貴金属比サンプリング条件を用いた等価時間サンプリングの効率解析

群馬大学

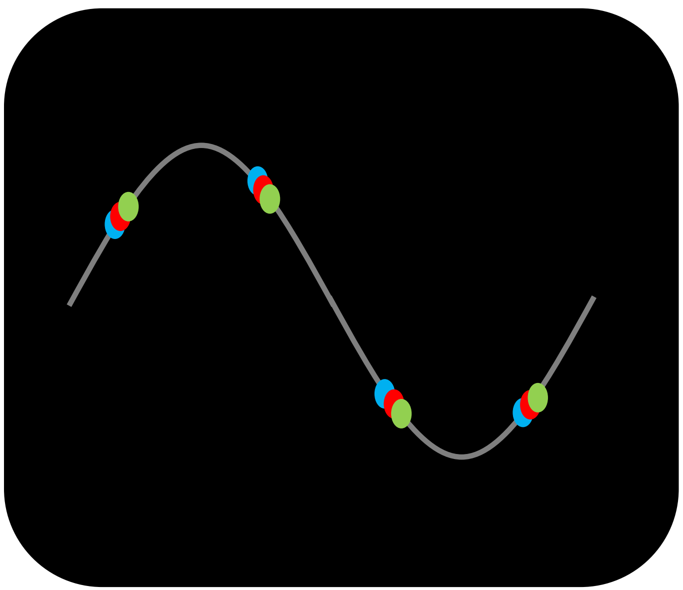
山本　修平、佐々木　優斗
桑名　杏奈、小林春夫

目次

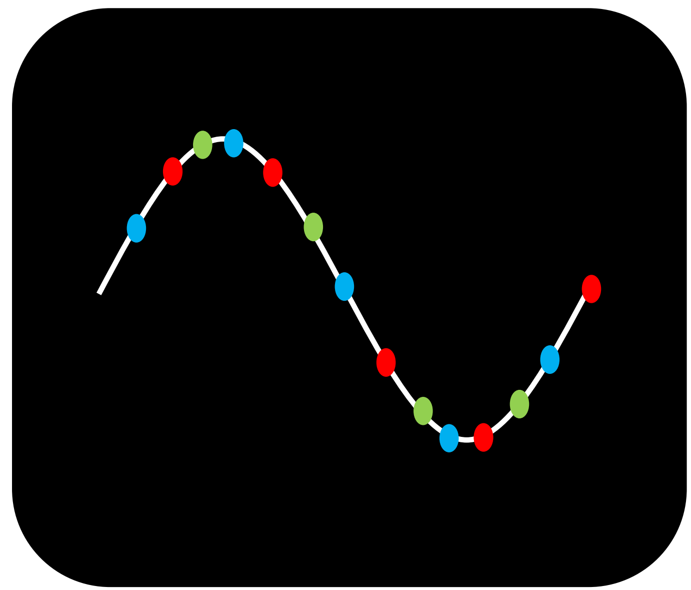
目次

研究目的

効率的なIC試験のために、
等価時間サンプリングでの高効率波形を取得する。



サンプリング点が局在 

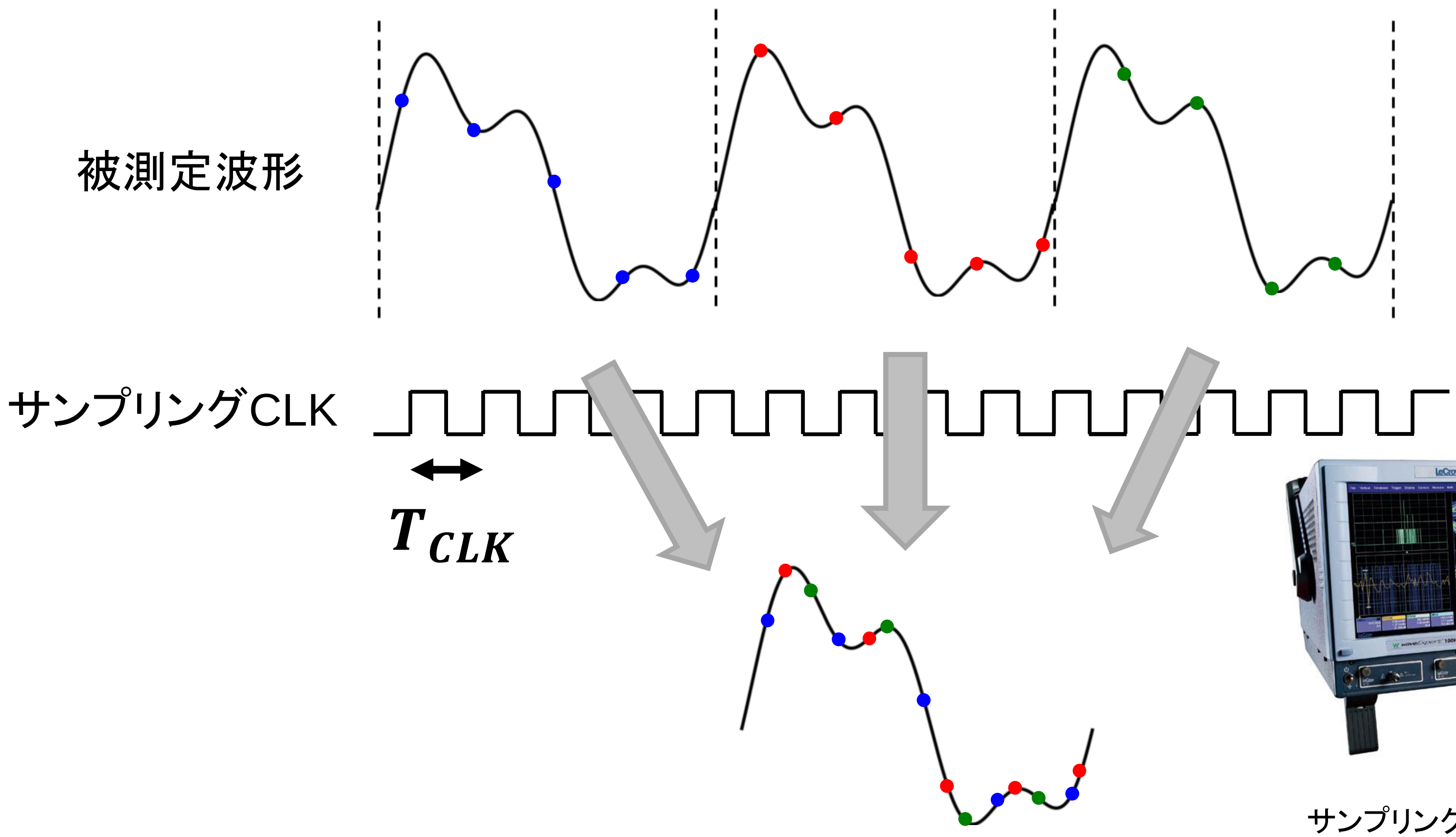


サンプリング点が分散 

目次

等価時間サンプリングとは

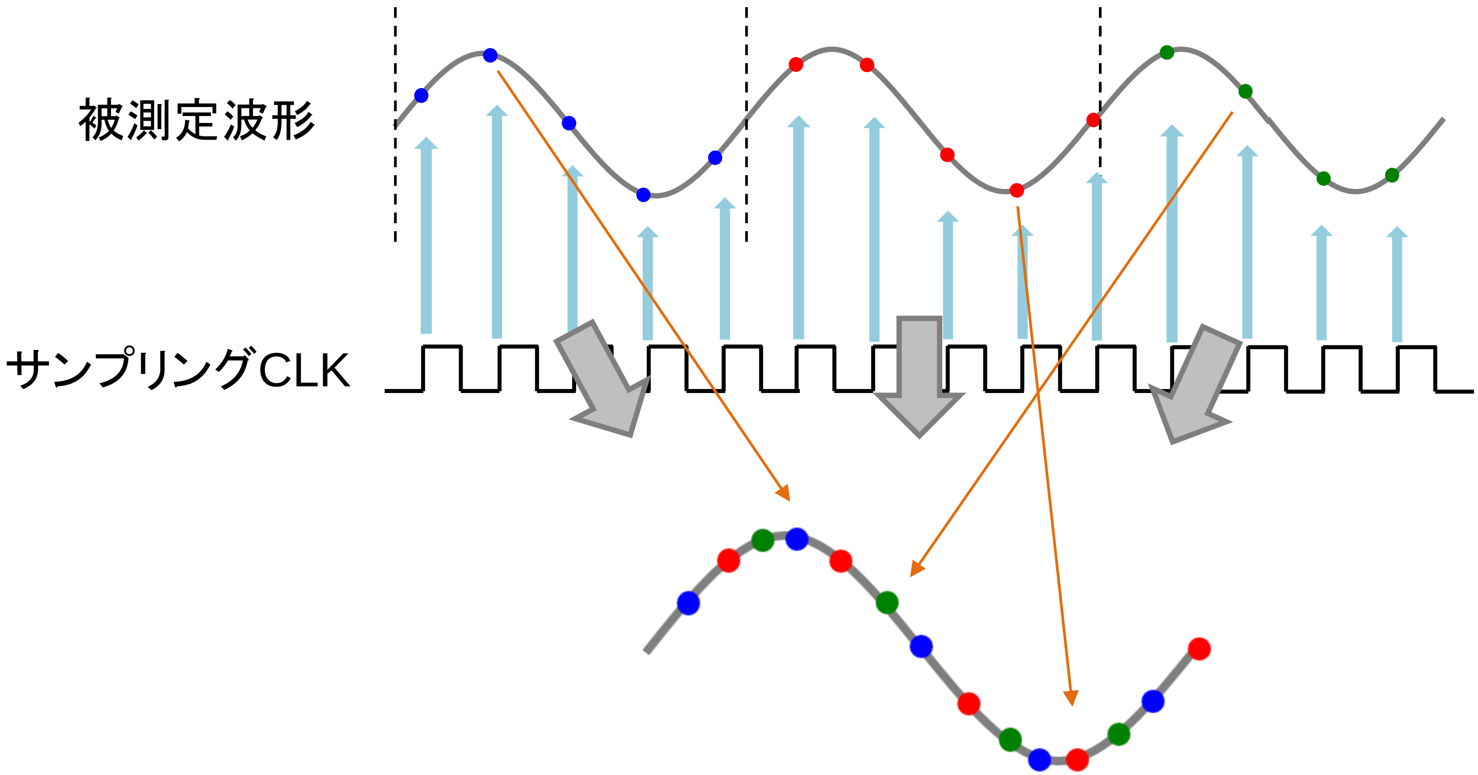
- 繰り返し波形を高時間分解能でサンプリングする技術。
- サンプリング・オシロスコープ等で使用。



サンプリングオシロスコープ

https://teledynelecroy.com/japan/products/scopes/we/default.asp

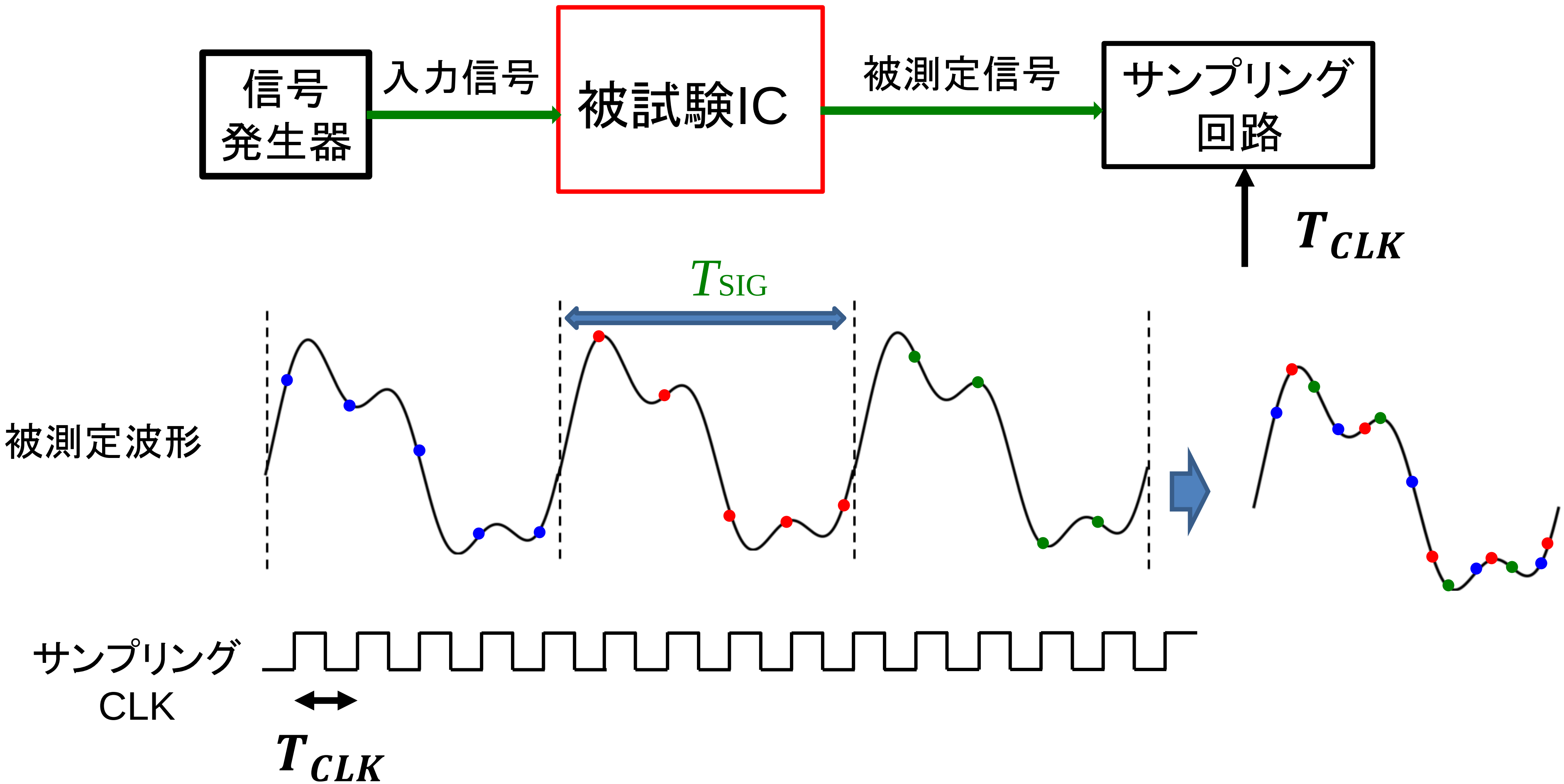
ランダム・サンプリングの原理



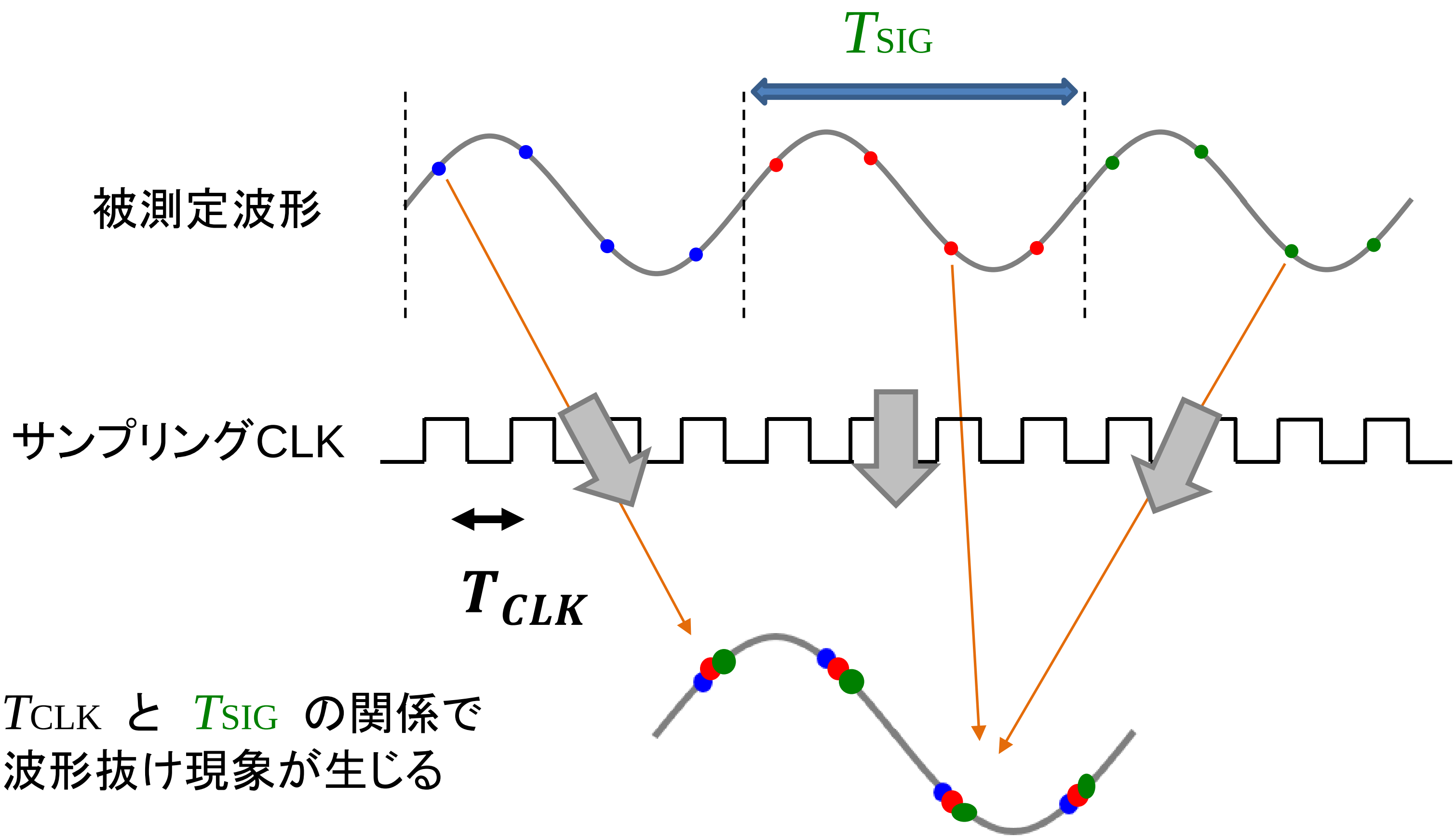
繰り返し波形を非同期CLKでサンプリング ➡ 1周期波形を構成

IC試験と等価時間サンプリング

- IC試験時に入力信号は制御可能
  周期 T_{SIG} の入力 → 周期 T_{SIG} の出力信号



波形抜け現象



T_{CLK} と T_{SIG} の関係で
波形抜け現象が生じる

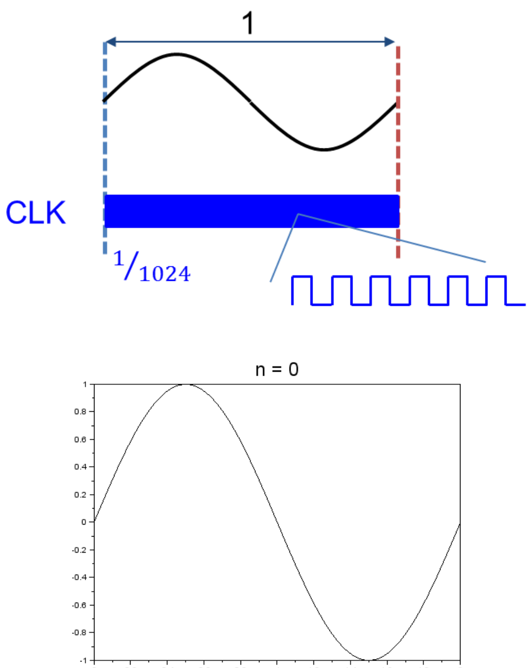
波形を再構成するために大量のデータが必要 ➡ 測定時間: 長

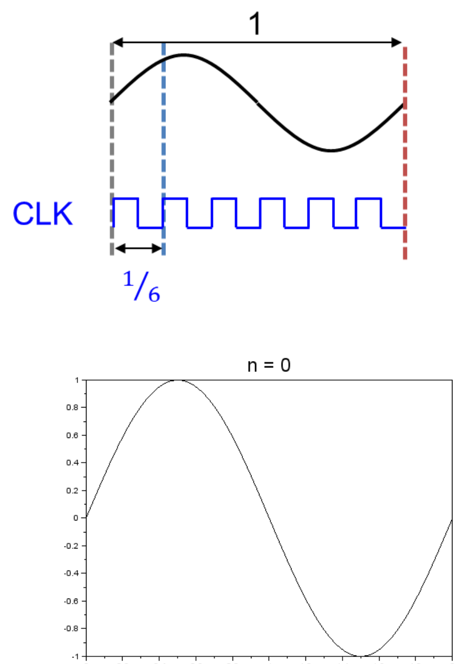
波形抜け条件(低効率)

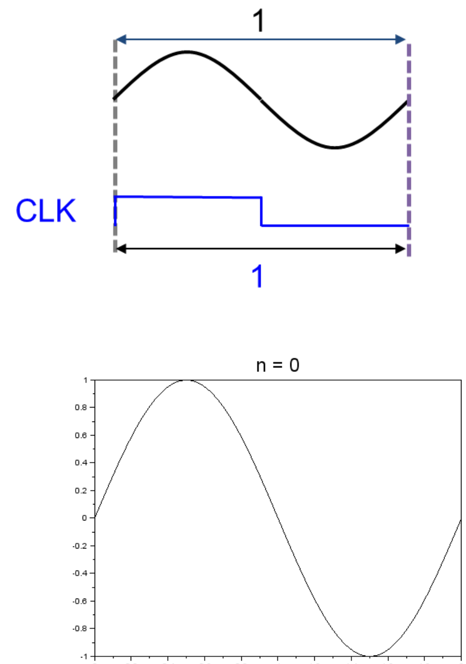
$f_{CLK} \gg f_{sin}$

$$f_{CLK} \approx \frac{1}{\alpha} f_{sin} \quad \left(\alpha = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{1}{6}, \cdots\right)$$

$f_{CLK} \approx f_{sin}$







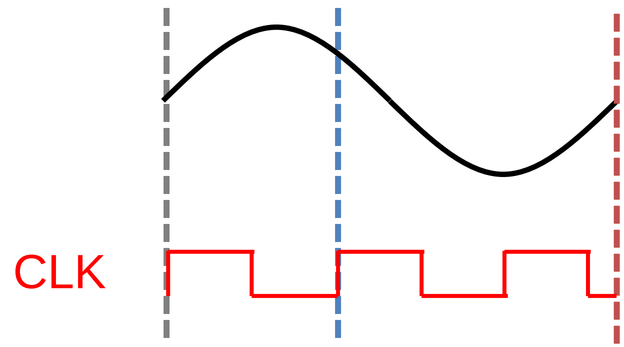
サンプリング点が局在 ➡ 隣接するサンプリング点間の距離の比: 大

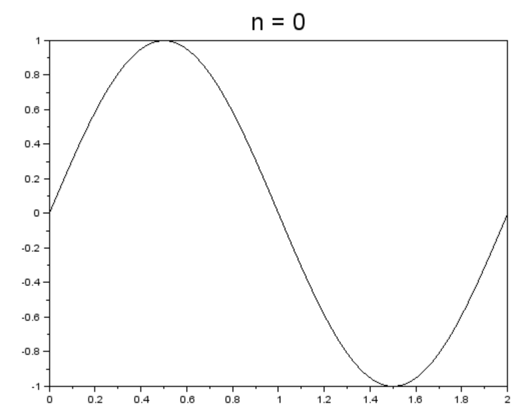
高波形取得効率条件

適切なCLK

サンプリング点が1周期内で一様に分散

高波形取得効率





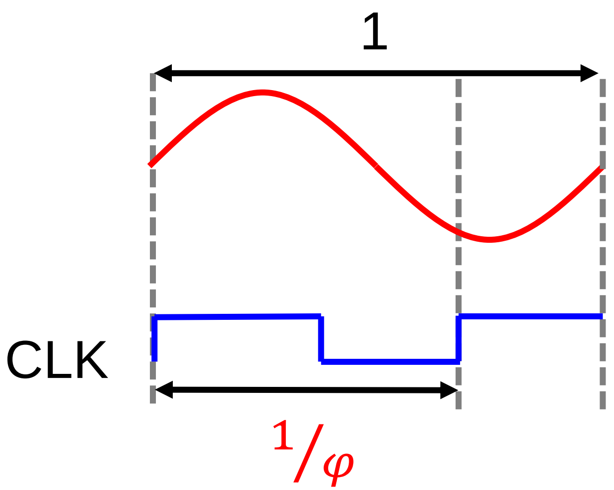
サンプリング点が分散 ➡ 隣接するサンプリング点間の距離の比：　小

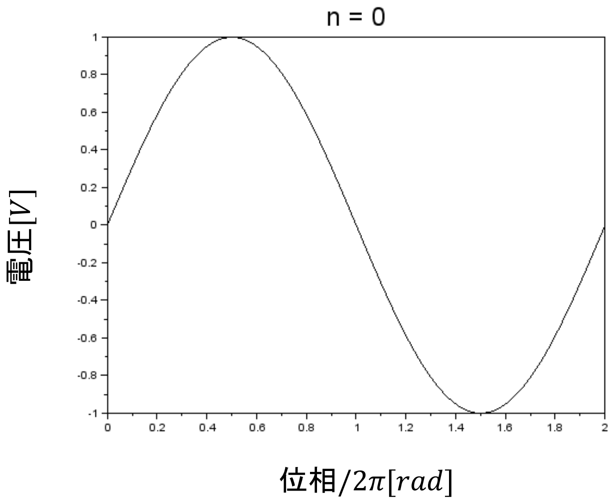
目次

黄金比サンプリング

$$f_{CLK} = \varphi \times f_{sig}$$

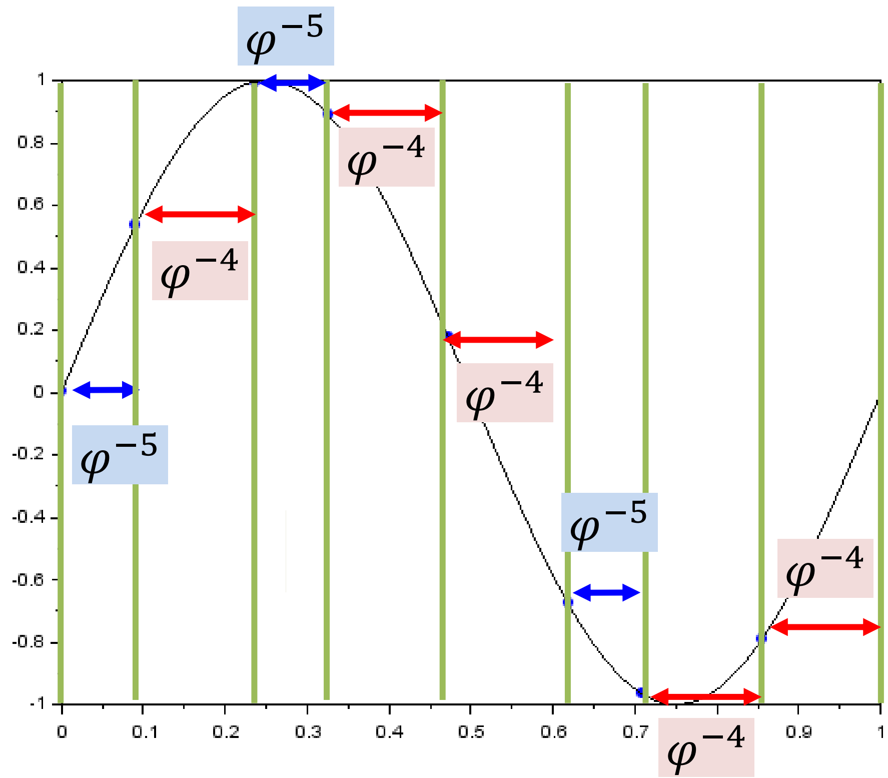
φ : 黄金数 （= 1.6180339887… ）





サンプリング点 ➡ 常に位相全体にまんべんなく分布

隣接点間距離（黄金比サンプリング）



$\boldsymbol{\varphi}$: 黄金数 (= 1.6180339887…)

最大距離／最小距離 ＝ φ または φ^2 （比が一定）

⇨ サンプリング点： 近付きすぎる＆遠すぎることがない

貴金属比

貴金属比

$$1 : \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} \qquad (n = 1, 2, 3\cdots)$$

M:貴金属数

n＝1： 黄金比（ M ＝1.6180…）

n＝2： 白銀比（ M ＝ 2.4142…）

n＝3： 青銅比（ M ＝ 3.3027…）

⋮

n＝m： 1：M

逆数との差が自然数

$M - \frac{1}{M}$ ＝自然数

連分数として表現

$$M = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + M}}$$

隣り合う項の比の極限が貴金属比になる数列

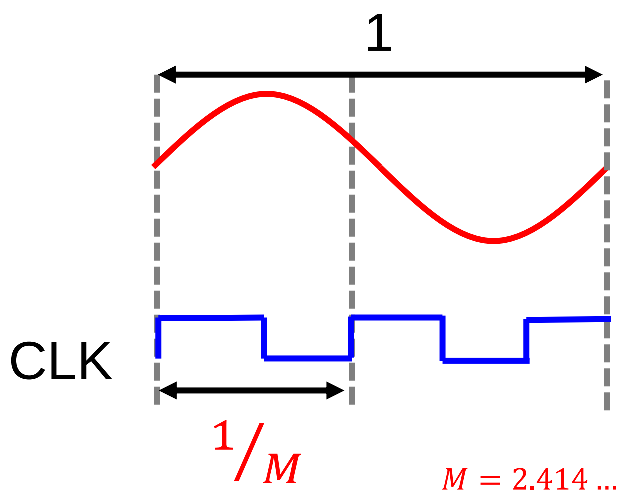
$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = nF_{n+1} + F_n$$

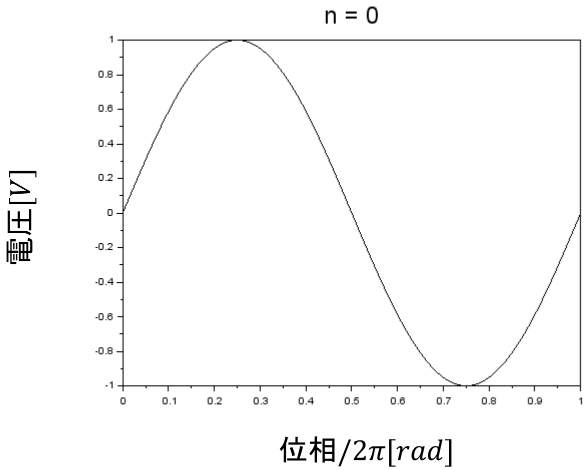
貴金属比サンプリング

ADC試験時：f_{CLK}を固定させ、様々なf_{sig}でADC特性を評価したい

$$f_{CLK} = M \times f_{sig}$$

M：貴金属数





白銀比サンプリングの場合

サンプリング点 ➡ 常に位相全体にまんべんなく分布

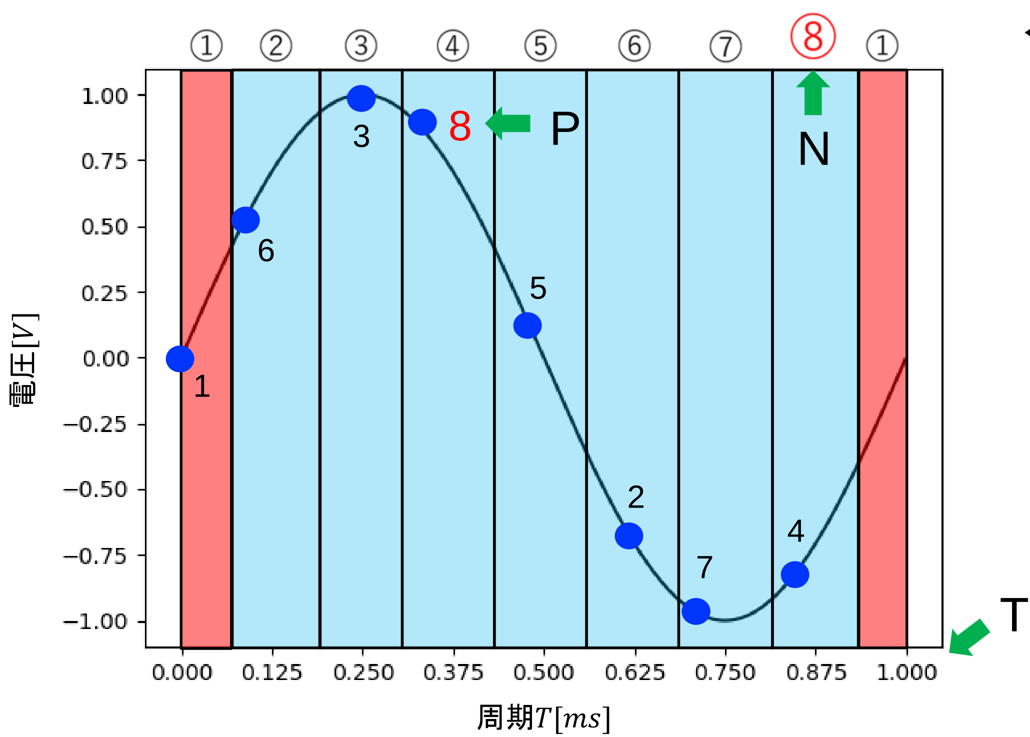
目次

効率について

N：周期Tの分割数

P： N個のすべての区間に少なくとも1点以上の状態になるまでの必要な点数

$$効率\ E = \frac{P}{N}$$



黄金比サンプリング8分割の場合

←分割領域を識別する番号

● サンプリング点とサンプリング順序

隣り合うサンプリング点の差は$\frac{2T}{N}$以下

黄金比サンプリング8分割の場合

$P = 8, N = 8,\ T = 1.0$ より、

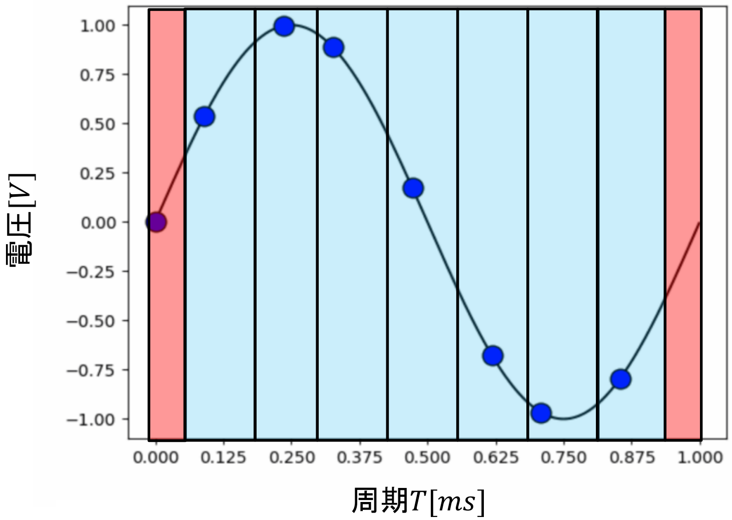
$$E = \frac{8}{8} = 1.0$$

隣り合うサンプリング点の差は $\frac{2}{8}$以下

貴金属比による効率の違い

8分割のとき

$n = 1$のとき（$M = 1.6180..$）



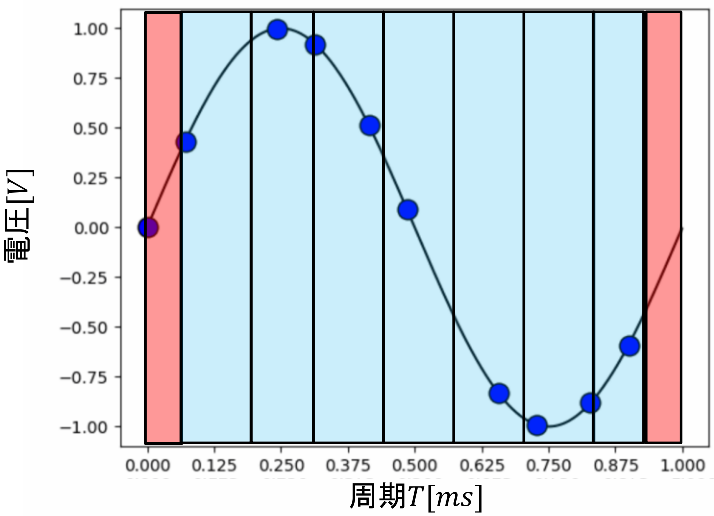
8点必要

$P = 8, N = 8, T = 1.0$であるので、

$$E = \frac{8}{8} = 1.0$$

隣り合うサンプリング点の差は $\frac{2}{8}$以下 となる。

$n = 2$のとき（$M = 2.4142..$）



10点必要

$P = 10, N = 8, T = 1.0$であるので、

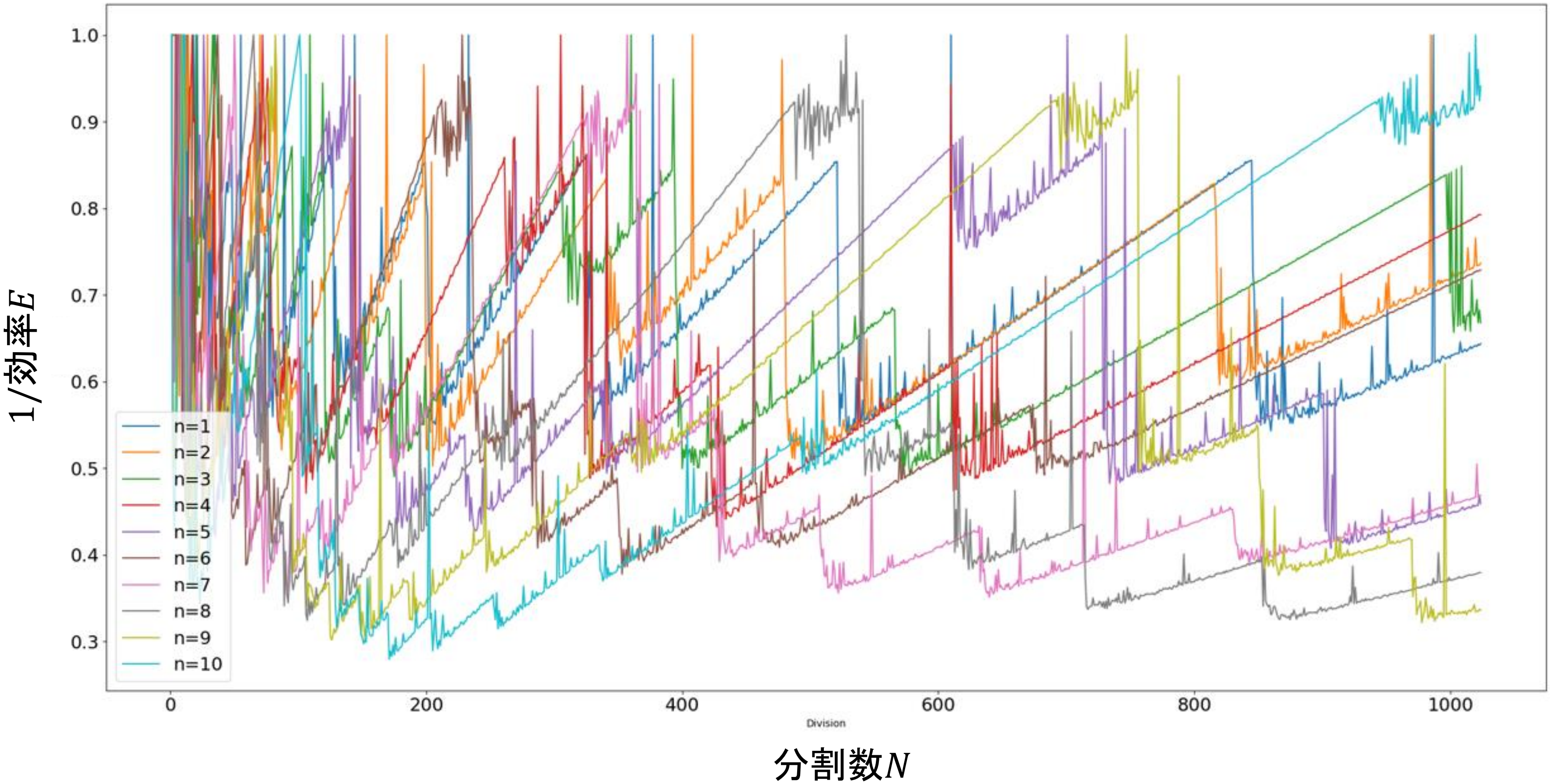
$$E = \frac{10}{8} = 1.250 \ldots$$

隣り合うサンプリング点の差は $\frac{2}{8}$ 以下となる。

貴金属比によって効率が異なる。

各貴金属比による効率

第n貴金属数($n = 1 \sim 10$), 分割数 $N = 1 \sim 1024$ の効率Eの遷移

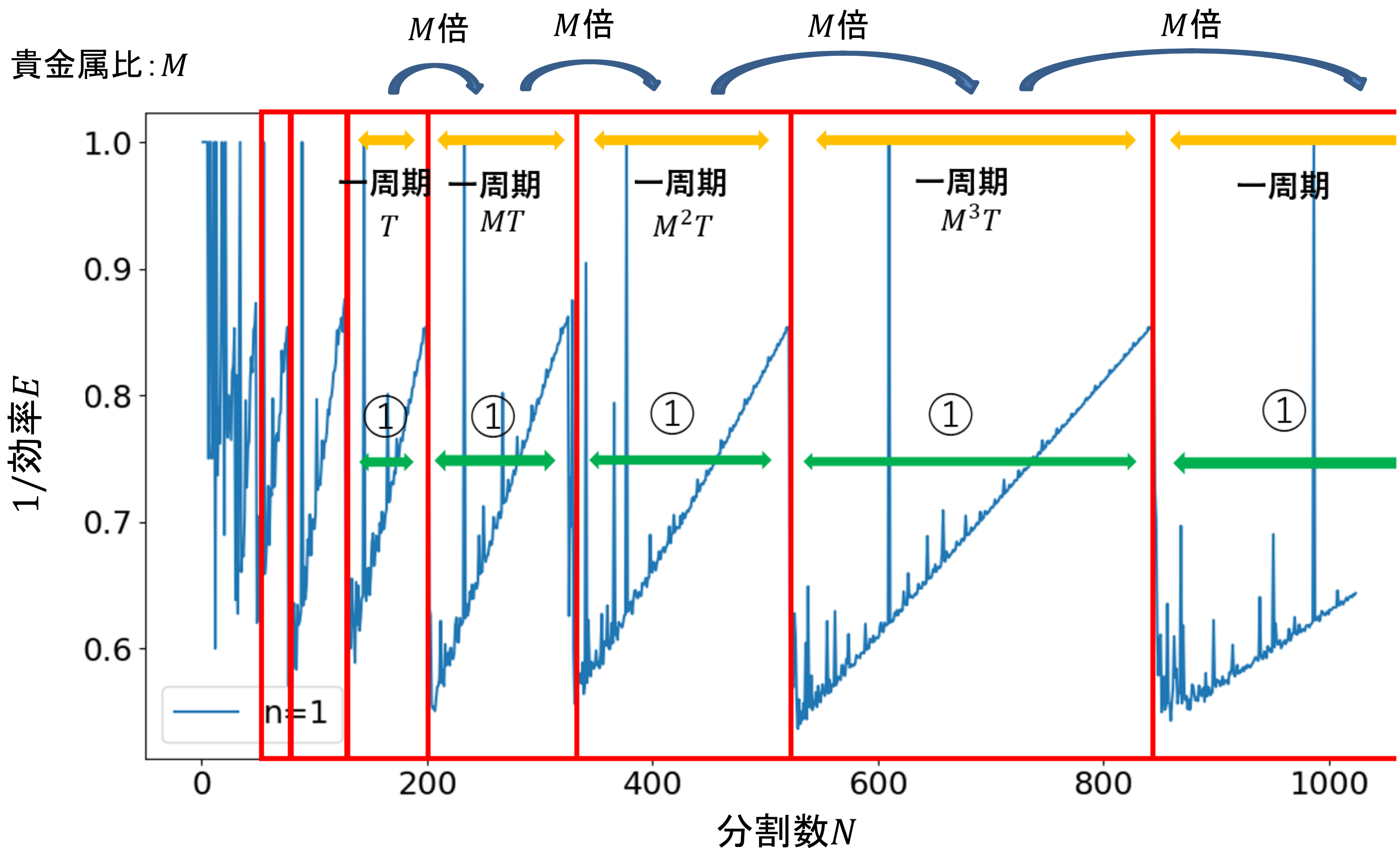


効率が貴金属比によって異なる。
縦軸を効率にするとランプ波状に遷移していることが確認できる。

目次

黄金比サンプリングの効率の周期性

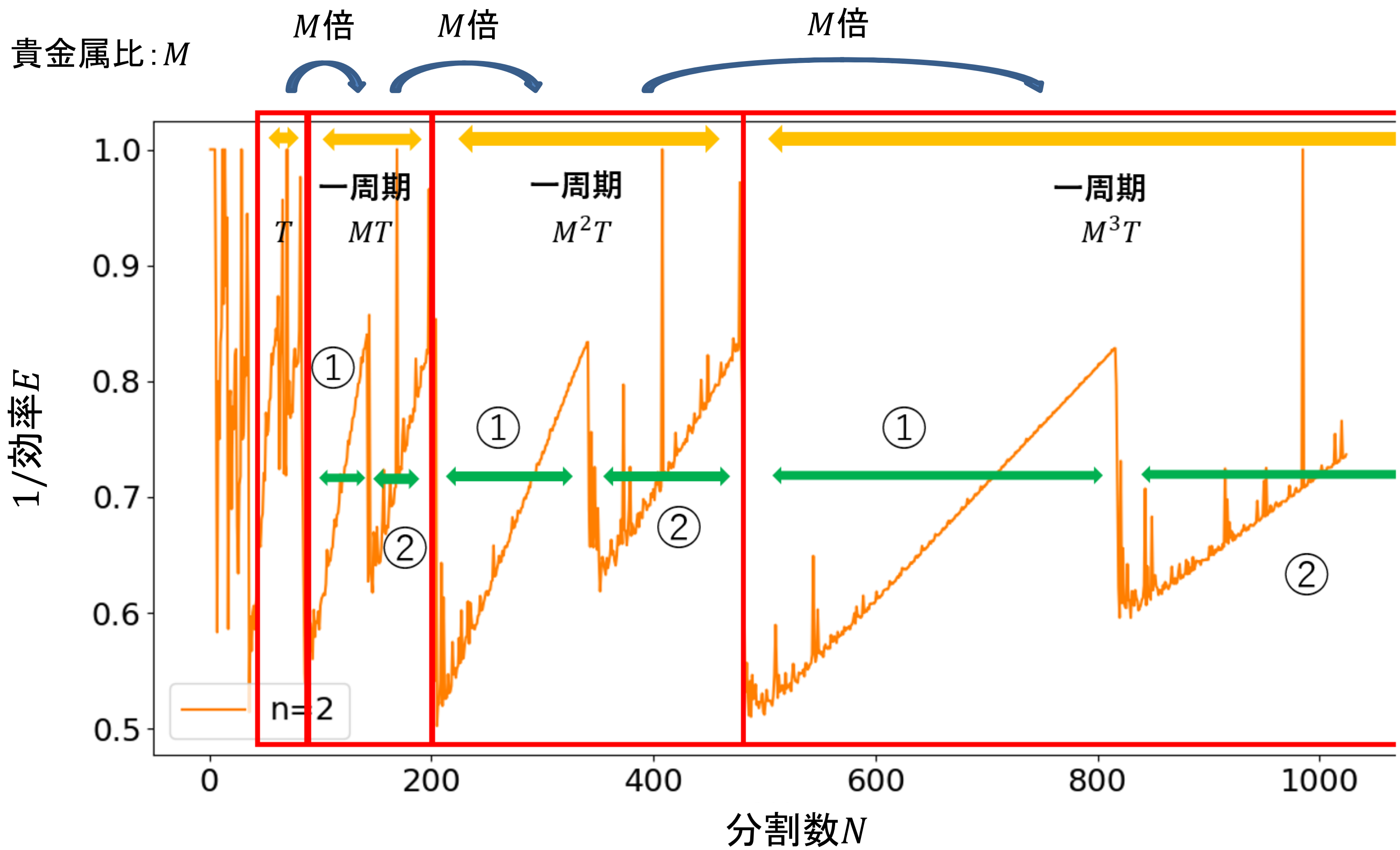
第n貴金属数 $n=1$, 分割数 $N=1\sim1024$ の効率Eの遷移



一周期を一つのランプ波で区切ると同じような波形が繰り返されている。
それぞれの周期の長さは、一周期ごとに黄金数倍される。

白銀比サンプリングの効率の周期性

第n貴金属数 $n = 2$, 分割数 $N = 1\sim1024$ の効率Eの遷移



2つのランプ波で区切ると同じような形で遷移していることが確認できる。
周期の長さは、一周期を経るごとに白銀数倍されていく。

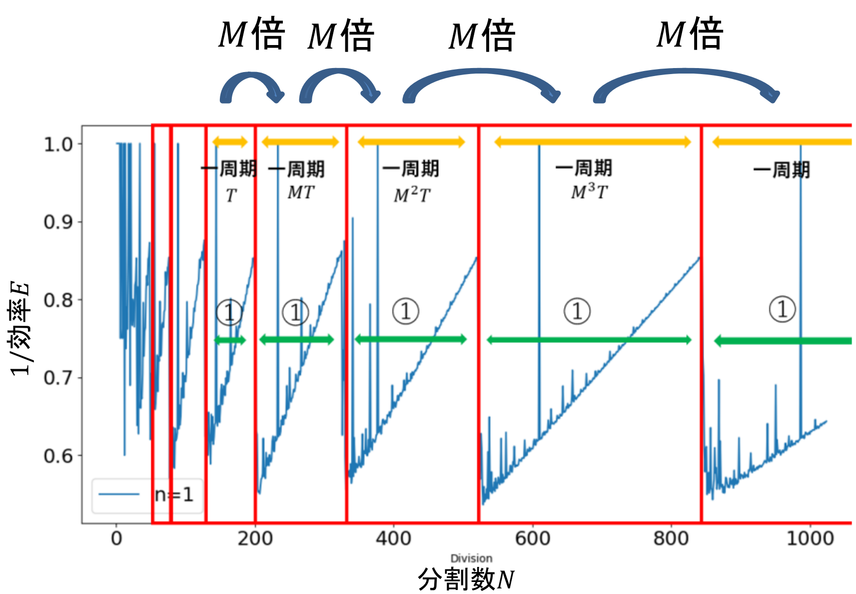
効率の周期性の発見

第n貴金属比における一周期は、n個のランプ波とみると周期性が見られる。

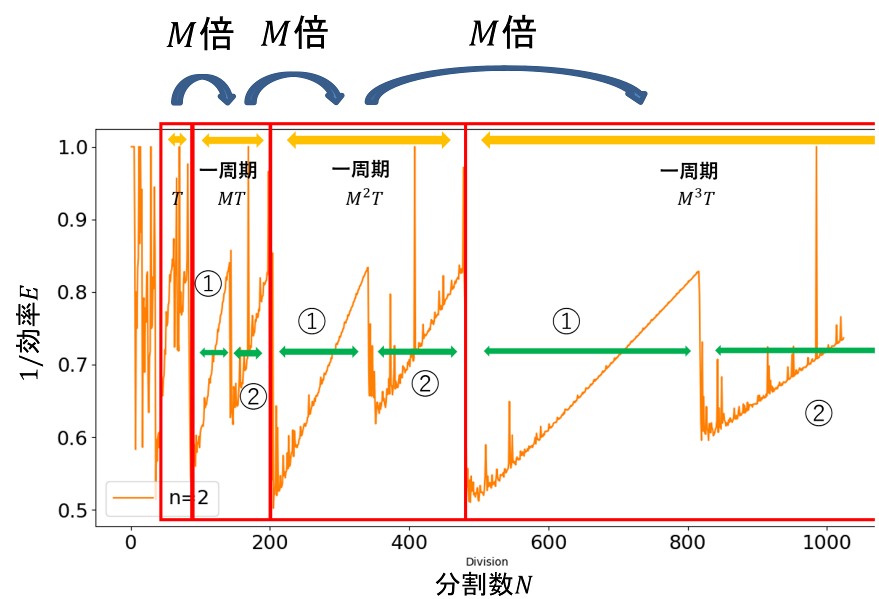
効率の周期の長さは、一周期毎に貴金属比倍されていく。

T_L ： L回目の周期　M ： 貴金属数

$$T_L = MT_{L-1}$$



第n貴金属数 $n = 1$, 分割数 $N = 1$~1024　の効率Eの遷移

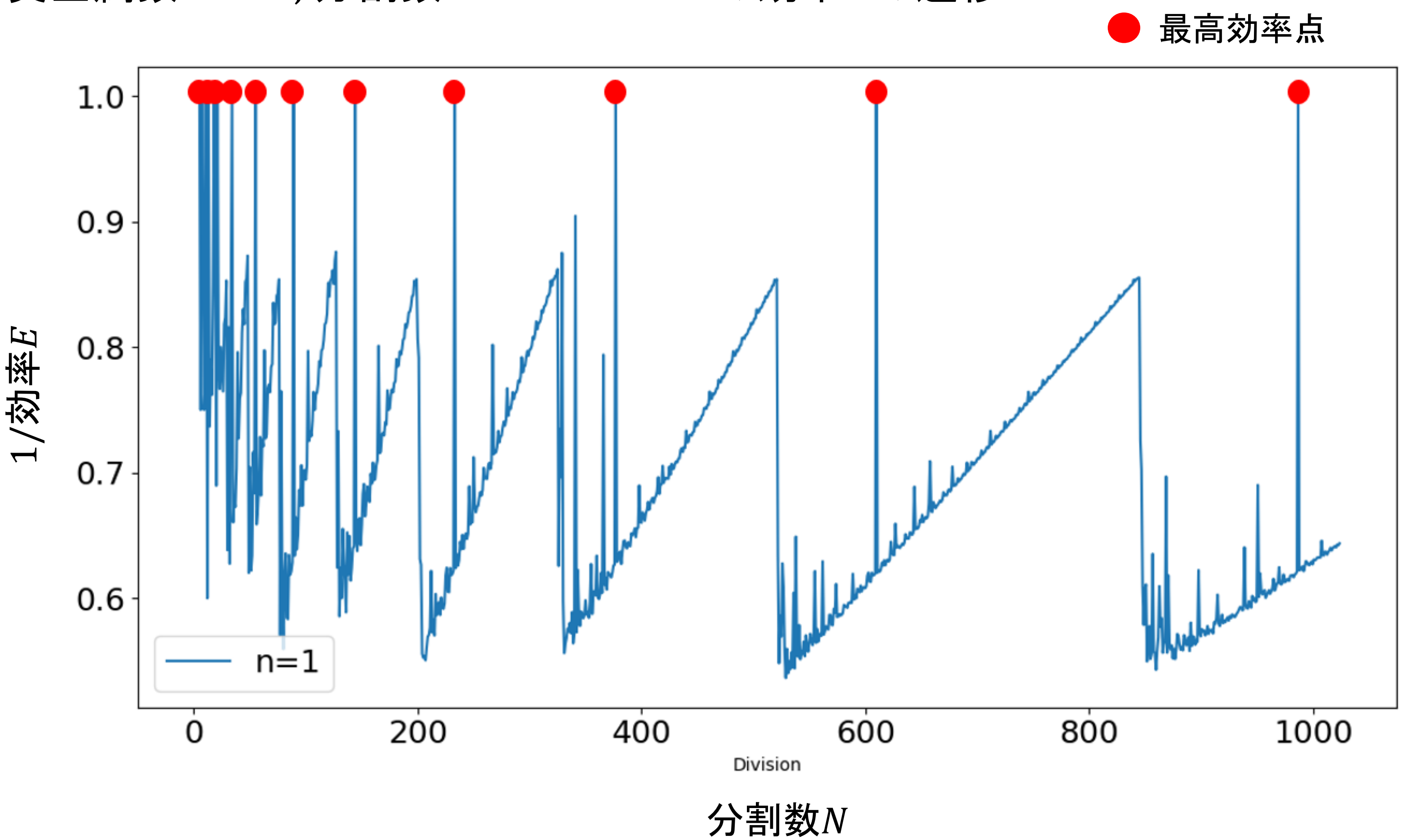


第n貴金属数 $n = 2$, 分割数 $N = 1$~1024　の効率Eの遷移

目次

効率が1.0になるときの分割数

第n貴金属数 $n = 1$, 分割数 $P = 1\sim1024$ の効率Eの遷移



効率が1.0になる分割数が存在する。
このときの分割数を最高効率点と定義する。

最高効率点の法則性の発見

黄金比($n = 1, M =$ 1.6180339887…)のとき

最高効率点 = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 18, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,…

$987 \div 610 = 1.6180327 \ldots$

白銀比($n = 2, M =$ 2.4142135623…)のとき

最高効率点 = 1, 2, 3, 4, 5, 12, 14, 29, 70, 169, 408, 985,…

$985 \div 408 = 2.4142156 \ldots$

青銅比($n = 3, M =$ 3.3027756377…)のとき

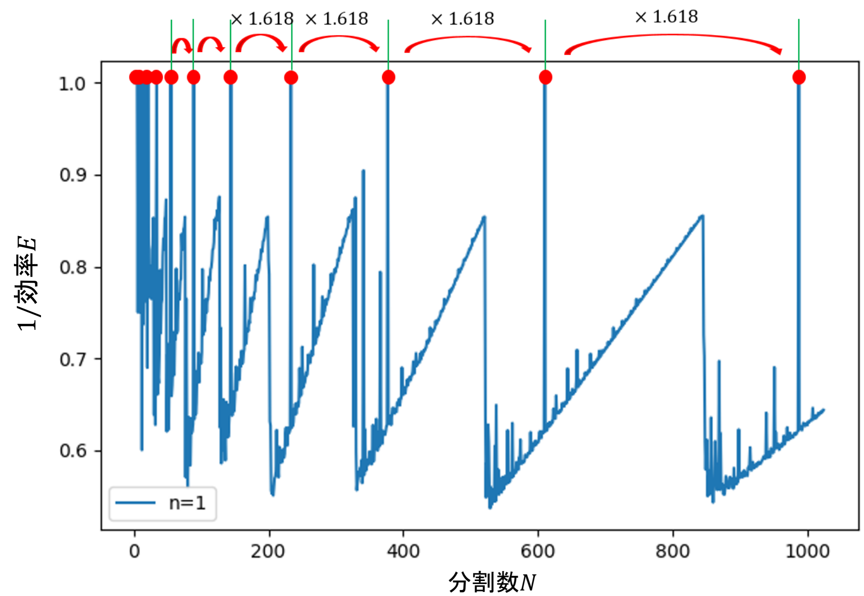
最高効率点 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 33, 35, 109, 360,…

$360 \div 109 = 3.3027522 \ldots$

隣り合う項の比の極限が
貴金属比になる数列と一致

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{m+2} = nF_{m+1} + F_m$$

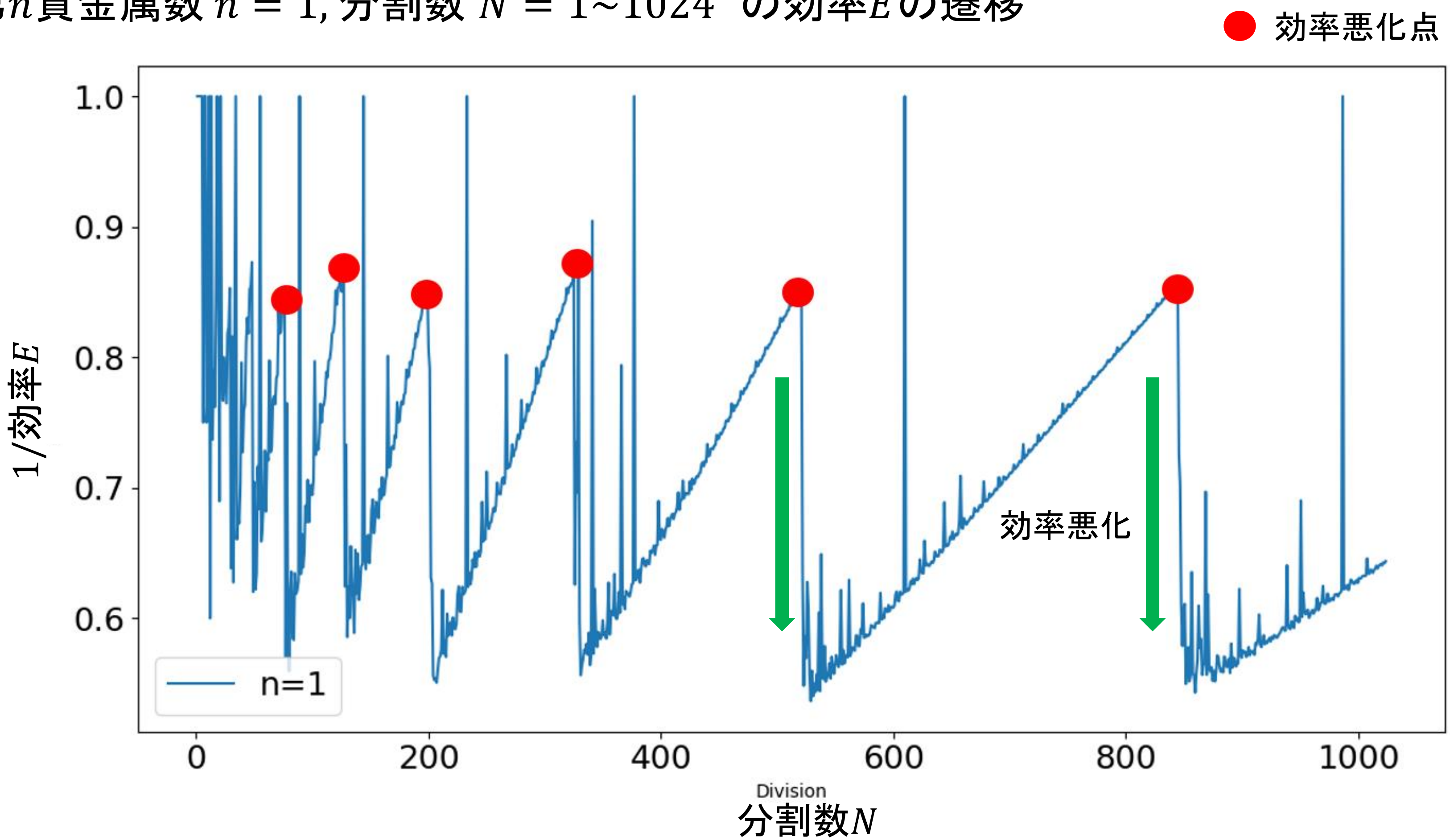
F_m : m番目の最高効率点



目次

効率が一気に悪くなる分割数

第n貴金属数 $n = 1$, 分割数 $N = 1 \sim 1024$ の効率Eの遷移



効率が一気に悪くなる分割数が存在する。
このときの分割数を効率悪化点と定義する。

効率悪化点の法則性の発見

黄金比($n = 1, M = 1.6180339887\ldots$)のとき

効率悪化点 = … 48, 76, 127, 199, 325, 521, 845, …

$845 \div 521 = 1.6218809 \ldots$

白銀比($n = 2, M = 2.4142135623\ldots$)のとき

効率悪化点 = …83, 142, 199, 341, 479, 816…

$816 \div 341 = 2.3929618 \ldots$, $479 \div 199 = 2.4070351 \ldots$

青銅比($n = 3, M = 3.3027756377\ldots$)のとき

効率悪化点 = …95, 120, 170, 306, 394, 566, 997…

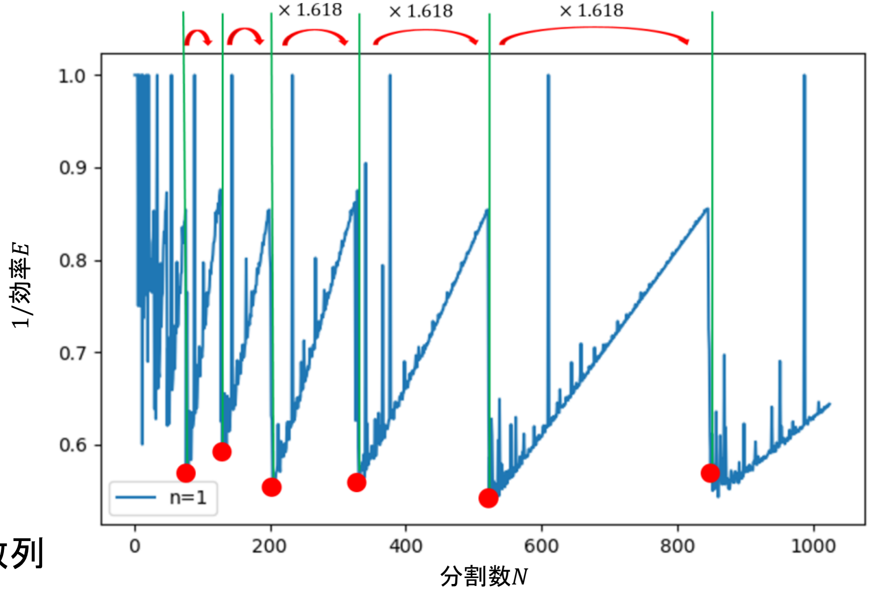
$997 \div 306 = 3.2581699 \ldots$, $566 \div 170 = 3.3294117 \ldots$

全体の$1/n$の効率悪化点

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{m+2} = nF_{m+1} + F_m$$
$$G_m = F_{m+2} + F_m$$

効率悪化点と貴金属比の関係

$$G_m : G_{m+n} = 1 : M$$



G_m : m個目の効率悪化点

F_m : m番目の隣り合う項の比が第n貴金属比になる数列

目次

まとめ

- 貴金属比サンプリングは、分割数によって最も波形取得効率が良い貴金属比が異なる。
- 貴金属比サンプリングの効率に関する法則性の発見
  - ➢ 効率の周期の長さ

    T_L：L回目の周期　M：貴金属数

    $$T_L = MT_{L-1}$$

  - ➢ 最高効率点の法則性

    F_m：m個目の最高効率点

    $$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{m+2} = nF_{m+1} + F_m$$

  - ➢ 効率悪化点の法則性

    G_m：m個目の効率悪化点　M: 第n貴金属数

    $$G_m = F_{m+2} + F_m$$
    $$G_m : G_{m+n} = 1 : M$$

今後の課題

- 貴金属比サンプリングによる全ての効率悪化点の法則性の理論的な導出。
- 最高効率点を除いた最大効率と最小効率の決定方法の特定。
- 任意の分割数に対して、一番効率が良い貴金属比の特定が容易にできるようにする。

「整数論は数学の女王である」
カール・フリードリヒ・ガウス

Q&A

Q. 使いたい貴金属比の最高効率点に合わせて、分割数を決めるということですか。

A. 求めている精度に合わせて、分割数を決めて頂き、それに合わせて貴金属比を決めるという流れを想定しています。

Q. シミュレーションにはどのくらいの時間を要しましたか。

A. 分割数が1024程度であれば、10~20秒程度で可能です。分割数の増加に対して、おおよそ指数関数的にシミュレーション時間は増え、4000程度になりますと、数分程度の時間を要します。また、対応する貴金属の数が増加すると、その数倍シミュレーション時間は増加します。