テイラー展開を用いた浮動小数点演算での最適領域分割の検討

魏 江林, 桑名 杏奈, 小林 春夫
久保 和良, 田中 勇樹

群馬大学大学院 理工学府電子情報部門
小山工業高等専門学校 電気電子創造工学科
群馬大学大学院 理工学府知能機械部門

群馬大学
GUNMA UNIVERSITY

Outline

- 研究背景･目的
- テイラー展開
- 検討除算アルゴリズム
- シミュレーション結果
- 等分割と最適領域分割の比較
- まとめ

Outline

- 研究背景・目的
- テイラー展開
- 検討除算アルゴリズム
- シミュレーション結果
- 等分割と最適領域分割の比較
- まとめ

研究背景

◆VLSI技術の進展　→

　2進数浮動小数点数表現がより重要

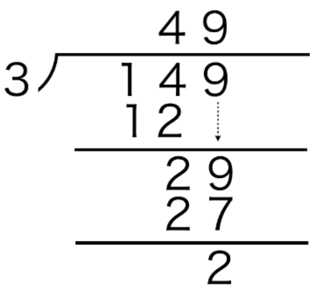
◆ 高速・高精度浮動小数点演算　→

　組込みシステム、モバイルアプリケーション

◆加減算器　→　実現が比較的容易

乗算器　　→　比較的難

除算器　　→　さらに難



研究目的

◆浮動小数点除算演算

- 簡単な回路で実現

- 高速・短遅延

◆ テイラー展開のデジタル演算への応用

- テイラー展開による関数近似は大域的に成立

- $f(x)=1/x$ のテイラー展開の各項係数は +1, -1 が交互に

Outline

- 研究背景･目的
- <u>テイラー展開</u>
- 検討除算アルゴリズム
- シミュレーション結果
- 等分割と最最適領域分割の比較
- まとめ

テイラー展開とは

テイラー級数 (Taylor series) :
関数のx=a での導関数の値からの無限和として関数を表現。
その級数を得ることをテイラー展開。

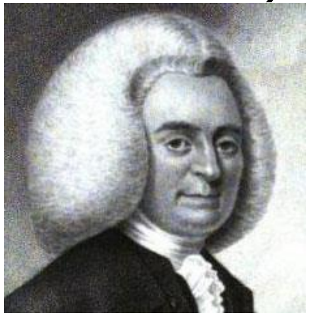
$$f(x) = \mathrm{f(a)} + f'(a)(x-a) + \frac{(\mathrm{f})''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{(\mathrm{f})^n(a)}{\mathrm{n}!}(x-a)^{\mathrm{n}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{n} \frac{(\mathrm{f})^n(a)}{\mathrm{n}!}(x-a)^{\mathrm{n}}$$

x=0 を中心としたテイラー級数 ⇒
マクローリン級数(Maclaurin series)

$$f(x) = \mathrm{f(0)} + f'(0)x + \frac{(\mathrm{f})''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(\mathrm{f})^n(0)}{\mathrm{n}!}x^{\mathrm{n}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{n} \frac{(\mathrm{f})^n(0)}{\mathrm{n}!}x^{\mathrm{n}}$$

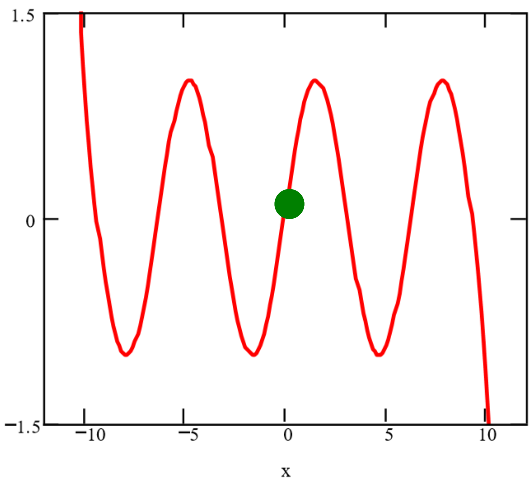


Maclaurin
スコットランドの数学者

テイラー展開の神話と真実

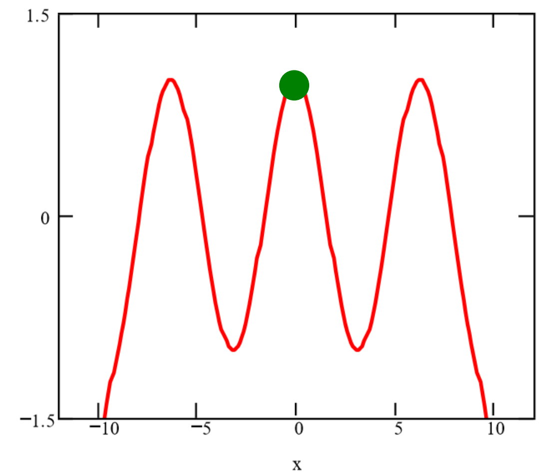
神話 (Myth)： f(x) のx=a のテイラー展開による近似は
x=a 近傍でしか成立しない

真実 (Truth): 高次項まで考慮すれば
xの広い範囲で近似が成立



f(x) = sin(x) の23項までの
x=0 でのテイラー展開

収束範囲
$-\infty < x < +\infty$



f(x) = cos(x) の23項までの
x=0 でのテイラー展開

Outline

- 研究背景･目的
- テイラー展開
- <u>検討除算アルゴリズム</u>
- シミュレーション結果
- 等分割と最適領域分割の比較
- まとめ

2進数での小数点表現

2進数での小数点表現:

仮数部 (Mantissa: M)　　指数部 (Exponent: E)

2進数表現:

$M \times 2^{E}$

小数点

$1.abcdef\cdots \times 2^{E}$

Mantissa　Exponent

$a, b, c, d, e, f, \cdots$ それぞれ 0 または1

$\boxed{1 \leqq M < 2}$ となる

例:1011001 (2進数) = 89 (10進数)

2進数表現: 1.011001×2^{110}

10進数表現: $1.390625 \times 2^{6} = 89$

2進数浮動小数表現の除算

$A = \frac{N}{D}$ を計算する。

$A = N \times \frac{1}{\mathrm{D}}$

$A : M_A \times 2^{E_A}$

$N : M_N \times 2^{E_N}$

$D : M_D \times 2^{E_D}$

$\frac{1}{\mathrm{D}} = \frac{1}{M_D} \times 2^{-E_D}$

2進数浮動小数点表現： $\frac{1}{M_D} \times 2^{-E_D}$

$\frac{1}{M_D}$ の計算をして、
従来のデジタル乗算
アルゴリズムを使用.

$\frac{1}{M_D}$ の計算をして、
テイラー展開を用いる(提案)
アルゴリズムを使用.

この計算のために$f(x) = \frac{1}{M_D}$ $(1 \leq M_D < 2)$をテイラー展開し
所望の精度まで近似計算を行うアルゴリズムを検討する.

検討アルゴリズム

テイラー展開による除算の計算：

仮数部の除算 $\frac{1}{\mathrm{M_D}}$ $(1 \leqq \mathrm{M_D} < 2)$ を計算する.

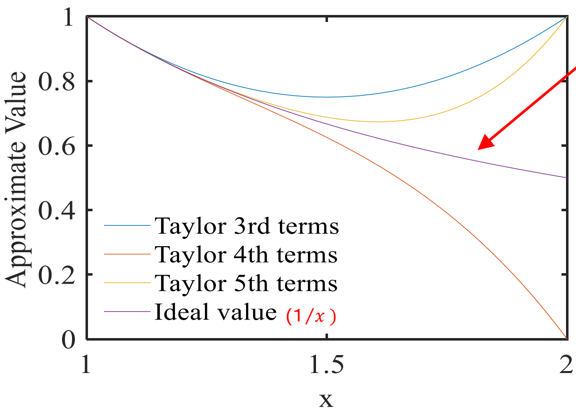
$M_D = x$

このために$f(x) = \frac{1}{x}$ を $x = a$ $(1 \leqq a < 2)$ でテイラー展開して所望の精度まで近似計算.

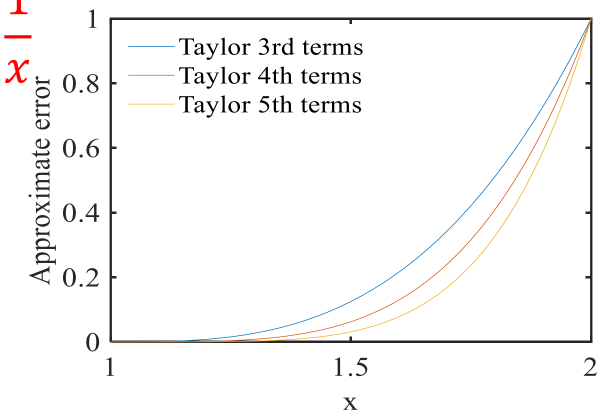
$f(x) = \frac{1}{x}$ の $x = a$ でテイラー展開：

$$\mathrm{Taylor(x)} = \frac{1}{a} - \mathrm{(x-a)} + \mathrm{(x-a)^2} - \mathrm{(x-a)^3} + \mathrm{(x-a)^4} - \mathrm{(x-a)^5} + \mathrm{(x-a)^6} - \mathrm{(x-a)^7} + \cdots + (-1)^n (x-a)^n$$

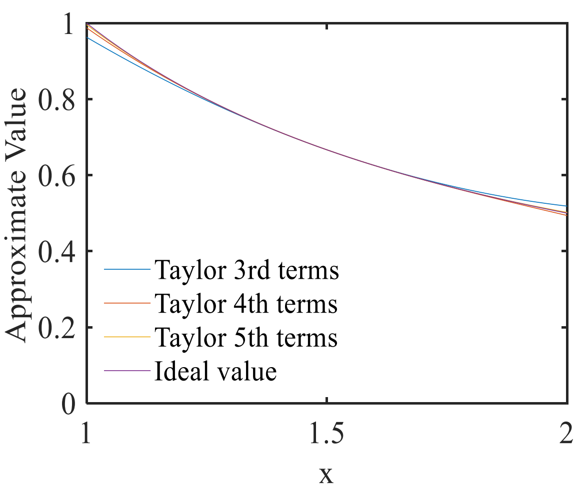
提案方法概念

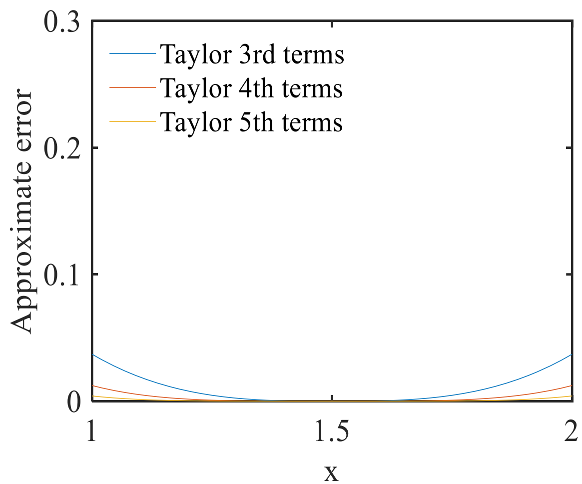


$\frac{1}{x}$



$\frac{1}{x}$ は中心点a=1でテイラー展開





$\frac{1}{x}$ は中心点a=1.5でテイラー展開

$$E = \frac{I - T}{I}$$

E：近似誤差

I：理想値

T：テイラー展開値

提案方法:

分割技術(等分割)

例えば:

1 分割：

a = 1.5　$1 \leq x < 2$

2 分割：

a = 1.25　$1 \leq x < 1.5$

a = 1.75　$1.5 \leq x < 2$

4 分割：

a = 1.125　$1 \leq x < 1.25$

a = 1.375　$1.25 \leq x < 1.5$

a = 1.625　$1.5 \leq x < 1.75$

a = 1.875　$1.75 \leq x < 2$

⋮

Outline

- 研究背景・目的
- テイラー展開
- 検討除算アルゴリズム
- <u>シミュレーション結果</u>
- 等分割と最適領域分割の比較
- まとめ

精度の定義

例えば $\dfrac{1}{2^{16}}$ の精度

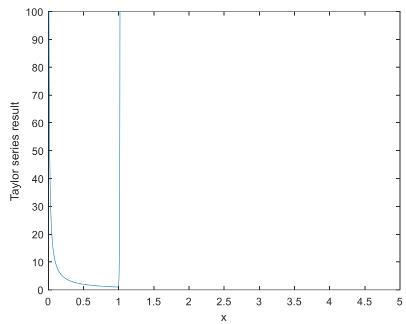
$$\max \left| \frac{f(x) - t(n,x)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{2^{16}}$$

$f(x)$: 元関数(Ideal value)

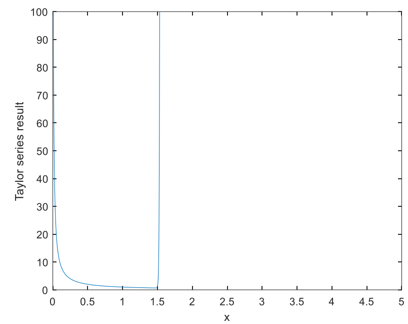
$t(n,x)$:所望精度のテイラー展開の最低展開項数n

1/x のテイラー展開の波形

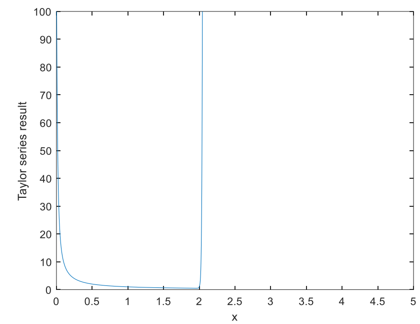
テイラー展開項数:125



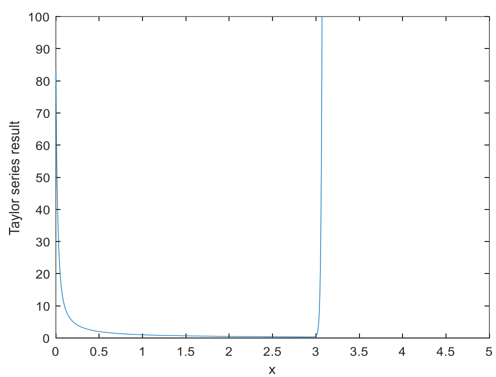
a=0.5でテイラー展開
収束範囲: 0 < x < 1



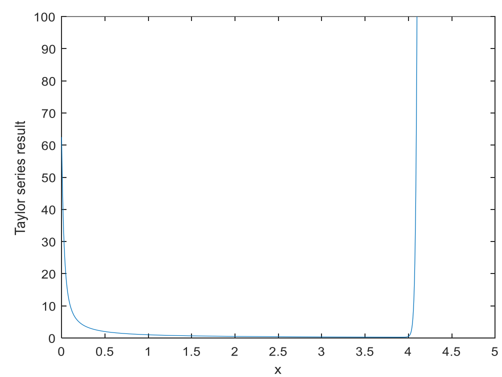
a=0.75でテイラー展開
収束範囲: 0 < x < 1.5



a=1でテイラー展開
収束範囲: 0 < x < 2

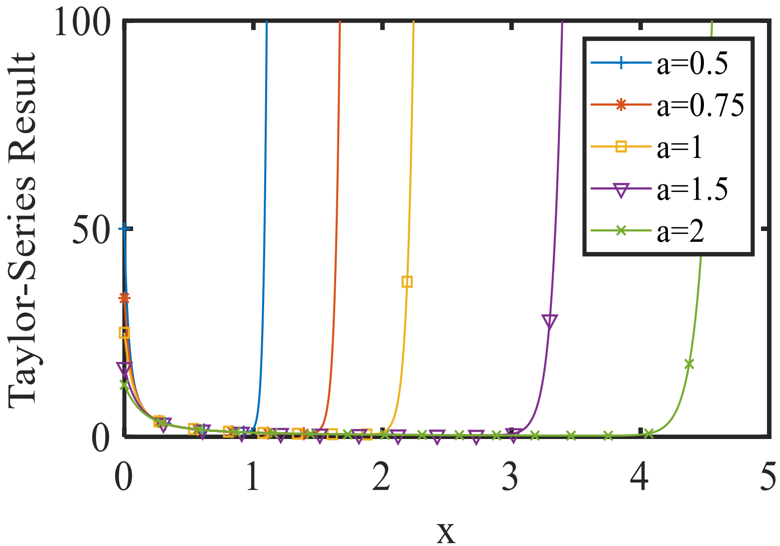


a=1.5でテイラー展開
収束範囲: 0 < x < 3

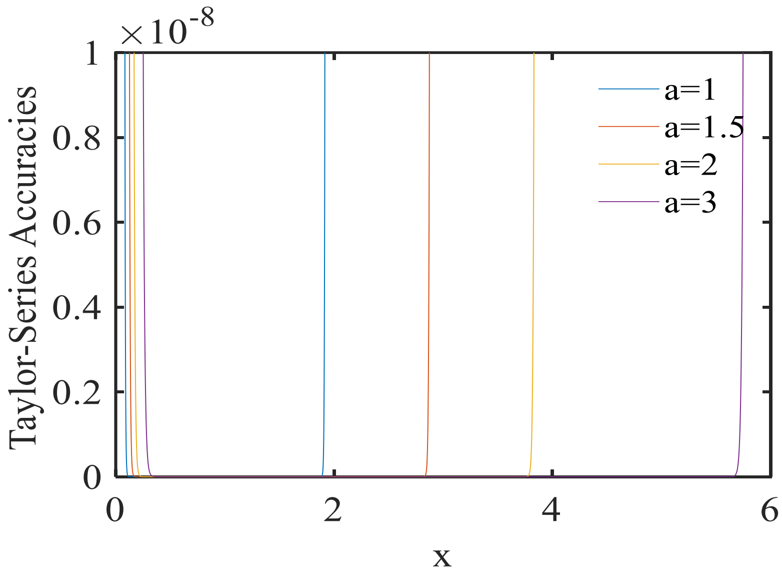


a=2でテイラー展開
収束範囲: 0 < x < 4

中心点比較



テイラー展開の値



テイラー展開の近似誤差

シミレーション結果 (等分割)

テイラー展開の方程：$f(x) = \frac{1}{x}$

領域：$1 \leqq x < 2$

2進数小数点仮数部の表現

所望精度

テイラー展開 ＼ 精度		$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
(i) M = 1.xxxxxx··· $1 \leqq M < 2$	a) a=1.5	6	11	13	16	21

中心点a=1.5でテイラー展開

所望の精度を得るためのテイラー展開の最低項数

仮数部の値で領域を2分割(等分割)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

領域：1 ≦ x <2

仮数部 Mの小数点1桁目で　領域を2つに分割.

テイラー展開 ＼ 精度		$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
領域 1 M = 1.0xxxxx… 1 ≦ M_D< 1.5	a=1.25	4	7	9	11	14
領域2 M = 1.1xxxxx… 1.5 ≦ M <2	a=1.75	3	6	8	9	12

仮数部の値で領域を4つに分割 (等分割)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

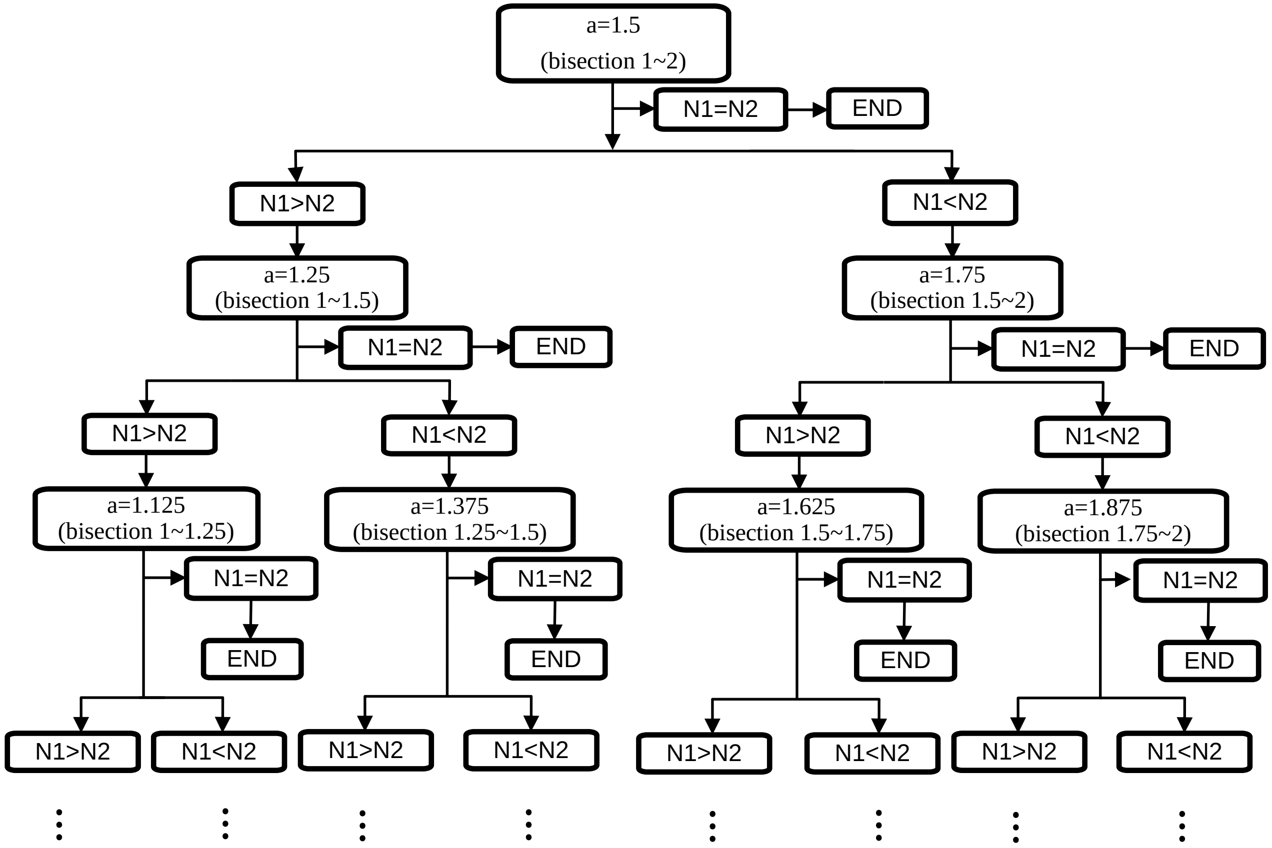
領域：1 ≦ x <2

仮数部 Mの小数点2桁目で 領域を4つに分割.

精度 / テイラー展開		$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
(ⅰ) M = 1.00xxxx… $1 \leq M_D < 1.25$	a=1.125	3	6	7	8	11
(ⅱ) M = 1.01xxxx… $1.25 \leq M_D < 1.5$	a=1.375	3	5	6	7	10
(ⅲ) M = 1.10xxxx… $1.5 \leq M_D < 1.75$	a=1.625	3	5	6	7	9
(ⅳ) M = 1.11xxxx… $1.75 \leq M_D < 2$	a=1.875	3	5	6	7	9

最適領域分割方法

2つの最適領域分割の場合



最適領域2分割法フローチャート

N1：$1 \leq x < a$, テイラー展開の項数
N2：$a \leq x < 2$, テイラー展開の項数

仮数部の値で最適分割

2つの最適領域分割

テイラー展開 ＼ 精度		$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
領域 1 M = 1.xxxxx… $1 \leqq M_D < 45/32$	a=77/64	4	7	8	9	13
領域2 M = 1.xxxxx… $45/32 \leqq M < 2$	a=109/64					

4つの最適領域分割

テイラー展開 ＼ 精度		$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
(ｉ) M = 1.xxxx… $1 \leqq M_D < 19/16$	a=35/32	3	5	6	7	10
(ⅱ) M = 1.xxxx… $19/16 \leqq M_D < 45/32$	a=83/64					
(ⅲ) M = 1.xxxx… $45/32 \leqq M_D < 27/16$	a=99/64					
(ⅳ) M = 1.xxxx… $27/16 \leqq M_D < 2$	a=59/32					

Outline

- 研究背景・目的
- テイラー展開
- 検討除算アルゴリズム
- シミュレーション結果
- <u>等分割と最適領域分割の比較</u>
- まとめ

２つの仮数部領域分割の場合

等分割

精度 / テイラー展開		$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
領域１ M = 1.0xxxxx… $1 \leqq M_D < 1.5$	a=1.25	4	7	9	11	14
領域2 M = 1.1xxxxx… $1.5 \leqq M < 2$	a=1.75	3	6	8	9	12

最適領域分割

差は僅か

精度 / テイラー展開		$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
領域１ M = 1.xxxxx… $1 \leqq M_D < 45/32$	a=77/64	4	7	8	9	13
領域2 M = 1.xxxxx… $45/32 \leqq M < 2$	a=109/64					

4つの仮数部領域分割の場合

等分割

テイラー展開 \ 精度		$\frac{1}{2^{8}}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
(i) M = 1.00xxxx… 1 ≦M_D <1.25	a=1.125	3	6	7	8	11
(ii) M = 1.01xxxx… 1 .25≦M_D <1.5	a=1.375	3	5	6	7	10
(iii) M = 1.10xxxx… 1.5≦M_D <1.75	a=1.625	3	5	6	7	9
(iv) M = 1.11xxxx… 1.75≦M_D <2	a=1.875	3	5	6	7	9

差は僅か

最適領域分割

テイラー展開 \ 精度		$\frac{1}{2^{8}}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
(i) M = 1.xxxx… 1 ≦ M_D <19/16	a=35/32	3	5	6	7	10
(ii) M = 1.xxxx… 19/16≦ M_D <45/32	a=83/64					
(iii) M = 1.xxxx… 45/32≦ M_D <27/16	a=99/64					
(iv) M = 1.xxxx… 27/16 ≦ M_D <2	a=59/32					

Outline

- 研究背景･目的
- テイラー展開
- 検討除算アルゴリズム
- シミュレーション結果
- 等分割と最適領域分割の比較
- <u>まとめ</u>

まとめ

- 2進浮動小数点表現の徐算アルゴリズムを検討
- 必要な精度とテイラー展開式の項数の関係を数値シミュレーションで求めた.
- 領域分割をふやす
  - テイラー展開式の項数 → 小
  - LUT サイズ → 大
- 等分割と最適分割比較
  - 除算に対して, 等分割に対し最適分割のテイラー展開の項数低減の効果は小 (1項数を低減)
  - 等分割 → 計算しやすい
  - 最適分割計算 → 計算しずらい

  → 多くの場合　等分割で良い

今後の課題

- テイラー展開の等分割と最適分割の色々なデジタル演算への応用を検討していく.

Thank you for your attention!

質問（Q＆A）

Q1：発表の内容は原稿の参考文献5とどんな関係がある？

A1：参考文献5は等分割の数値だけを検討した。
今回の発表の内容は最適領域分割を検討し、等分割と比較した。

Q2：等分割と最適領域分割の数値を検討したけど、FPGAで実際回路の面積、LUTサイズ、消費電力などをどうですか？

A2：FPGAで実際回路について、今回の発表を検討していません。
将来のテーマを続けて検討します。

追加資料

Newton's method

Newton's method step:

Fist, Start with an initial approximation x_0 close to c.

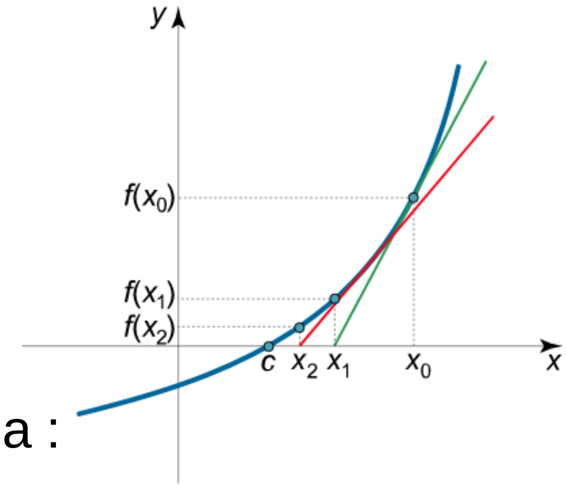
Second, Determine the next approximation by the formula :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f\acute{}(x_0)}$$

Third, Continue the iterative process using the formula :

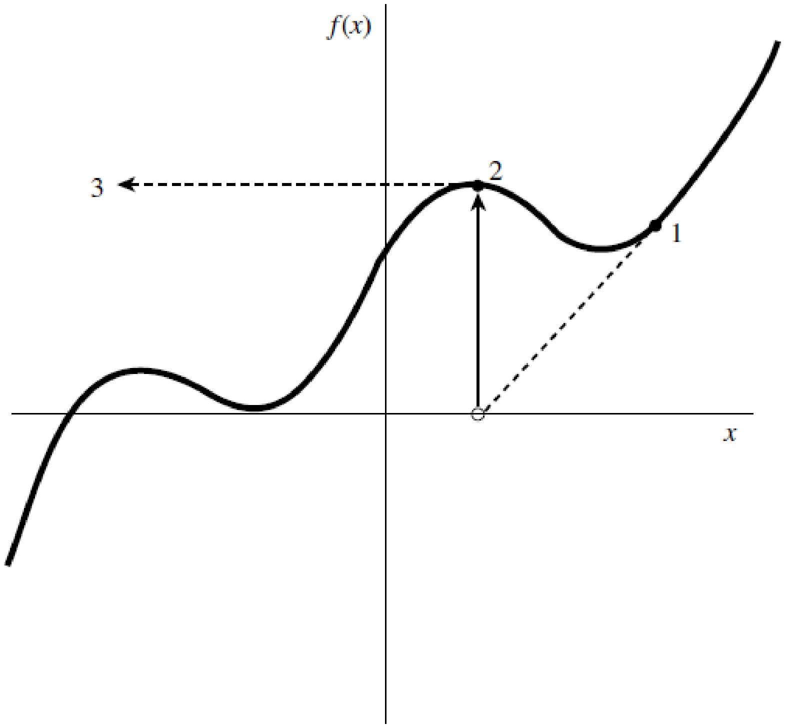
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f\acute{}(x_n)}$$

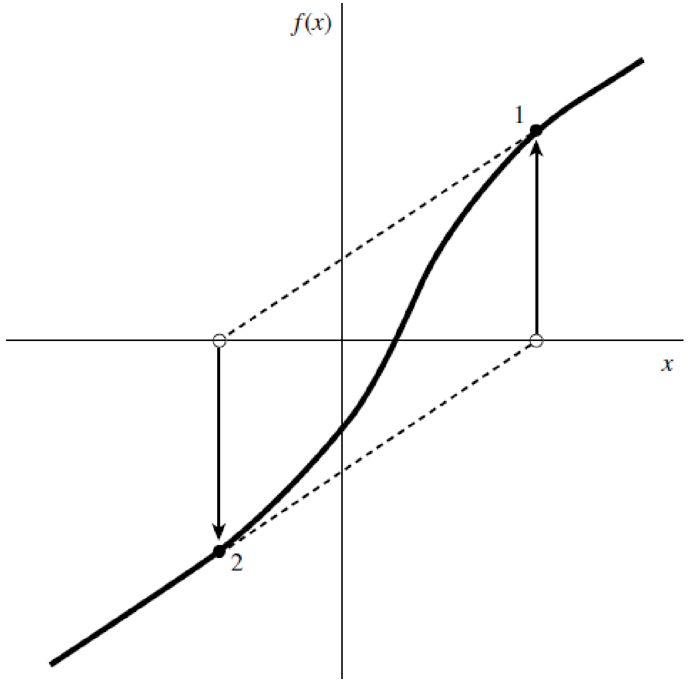
Last, until the root is found to the desired accuracy.



- Poor global convergence properties
- Dependent on initial guess
  - May be too far from local root
  - May encounter a zero derivative
  - May loop indefinitely

Examples of disadvantages

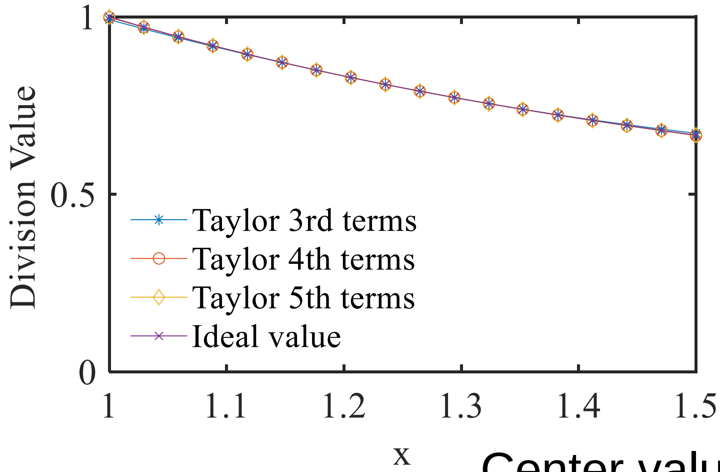


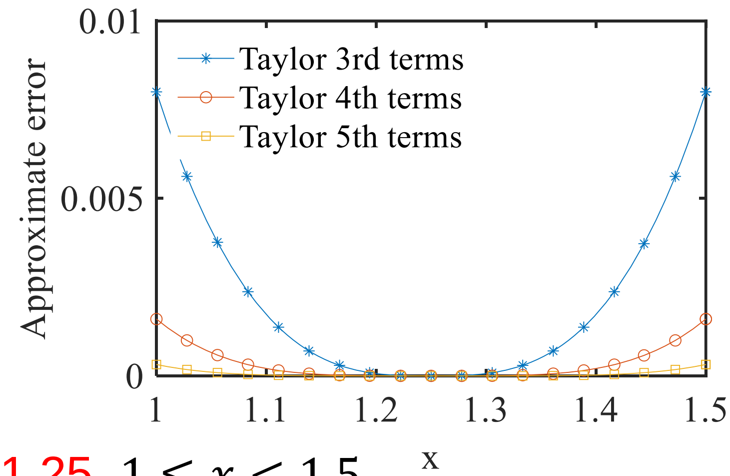


On the left, we have Newton’s Method finding a local maxima, in such cases the method will shoot off into negative infinity.

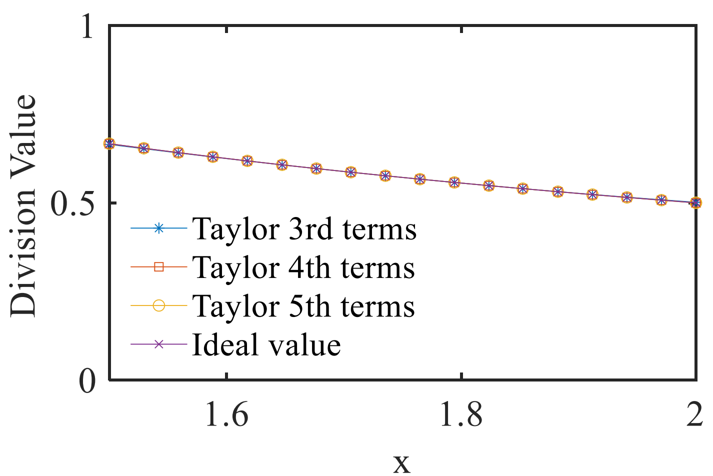
Newton's Method has entered an infinite cycle. Better initial guesses may be able to alleviate this problem.

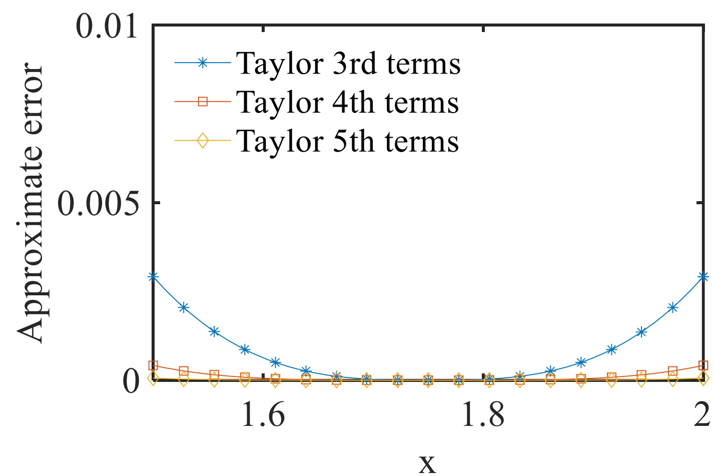
2 region case





Center value a=1.25 $1 \leq x < 1.5$

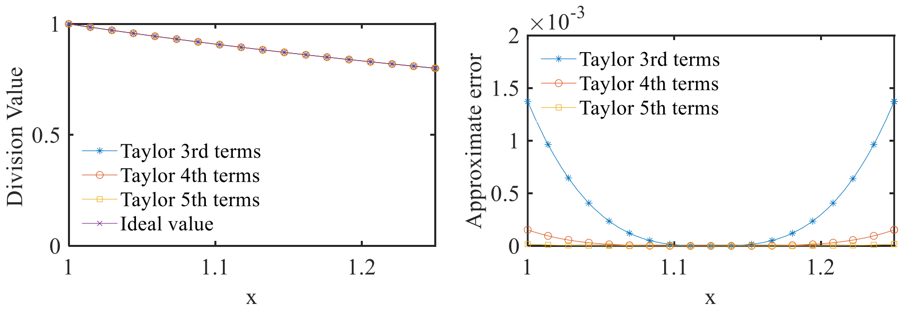




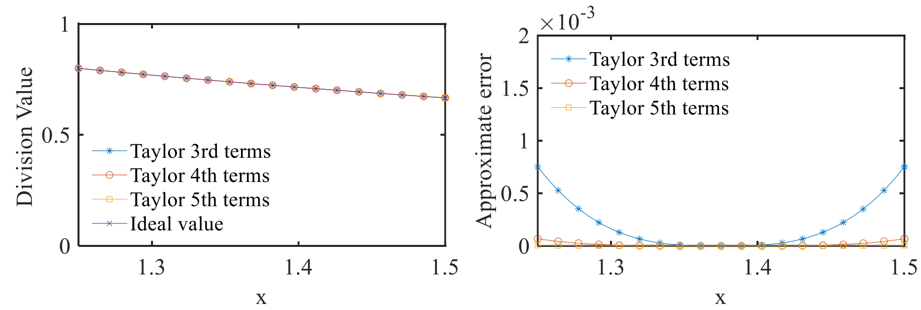
Center value a=1.75 $1.5 \leq x < 2$

Taylor series expansion of $\frac{1}{x}$

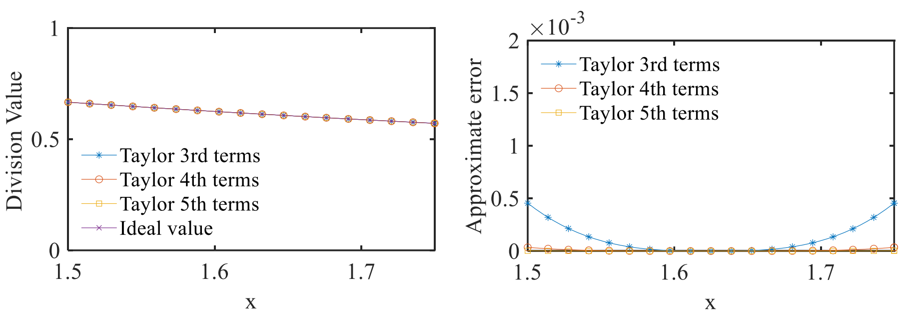
4 region case



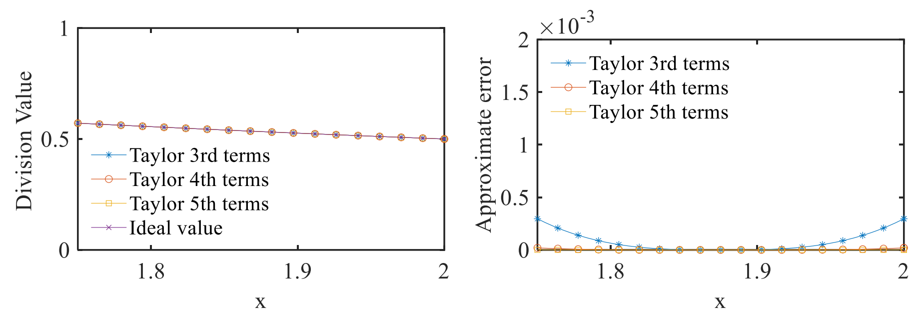
Center value a=1.125 $1 \leq x < 1.25$



Center value a=1.375 $1.25 \leq x < 1.5$



Center value a=1.625 $1.5 \leq x < 1.75$



Center value a=1.875 $175 \leq x < 2$

Taylor series expansion of $\frac{1}{x}$

仮数部の小数点の位置の変更

2進数での小数点表現:

仮数部 (Mantissa: M)　　指数部 (Exponent: E)

2進数表現:

$a, b, c, d, e, f, \cdots$ それぞれ 0 または1

$$\underline{M} \times 2^{E}$$

小数点

$$\underbrace{0.1abcdef}_{\text{Mantissa}} \cdots \times 2^{\underline{E}}$$

Exponent

$\boxed{0.5 \leqq M < 1}$ となる

例:1011001 (2進数) = 89 (10進数)

2進数表現: 0.1011001×2^{111}

10進数表現: $0.6953125 \times 2^{7} = 89$

シミュレーション結果

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

領域：0.5 ≦ x < 1

領域を1つ

テイラー展開 ＼ 精度	$\frac{1}{2^{8}}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
[1] M = 0.1xxxx… $0.5 \leqq M_D < 1$ a=0.75	6	11	13	16	21

領域を2分割

テイラー展開 ＼ 精度	$\frac{1}{2^{8}}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
(i) M = 0.10xxxx… $0.5 \leqq M_D < 0.75$ a=0.625	4	7	9	11	14
(ii) M = 0.11xxxx… $0.75 \leqq M_D < 1.0$ a=0.875	3	6	8	9	12

仮数部 M_Dの小数点2桁目を見て領域を2分割.

領域を4分割

テイラー展開 ＼ 精度	$\frac{1}{2^{8}}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
(i) M = 0.100xxxx… $0.5 \leqq M_D < 0.625$ a=0.5625	3	6	7	8	11
(ii) M = 0.101xxxx… $0.625 \leqq M_D < 0.75$ a=0.7125	3	6	7	8	11
(iii) M = 0.110xxxx… $0.75 \leqq M_D < 0.875$ a=0.8125	3	5	6	7	9
(iv) M = 0.111xxxx… $0.875 \leqq M_D < 1.0$ a=0.9375	3	5	6	7	9

仮数部 M_Dの小数点3桁目を見て領域を4分割

領域を8つ分けた場合

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

領域 : $0.5 \leqq x < 1$

仮数部 M_Dの小数点4桁目を見て領域を8分割

精度 / テイラー展開	$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
(ⅰ) M = 0.1000xxxx… $0.5 \leqq M_D < 0.5625$ a=0.5313	2	4	5	6	8
(ii) M = 0.1001xxxx… $0.5625 \leqq M_D < 0.625$ a=0.5938	2	4	5	6	8
(iii) M = 0.1010xxxx… $0.625 \leqq M_D < 0.6875$ a=0.6563	2	4	5	6	8
(iv) M = 0.1011xxxx… $0.6875 \leqq M_D < 0.75$ a=0.7188	2	4	5	6	8
(v) M = 0.1100xxxx… $0.75 \leqq M_D < 0.8125$ a=0.7813	2	4	5	6	7
(vi) M = 0.1101xxxx… $0.8125 \leqq M_D < 0.875$ a=0.8438	2	4	5	6	7
(vii) M = 0.1110xxxx… $0.875 \leqq M_D < 0.9375$ a=0.9063	2	4	5	5	7
(viii) M = 0.1111xxxx… $0.9375 \leqq M_D < 1$ a=0.9688	2	4	5	5	7

シミュレーション結果比較

仮数部:　1.xxxx

仮数部: 0.1xxxx

◆所望の精度を得るための
必要なテイラー展開項数は同等

24bit 精度を得るためには　テイラー展開で
領域8分割で　第6項まで
領域16分割で　第5項まで
領域32分割で　第4項まで
計算すればよい。

テーラー展開のための演算回数 (1)

テイラー展開4項までの計算の場合

$$g_4 = \frac{1}{a} - (\mathrm{x} - \mathrm{a}) + (\mathrm{x} - \mathrm{a})^2 - (\mathrm{x} - \mathrm{a})^3$$

- $\frac{1}{a}$ の値: メモリ (LUT: Look Up Table) に記憶して読み出す
- y=x-a 減算1回
- z= y^2 乗算1回
- $g = \frac{1}{a} - y + y^2 - y^3$

  $= \frac{1}{a} - y + z - yz$ 乗算1回 加減算3回

合計: 乗算2回 加減算4回

乗算器は加減算器にくらべて回路規模 大

テーラー展開のための演算回数 (2)

テイラー展開5項までの計算の場合

$$g_5 = \frac{1}{a} - (\mathrm{x} - \mathrm{a}) + (\mathrm{x} - \mathrm{a})^2 - (\mathrm{x} - \mathrm{a})^3 + (\mathrm{x} - \mathrm{a})^4$$

- $\frac{1}{a}$ の値： メモリ (LUT: Look Up Table) に記憶して読み出す
- y=x-a 減算1回
- z= y^2 乗算1回
- $g = \frac{1}{a} - y + y^2 - y^3 + y^4$
  $= \frac{1}{a} - (y - z)(1 + z)$ 乗算1回 加減算3回

合計： 乗算2回 加減算4回

テイラー展開の項数と演算回数

f(x)=1/x のテイラー展開が
比較的少ない演算回数で 計算可能

テイラー展開の項数	乗算	加減算
3	1	3
4	2	4
5	2	4
6	3	5
7	3	5
8	4	6

LUT のサイズ

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{a}} - (x-a) + (x-a)^2 - (x-a)^3 + \ldots\ldots$$

LUT に事前に記憶

領域4分割の場合　→ LUT は4ワード

address	LUT
00	a=1.125 の逆数
01	a=1.357 の逆数
10	a=1.625 の逆数
11	a=1.875 の逆数

M = 1.xx

仮数部小数点1, 2 桁で選択

LUT:　Look Up Table
（Memory)

分母仮数部の値で領域を8分割

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

領域：$1 \leqq x < 2$

仮数部 M_Dの小数点3桁目で　領域を8つに分割.

テイラー展開 ＼ 精度	$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
(i)　M = 1.000xxxx… $1 \leqq M_D < 1.125$　a = 1.0625	2	4	5	6	8
(ii)　M = 1.001xxxx… $1.125 \leqq M_D < 1.25$　a = 1.1875	2	4	5	6	8
(iii)　M = 1.010xxxx… $1.25 \leqq M_D < 1.375$　a = 1.3125	2	4	5	6	8
(iv)　M = 1.011xxxx… 1.375≦MD <1.5　a = 1.4375	2	4	5	6	8
(v)　M = 1.100xxxx… $1.5 \leqq M_D < 1.625$　a = 1.5625	2	4	5	6	7
(vi)　M = 1.101xxxx… 1.625≦MD <1.75　a = 1.6875	2	4	5	6	7
(vii)　M = 1.110xxxx… $1.75 \leqq M_D < 1.875$　a = 1.8125	2	4	5	5	7
(viii)　M = 1.111xxxx… $1.875 \leqq M_D < 2$　a = 1.9375	2	4	5	5	7

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f(x)$のテイラー展開式(2)

16分割の場合:

1≦MD <2

テイラー展開式項数 \ 精度	$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
[1] M = 1.0000xxxx… (1 ≦MD <1.0625) x=1.03125	2	4	4	5	7
[2] M = 1.0001xxxx… (1.0625≦MD <1.125) x=1.09375	2	4	4	5	7
[3] M = 1.0010xxxx… (1.125≦MD <1.1875) x=1.15625	2	4	4	5	7
[4] M = 1.0011xxxx… (1.1875≦MD <1.25) x=1.21875	2	4	4	5	7
[5] M = 1.0100xxxx… (1.25≦MD <1.3125) x=1.28125	2	3	4	5	6
[6] M = 1.0101xxxx… (1.3125≦MD <1.375) x=1.34375	2	3	4	5	6
[7] M = 1.0110xxxx… (1.375≦MD <1.4375) x=1.40625	2	3	4	5	6
[8] M = 1.0111xxxx… (1.4375≦MD <1.5) x=1.46875	2	3	4	5	6
[9] M = 1.1000xxxx… (1.5≦MD <1.5625) x=1.53125	2	3	4	5	6
[10] M = 1.1001xxxx… (1.5625≦MD <1.625)x=1.59375	2	3	4	5	6
[11] M = 1.1010xxxx… (1.625≦MD <1.6875=1.65625	2	3	4	5	6
[12] M = 1.1011xxxx… (1.6875≦MD <1.75) x=1.71875	2	3	4	5	6
[13] M = 1.1100xxxx… (1 .75≦MD <1.8125) x=1.78125	2	3	4	5	6
[14] M = 1.1101xxxx… (1.8125≦MD <1.875)x=1.84375	2	3	4	5	6
[15] M = 1.1110xxxx… (1.875≦MD <1.9375)x=1.90625	2	3	4	5	6
[16] M = 1.1111xxxx… (1.9375≦MD <2) x=1.96875	2	3	4	5	6

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$f(x)$のテイラー展開式(3)

32分割の場合:

1≦MD <2

テイラー展開式項数 \ 精度	$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^{20}}$	$\frac{1}{2^{24}}$	$\frac{1}{2^{32}}$
[1] M = 1.00000xxxx… (1 ≦MD <1.03125) x=1.015625	2	3	4	4	6
[2] M = 1.00001xxxx… (1.03125≦MD <1.0625) x=1.046875	2	3	4	4	6
[3] M = 1.00010xxxx… (1.0625≦MD <1.09375) x=1.078125	2	3	4	4	6
[4] M = 1.00011xxxx… (1.09375≦MD <1.125) x=1.109375	2	3	4	4	6
[5] M = 1.00100xxxx… (1.125≦MD <1.15625) x=1.140625	2	3	4	4	6
[6] M = 1.00101xxxx… (1.15625≦MD <1.1875) x=1.171875	2	3	4	4	6
[7] M = 1.00110xxxx… (1.1875≦MD <1.21875) x=1.203125	2	3	4	4	6
[8] M = 1.00111xxxx… (1.21875≦MD <1.25) x=1.234375	2	3	4	4	6
[9] M = 1.01000xxxx… (1.25≦MD <1.28125) x=1.265625	2	3	4	4	6
[10] M = 1.01001xxxx… (1.28125≦MD <1.3125)x=1.296875	2	3	4	4	6
[11] M = 1.01010xxxx… (1.3125≦MD <1.34375)x=1.328125	2	3	4	4	5
[12] M = 1.01011xxxx… (1.34375≦MD <1.375) x=1.359375	2	3	4	4	5
[13] M = 1.01100xxxx… (1.375≦MD <1.40625) x=1.390625	2	3	4	4	5
[14] M = 1.01101xxxx… (1.40625≦MD <1.4375)x=1.421875	2	3	4	4	5
[15] M = 1.01110xxxx… (1.4375≦MD <1.46875)x=1.453125	2	3	4	4	5
[16] M = 1.01111xxxx… (1.46875≦MD <1.5) x=1.484375	2	3	4	4	5
[17] M = 1.10000xxxx… (1.5≦MD <1.53125) x=1.515625	2	3	4	4	5
[18] M = 1.10001xxxx… (1.53125≦MD <1.5625)x=1.546875	2	3	4	4	5
[19] M = 1.10010xxxx… (1.5625≦MD <1.59375)x=1.578125	2	3	4	4	5
[20] M = 1.10011xxxx… (1.59375≦MD <1.625) x=1.609375	2	3	3	4	5
[21] M = 1.10100xxxx… (1.625≦MD <1.65625) x=1.640625	2	3	3	4	5
[22] M = 1.10101xxxx… (1.65625≦MD <1.6875)x=1.671875	2	3	3	4	5
[23] M = 1.10110xxxx… (1.6875≦MD <1.71875)x=1.703125	2	3	3	4	5
[24] M = 1.10111xxxx… (1.71875≦MD <1.75) x=1.734375	2	3	3	4	5
[25] M = 1.11000xxxx… (1.75≦MD <1.78125) x=1.765625	2	3	3	4	5
[26] M = 1.11001xxxx… (1.78125≦MD <1.8125)x=1.796875	2	3	3	4	5
[27] M = 1.11010xxxx… (1.8125≦MD <1.84375)x=1.828125	2	3	3	4	5
[28] M = 1.11011xxxx… (1.84375≦MD <1.875) x=1.859375	2	3	3	4	5
[29] M = 1.11100xxxx… (1.875≦MD <1.90625) x=1.890625	2	3	3	4	5
[30] M = 1.11101xxxx… (1.90625≦MD <1.9375)x=1.921875	2	3	3	4	5
[31] M = 1.11110xxxx… 1.9375≦MD <1.96875) x=1.953125	2	3	3	4	5
[32] M = 1.11111xxxx… (1.96875≦MD <2) x=1.984375	2	3	3	4	5