のこぎり波信号入力での黄金比サンプリング条件を用いた等価時間サンプリングの検討

山本 修平*　佐々木 優斗　桑名 杏奈　小林 春夫（群馬大学）

Equivalent Time Sampling Using Golden Ratio Sampling Condition for Sawtooth Wave Input

Shuhei Yamamoto, Yuto Sasaki, Anna Kuwana, Haruo Kobayashi (Gunma University)

Abstract

When acquiring a signal using equivalent time sampling, its waveform can be efficiently obtained when the frequency ratio between the signal under measurement and the sampling clock is the golden ratio. In this paper, we investigate whether this statement holds when the measured signal is a sawtooth wave.

キーワード：等価時間サンプリング，オシロスコープ，波形抜け，黄金比，のこぎり波
(equivalent-time sampling, oscilloscope, waveform missing, golden ratio, sawtooth wave)

1. はじめに

サンプリング・オシロスコープでは，被測定信号が繰り返し波形であるとき，等価時間サンプリング技術が用いられる[1-7]．この技術を用いると，被測定信号のナイキスト・レートよりも低いサンプリング周波数で波形を取得することができるため，広帯域信号を高い時間分解能で測定することが可能となる．しかし，被測定信号とサンプリング・クロックがある関係にあるとき，とくにランダム・サンプリングの場合はいわゆる“波形抜け現象”が生じ波形取得効率が劣化する問題が生じる[1]．波形抜けが起こると，波形の再現に必要なサンプリングデータが偏ってしまうために，非常に多くのサンプリングデータが必要となり，測定に時間がかかってしまう．

この問題に対して，筆者らは先に黄金比サンプリング技術を提案した[6, 7]．サンプリング・クロックと被測定信号の周波数比が黄金比（1:1.618…）の場合は波形抜け現象が生じず，効率的に取得できる．

本論文では，被測定信号とサンプリング・クロックの周波数比が黄金比であるとき効率的に波形を取得できることを，被測定信号が正弦波のみでなく，のこぎり波の場合でも検証した．

2. 等価時間サンプリング

波形を取得するためのサンプリングする技術として，実時間サンプリングと等価時間サンプリングの技術がある．実時間サンプリングは，波形データを一回の取り込みで揃えるため，入力信号帯域とサンプリング・クロック周波数はサンプリング定理を満たさなければならない．等価時間サンプリングは，繰り返し波形の入力に限定されるが，波形データを繰り返し取得するため，サンプリング・クロック周期より細かい時間分解能でサンプリングができる．

等価時間サンプリングの時間ベースは，コヒーレント・サンプリング，ランダム・サンプリング，シーケンス・サンプリングがある．黄金比サンプリングをランダム・サンプリングの場合で考える．

図 1 に入力信号が正弦波の場合のランダム・サンプリ

ングの原理を示す．ランダム・サンプリングは，被測定信号と非同期なサンプリング･クロックを用いて波形を取得する．被測定信号は繰り返し信号であり，サンプリング・クロックによりサンプリングされた時間（位相）は保持される．多数のデータを集め波形を再現することができる．

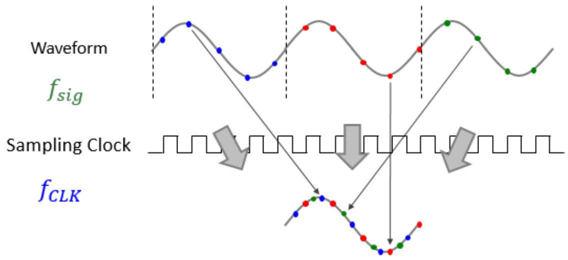

図 1　ランダム・サンプリングの原理

Fig.　1　Principle of random sampling.

2.　波形抜け

ランダム・サンプリングでは，サンプリング点が被測定信号の一周期に渡ってランダムに出現する（図 2）．しかし，(i) サンプリング・クロックの周波数が被測定信号に比べて大きすぎる場合（式(1)，図 3），(ii) サンプリング・クロックの周波数が被測定信号の高調波や低調波の整数倍に近い場合（図 4，式(2)），(iii) サンプリング・クロックの周波数が被測定信号と近い場合（図 5，式(3)）では波形抜けが生じ，波形を再現するために非常に多くのデータが必要となる．

$$f_{CLK} \gg f_{sig} \tag{1}$$

$$f_{CLK} \approx \frac{1}{\alpha} \times f_{sig} \tag{2}$$

$$\left(\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \cdots\right)$$

$$f_{CLK} \approx f_{sig} \tag{3}$$

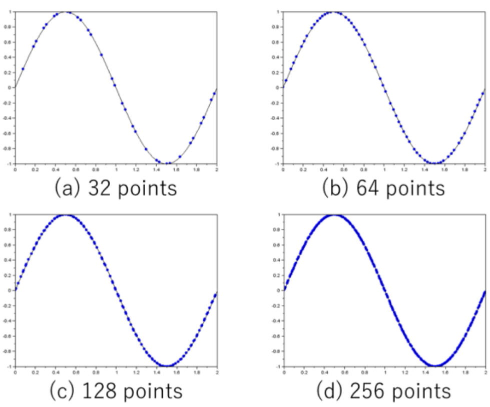

図 2 ランダム・サンプリングでの波形再再構成

Fig. 2. Reconstructed waveforms for random sampling.

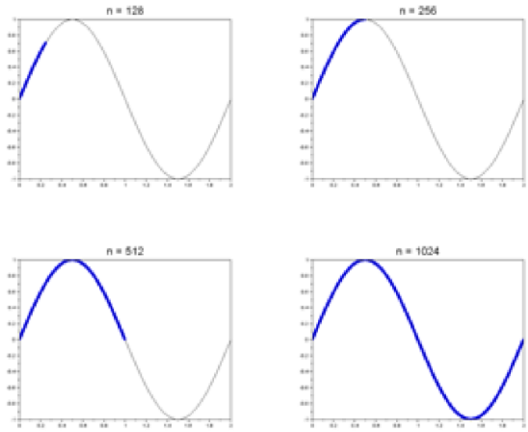

図 3 波形抜け（$f_{CLK} \gg f_{sig}$）

Fig. 3　Waveform missing in case of $\boldsymbol{f_{CLK} \gg f_{sig}}$

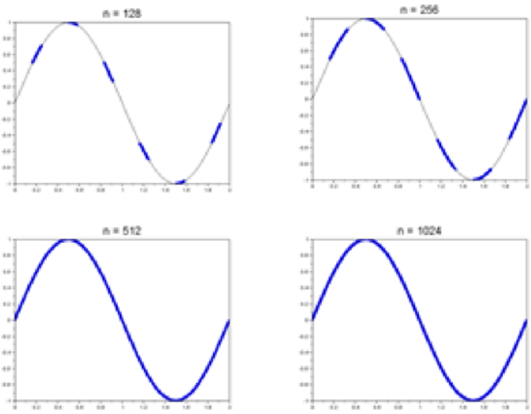

図 4 波形抜け（$f_{CLK} \approx (1/6) f_{sig}$）

Fig. 4　Waveform missing in case of $\boldsymbol{f_{CLK} \approx (1/6) f_{sig}}$.

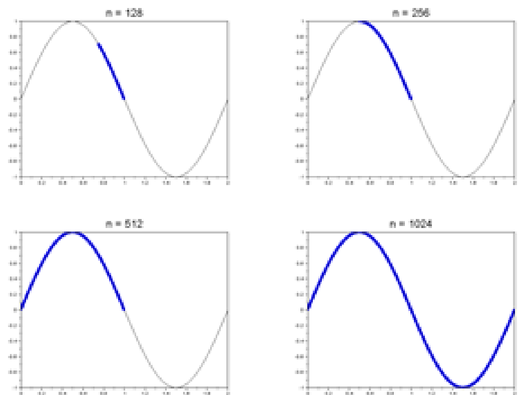

図 5 波形抜け（$f_{CLK} \approx f_{sig}$）

Fig. 5　Waveform missing in case of $\boldsymbol{f_{CLK} \approx f_{sig}}$

3.　波形取得での効率について

ここではサンプリングにより短時間で波形取得ができるため、波形抜けが起こらないことを高効率サンプリングと定義する．波形抜けは隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離の比が大きいことと定義することができる．一方，最大の距離と最小の距離の比が最小となるのは，サンプリング点が周期を等分している場合である．しかし，これはランダム・サンプリングでは起こりえない．つまり，隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離の比を小さく保ったままサンプリングできることが高効率とする．

4.　黄金比サンプリング

黄金比を 1 : φとおくと次のように定義される [9].

$$1{:}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{4}$$

φは黄金数と呼ばれ，次の方程式の正の解である．

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{5}$$

その解は，次のようになる．

$$\varphi = 1.61803398 \ldots \tag{6}$$

ここで，被測定信号とサンプリング・クロックの周波数比を黄金比サンプリングと呼ぶ[6, 7].

$$f_{CLK} = \varphi \times f_{sig} \tag{7}$$

のこぎり波は正弦波とは異なり，信号の周波数がひとつではない（高調波をもつ）．そのため，被測定信号の周波数f_{sig}を次のように定義する（図 6）．

$$f_{sig} = \frac{1}{T_{sig}} \tag{8}$$

図 7 に黄金比サンプリングで位相 0 からサンプリングされたのこぎり波を示す．番号はサンプリングされた順番を示している．

表 1 に図 7 のサンプリング点の位相と前後の番号のサンプリング点との距離，隣接するサンプリング点間の最大・最小の距離を示す．

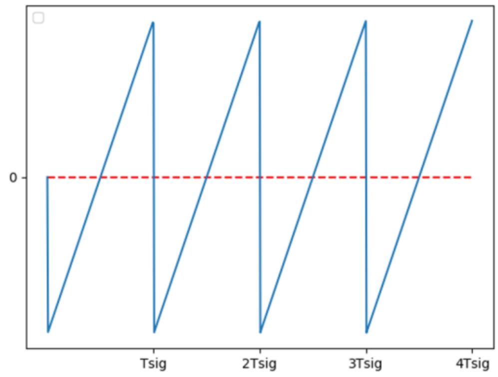

図 6　のこぎり波信号の周期T_{sig}の取り方

Fig. 6　How to get the period T_{sig} for a sawtooth signal.

位相は 0～2π を 0～1 に正規化している．連続した番号のサンプリング点の距離は常に$1/\varphi$または$1/\varphi^2$であり，それ以外の値を取らない．また，隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離との比が常に$1{:}\varphi$または$1{:}\varphi^2$でサンプリングされている．

図 8 に黄金比サンプリングしたときのサンプリング点数毎の隣接するサンプリング点間の最大･最小距離を示す．赤い点が最大の距離，青い点が最小の距離を表す．最大・最小の距離はフィボナッチ数

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{m+2} = F_m + F_{m+1} \tag{9}$$

（$1, 1, 2, 3, 5 \ldots$）毎に$1/\varphi$となる．次式のようにフィボナッチ数列の隣り合う項の比は黄金比に収束する．

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F_m}{F_{m+1}} = \varphi \tag{10}$$

また，フィボナッチ数の総和は次式のようになる．

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1 \tag{11}$$

このため　およそサンプリング点数をφ倍にすると隣接するサンプリング点間の最大と最小の距離が$1/\varphi$となる．

$$\frac{\sum_{k=1}^{m+1} F_k}{\sum_{k=1}^{m} F_k} = \frac{F_{m+3} - 1}{F_{m+2} - 1} \cong \varphi \tag{12}$$

結果，約$1/N$で時間分解能が向上する．ここで時間分解能は，サンプリング点が位相にランダムに現れる場合は$1/\sqrt{N}$，サンプリング点が位相を等分する場合は$1/N$であるので，黄金比サンプリングによって隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離の比を小さく保ったまま高効率な波形取得がなされることがわかる．

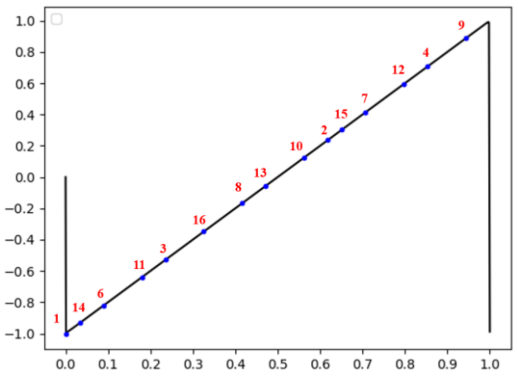

図 7　のこぎり波の黄金比サンプリング

Fig. 7.　Golden ratio sampling of sawtooth wave

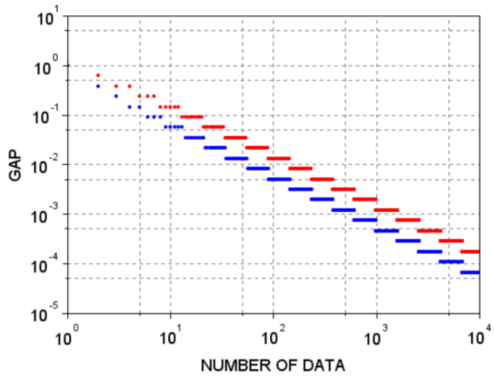

図 8.　黄金比サンプリングしたときの隣接するサンプリング点間の最大・最小距離の推移

Fig. 8.　Maximum and minimum steps in golden ratio sampling.

表 1　黄金比サンプリングしたときのサンプリング点の位相と間隔

Table 1.　Sampled phases and their gaps for golden ratio sampling

No.	***Phase***	***Phase Distance***		***Max.Step***	***Min.Step***
1	0.000	0.618		1	1
2	0.618		0.382	0.618	0.382
3	0.236	0.618		0.382	0.236
4	0.854		0.382	0.382	0.146
5	0.472	0.382		0.236	0.146
6	0.090		0.618	0.236	0.090
7	0.708	0.382		0.236	0.090
8	0.326		0.618	0.146	0.090
9	0.944	0.382		0.146	0.056
10	0.562		0.382	0.146	0.056
11	0.180	0.618		0.146	0.056
12	0.798		0.382	0.146	0.056
13	0.416	0.382		0.090	0.056
14	0.034		0.618	0.090	0.034
15	0.652	0.381		0.090	0.034
16	0.271			0.090	0.034

5.　貴金属比サンプリング

貴金属比とは，次式で表わされる比である．

$$1 : \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \tag{13}$$

$$(n = 0, 1, 2 \ldots)$$

$n = 1$のとき黄金比，$n = 2$のとき白銀比，$n = 3$のとき青銅比と呼ばれる．被測定信号とサンプリング・クロックの周波数比を貴金属比にすることを貴金属比サンプリングと呼ぶ [7]．フィボナッチ数列の隣り合う項の比の極限が黄金比になるように，第n貴金属数にも隣り合う項の比の極限が貴金属比になる数列が存在する．

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{m+2} = F_m + nF_{m+1} \tag{14}$$

$$(m = 0, 1, 2 \ldots)$$

図 9 に白銀比サンプリングで，図 11 に青銅比サンプリングで，位相 0 からサンプリングされたのこぎり波を示す．番号はサンプリングされた順番を示している．

表 2 に図 9 の，表 3 に図 11 のサンプリング点の位相と前後の番号のサンプリング点との距離，隣接するサンプリング点間の最大・最小の距離を示す．

位相は 0〜2π を 0〜1 に正規化している．ここで，第n貴金属数をφ_nとすると，連続した番号のサンプリング点の距離は常に$1/\varphi_n$または$(n-1)/\varphi_n + 1/{\varphi_n}^2$であり，それ以外の値を取らない．これは，貴金属数が(15)式の特性を持つことより導くことができる．

$$\varphi_n - \frac{1}{\varphi_n} = n \qquad (15)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

図 10 に白銀比サンプリングしたとき，図 12 に青銅比サンプリングしたときのサンプリング点数毎の隣接するサンプリング点の最大・最小の距離を示す．最小の距離は,

$$F_0 = 1,\ F_1 = n - 1,\ F_{m+2} = F_m + nF_{m+1} \qquad (16)$$

$$(m = 0, 1, 2 \dots)$$

点毎に$1/M$倍になっている．また，最大の距離は,

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{m+2} = F_m + nF_{m+1} \qquad (17)$$

$$(m = 0_1 \dots 0_n, 1_1 \dots 1_n, 2_1 \dots 2_n, \dots)$$

点毎に減少しており，nF_m点毎に$1/M$倍となっている．

サンプリング中に同時に出現するサンプリング点間の距離の値はnの値に関わらず 2〜3 個である．それらの比の最大は，$n+1$パターン存在し,

$$1 : M - m \qquad (18)$$

$$(while\ M - m > 1, m = -1, 0, 1, 2, \dots)$$

となっている．つまり，隣接するサンプリング点間の最大の距離と最小の距離の比を小さく保ったままサンプリングできる．また，黄金比サンプリングと同様にして，約 $1/N$ で時間分解能が向上している．

$n = 1$（黄金比）の場合が最大の距離と最小の距離の比が一番小さく，数字が増えるにつれ比が大きくなっていく．しかし，一周期当たりのサンプリング数が増加するため，高速にサンプリングすることができる．

6. まとめ

本論文では，黄金比、および一般化した貴金属比を用いた等価時間サンプリングがのこぎり波においても効率的に波形を取得できることを確認した．

黄金比サンプリングの場合は被測定信号の一回の繰り返しにつき 1〜2 点しかサンプリングできないが最も効率が良く，貴金属比サンプリングの場合は一回の繰り返し毎にサンプリングできる点数を増やすことができるため高速である．

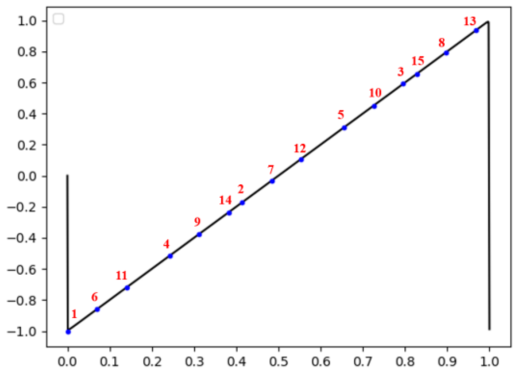

図 9 白銀比サンプリングしたときの隣接するサンプリング点間の最大・最小距離の推移

Fig. 9. Maximum and minimum steps in silver ratio sampling.

表 2 白銀比サンプリングしたときのサンプリング点の位相と間隔

Table 2. Sampled phases and their gaps for silver ratio sampling.

<table>
<tr><th>No.</th><th>Phase</th><th colspan="2">Phase Distance</th><th>Max.Step</th><th>Min.Step</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0.000</td><td rowspan="2">0.414</td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.414</td><td rowspan="2">0.414</td><td>0.586</td><td>0.414</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.828</td><td rowspan="2">0.586</td><td>0.414</td><td>0.172</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.242</td><td rowspan="2">0.414</td><td>0.414</td><td>0.172</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0.656</td><td rowspan="2">0.586</td><td>0.242</td><td>0.172</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0.007</td><td rowspan="2">0.414</td><td>0.242</td><td>0.070</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0.484</td><td rowspan="2">0.414</td><td>0.172</td><td>0.070</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0.898</td><td rowspan="2">0.586</td><td>0.172</td><td>0.070</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0.312</td><td rowspan="2">0.414</td><td>0.172</td><td>0.070</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0.726</td><td rowspan="2">0.586</td><td>0.172</td><td>0.070</td></tr>
<tr><td>11</td><td>0.140</td><td rowspan="2">0.414</td><td>0.172</td><td>0.070</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0.554</td><td rowspan="2">0.414</td><td>0.102</td><td>0.070</td></tr>
<tr><td>13</td><td>0.968</td><td rowspan="2">0.586</td><td>0.102</td><td>0.032</td></tr>
<tr><td>14</td><td>0.382</td><td rowspan="2">0.414</td><td>0.102</td><td>0.032</td></tr>
<tr><td>15</td><td>0.796</td><td rowspan="2">0.586</td><td>0.102</td><td>0.032</td></tr>
<tr><td>16</td><td>0.210</td><td></td><td>0.102</td><td>0.032</td></tr>
</table>

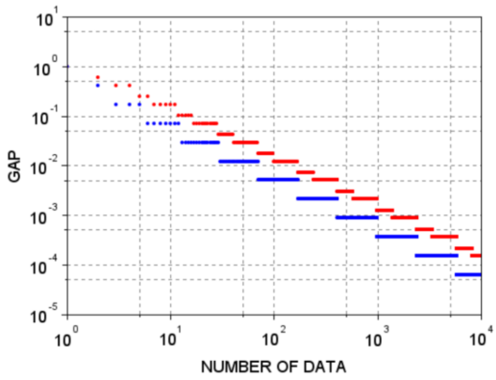

図 10　白銀比サンプリングしたときの隣接するサンプリング点間の最大・最小距離の推移.

Fig. 10.　Maximum and minimum steps in silver ratio sampling.

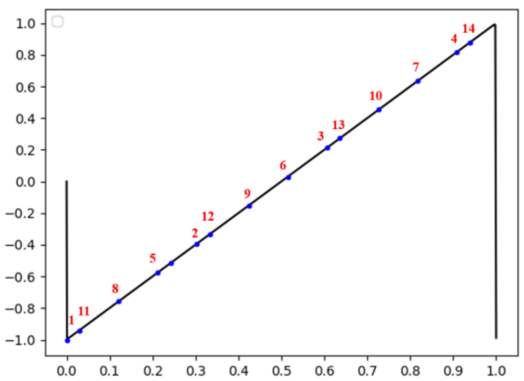

図 11　青銅比サンプリングしたときの隣接するサンプリング点間の最大・最小距離の推移.

Fig. 11　Maximum and minimum steps in bronze ratio sampling.

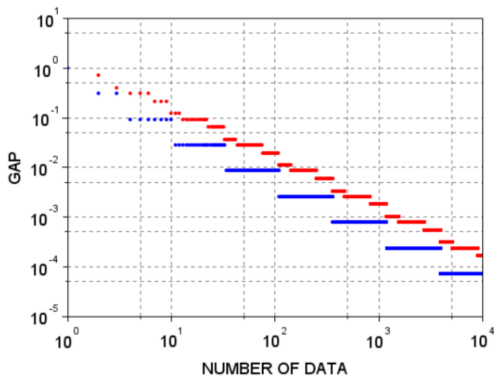

図 12　青銅比サンプリングしたときの隣接するサンプリング点間の最大・最小距離の推移.

Fig. 12.　Maximum and minimum steps in bronze ratio sampling.

表 3　青銅比サンプリングしたときのサンプリング点の位相と間隔

Table 3. Sampled phases and their gaps for bronze ratio sampling

No.	***Phase***	***Phase Distance***		***Max.Step***	***Min.Step***
1	0.000	0.303		1	1
2	0.303		0.303	0.697	0.303
3	0.606	0.303		0.394	0.303
4	0.909		0.697	0.303	0.091
5	0.212	0.303		0.303	0.091
6	0.515		0.303	0.303	0.091
7	0.818	0.697		0.212	0.091
8	0.121		0.303	0.212	0.091
9	0.424	0.303		0.212	0.091
10	0.727		0.697	0.121	0.091
11	0.030	0.303		0.121	0.003
12	0.333		0.303	0.121	0.003
13	0.636	0.303		0.091	0.003
14	0.939		0.697	0.091	0.003
15	0.242	0.303		0.091	0.003
16	0.545			0.091	0.003

文　　献

(1) D. E. Toeppen: "Acquisition Clock Dithering in a Digital Oscilloscope", Hewlett-Packard Journal, Vol.48, No.2 pp.26-28 (1997)

(2) K. Rush and D. J. Oldfield: "A Data Acquisition System for 1-GHz Digitizing Oscilloscope", Hewlett-Packard Journal, Vol.37, No.4 pp.4-11 (1986)

(3) M. Kimura, A. Minegishi, K. Kobayashi, H. Kobayashi: "A New Coherent Sampling System with a Triggered Time Interpolation", IEICE Trans. On Fundamentals, Vol.E84-A, No.3 pp.713-719 (2001)

(4) M. Kimura, K. Kobayashi, and H. Kobayashi: "A Quasi-Coherent Sampling Method for Wideband Data Acquisition", IEICE Trans. On Fundamentals, Vol.E85-A, No.4 pp.757-763 (2002)

(5) 上森将文, 小林謙介, 光野正志, 清水 一也, 小林春夫, 戸張勉 :「広帯域高精度サンプリング技術」, 電子情報通信学会, vol. J90-C, No.9, pp.625-633 (2007 年 9 月).

(6) Y. Sasaki, Y. Zhao, A. Kuwana, H. Kobayashi : "Highly Efficient Waveform Acquisition Condition in Equivalent-Time Sampling System", 27th IEEE Asian Test Symposium (2018)

(7) 佐々木優斗, 山本修平, 桑名杏奈, 小林春夫"貴金属比を用いた 等価時間サンプリングでの高効率波形取得条件の検討" 第 10 回 電気学会東京支部栃木・群馬支所 合同研究発表会(2020 年 3 月)

(8) Y. Sasaki, Y. Zhao, A. Kuwana, H. Kobayashi: "Highly Efficient Waveform Acquisition Condition in Equivalent-Time Sampling System", 27th IEEE Asian Test Symposium (2018)

(9) M. Leonard Eugene Dickson: History of the Theory of Numbers, vol. 2, Diophantine Analysis, Dover (2005).