は、以下の式で表される。

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{\alpha\gamma^k - \beta}{\gamma^k - 1} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \left(R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right) \\ \beta &= \frac{1}{2} \left(R - \sqrt{R^2 + 4rR} \right) \\ \gamma &= \frac{R + r - \beta}{R + r - \alpha} \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式において、 $1 < \gamma$ であるため、接続する段数を増やし k が大きくなると、この抵抗値は次式の値 Z_∞ に収束する。

$$Z_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} Z_k \ \& \ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta\gamma^{-k}}{1 - \gamma^{-k}} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \left(R + \sqrt{R^2 + 4rR} \right) \quad (5)$$

また、式(3)から $k + 1$ 段の R-r ラダーの合成抵抗は、次式のように連分数で表示することができる。 m は整数である。

$$Z_{k+1} = \frac{R}{m} \left(k + \frac{1}{\frac{R}{mr} + \frac{R}{mZ_n}} \right) = \frac{R}{m} \left(m + \frac{1}{\frac{R}{mr} + \frac{1}{m + \frac{1}{\frac{R}{mr} + \frac{1}{\ddots}}}} \right) \quad (6)$$

次に図3のように、各段の抵抗の値が異なる抵抗ラダーを考える。抵抗ラダーの k 段目の抵抗値は、ある抵抗値 R に対して、 $p_k R$ と $q_k R$ として、 p_k と q_k によって重みづけられているとする。

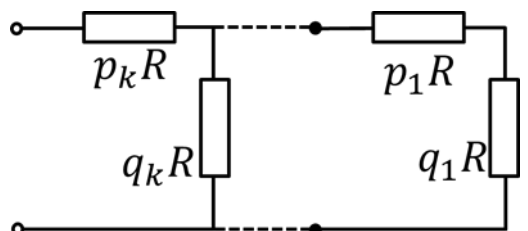


図 3 各段の抵抗の値が異なる抵抗ラダー

この時の k 段抵抗ラダーの合成抵抗は、次式であらわされ、 p_k と q_k を用いた連分数としてもあらわすことができる。

$$Z_k = p_k R + \frac{1}{\frac{1}{q_k R} + \frac{1}{Z_{k-1}}} = R \left(p_k + \frac{1}{\frac{1}{q_k} + \frac{1}{Z_{k-1}}} \right) = R \left(p_k + \frac{1}{\frac{1}{q_k} + \frac{1}{p_{k-1} + \frac{1}{\frac{1}{q_{k-1}} + \frac{1}{\ddots}}}} \right) \quad (7)$$

この(7)式から、任意の数について、その連分数表示に従って k 段目の抵抗の重み p_k と q_k を決定し、抵抗ラダーを構成することで、 R に対してその数の比を持つ抵抗を作ることができる。

3. 抵抗ラダーを用いた無理数（近似）信号の出力

連分数としてあらわされる無理数の例として、貴金属数と呼ばれる数字がある。貴金属数は二次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解であり、正の整数 n の値に対して順に、第 n 貴金属数と呼ばれる[2]。二次方程式 $x^2 - nx - 1 = 0$ の正の解 λ_n とその連分数表示は次式のようにあらわすことができる。

$$\lambda_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} = n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{n + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (8)$$

しばしば、 $n = 1$ の場合を黄金数 ϕ 、 $n = 2$ の場合を白銀数 τ 、 $n = 3$ の場合を青銅数 ξ と呼ぶ[5]。 ϕ 、 τ 、 ξ それぞれの数値は、

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \\ \tau &= 1 + \sqrt{2} \approx 2.414 \\ \xi &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \approx 3.303 \end{aligned} \quad (9)$$

である。

貴金属数が(8)式のように連分数展開できることから、(6)式において m と $R/(mr)$ を正の整数 n とすることで、ラダーの合成抵抗が R に対して貴金属数の比になることが予想された。

例として、 $R \cdot R$ ラダーの合成抵抗の収束する値 $Z_{R,R}$ は、次式のように R に対して黄金数 ϕ の比になる。

$$Z_{R,R} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} R \quad (10)$$

また、 $2R \cdot 0.5R$ ラダーの合成抵抗の収束する値 $Z_{2R,0.5R}$ は、次式のように R に対して白銀数 $\tau = 1 + \sqrt{2}$ の比になる。

$$Z_{2R,0.5R} = (1 + \sqrt{2})R = R \cdot \left(2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \right) \quad (11)$$

$\sqrt{2}$ は連分数として次式のようにもあらわすことができる。

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (12)$$

これは、白銀数 τ から1を減じたものが $\sqrt{2}$ であることによるものである。

このことを用いて、 $2R \cdot 0.5R$ ラダーの先頭の抵抗を $2R$ から R に変えた場合を考える。この抵抗ラダーの合成抵抗の収束する値は次式であらわされる。

$$Z_{\sqrt{2}} = R + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \cdot R = \sqrt{2}R \quad (13)$$

ネイピア数 e は、自然対数の対数の底であり、無理数である。ネイピア数 e は連分数として次式のようにあらわすことができる[3]。

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (14)$$

(14)式では省略したが、この連分数展開で分数部分の分子をすべて1とした場合の整数部分を並べて表示すると、以下のように規則性を持つ[3]。

$$e = 2.71828 \dots = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots] \quad (15)$$

この連分数展開を用いて、図3に示した各段の抵抗値が異なる抵抗ラダーにおいて、(7)式の p_k を連分数展開整数部分の奇数番目、 q_k を偶数番目の逆数とすることで、抵抗ラダーの合成抵抗の R に対する比は近似的にネイピア数 e になる。

円周率 π は、円の円周と直径の比であり、無理数である。円周率 π を連分数展開すると、その整数部分は規則性を持たない[3]。円周率 π を次式のように小数第五位までで近似すると、連分数として次式のようにあらわされる[3]。

$$\pi \approx 3.14159 = [3, 7, 15, 1, 25, 1, 7, 4] \quad (16)$$

これを用いて、ネイピア数の場合と同様に抵抗を接続して抵抗ラダーの合成抵抗の R に対する比は、近似的に円周率 π になる。

4段のネイピア数近似ラダーと円周率近似ラダーの構成を、図4(a)と図4(b)にそれぞれ示す。

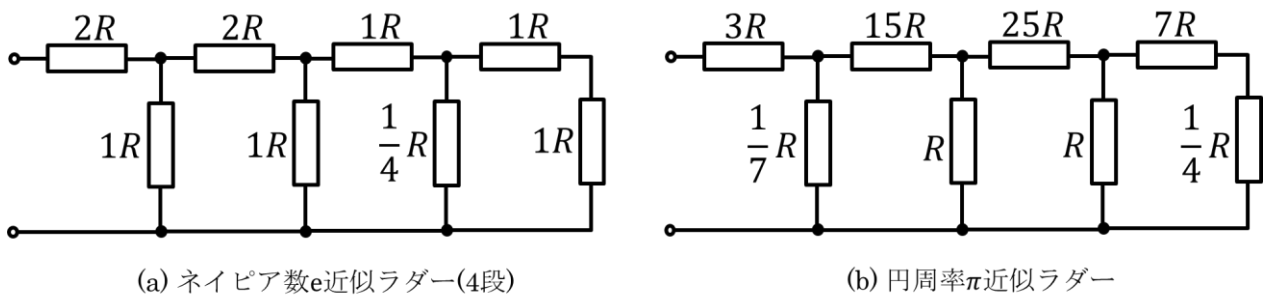


図4 ネイピア数ラダーと円周率ラダー

以上のようにして抵抗ラダーを構成し、その合成抵抗が設計した通りの値を持つことが回路シミュレータ LTspice を用いたシミュレーションからも確認できた。

謝辞： 有意義なコメントをいただきました田部井勝稲先生に感謝します。

参考資料

[1] 小川東, 佐藤健一, 竹之内, 森本光生, 「建部賢弘の数学」 共立出版 (2008)
 [2] 岩本誠一, 江口将生, 吉良知文, 「黄金・白銀・青銅：数と比と形と率と」 (2008)
https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac_download_md/15758/KJ00005471244.pdf
 [3] 芹沢正三, 数論入門、講談社ブルーバックス (2008)