自然指数関数の分散型積和演算アルゴリズムの研究

Hemthavy Xaybandith
片山翔吾, 桑名杏奈, 小林春夫

群馬大学　理工学府　電子情報部門

目次

- 研究背景と研究目的
- 関数モデルとテイラー展開
- 分散型積和演算
- 実行例での検証
- 改良構成
- 他関数への応用
- まとめ

目次

- **研究背景と研究目的**
- 関数モデルとテイラー展開
- 分散型積和演算
- 実行例での検証
- 改良構成
- 他関数への応用
- まとめ

研究背景

科学技術計算機から携帯機器まで

デジタル浮動小数点演算

様々な関数　$\exp(x)$, $\log(x)$, $\sqrt{x}$, $1/x$…

- **高速**
- **高精度**
- **小規模回路・低消費電力**

が求められる

研究目的

デジタル浮動小数点演算
様々な関数 $\boxed{\exp(x)}$, $\log(x)$, $\sqrt{x}$, $1/x$…

↓

テイラー展開、高速・高精度演算

↓

分散型積和演算の適用を検討

- <u>乗算器を使用せず</u>
- メモリと加算器を使用
- 小規模回路
- 高速演算

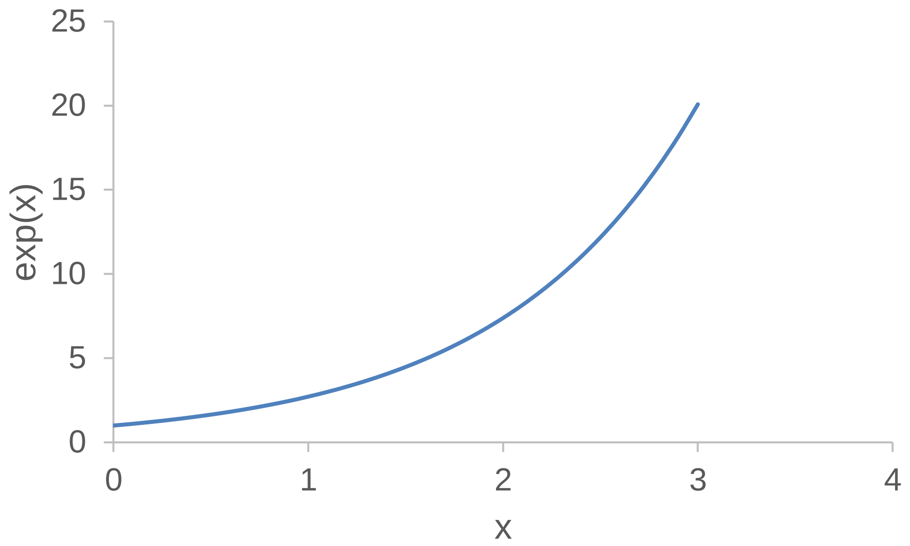
目次

- 研究背景と研究目的
- 関数モデルとテイラー展開
- 分散型積和演算
- 実行例での検証
- 改良構成
- 他関数への応用
- まとめ

指数関数とテイラー展開

自然指数関数

$$e^x, \exp(x)$$



波形、RCローパスフィルタの出力電圧など

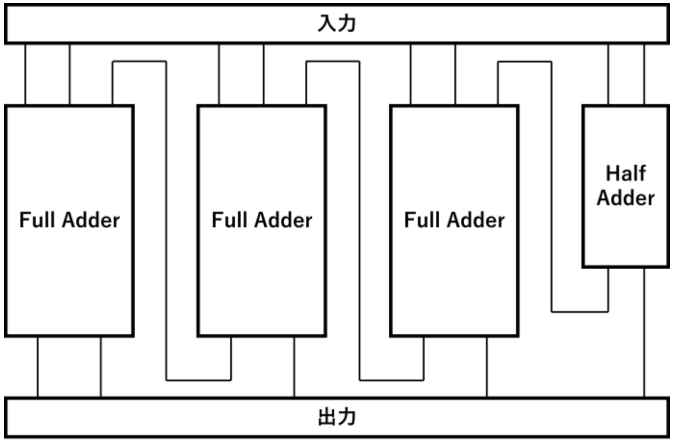
$$e^{i\theta} \qquad Vout(t) = Vin \times (1 - e^{-\frac{t}{CR}})$$

テイラー展開使用 ⇒ 積和演算で計算可

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

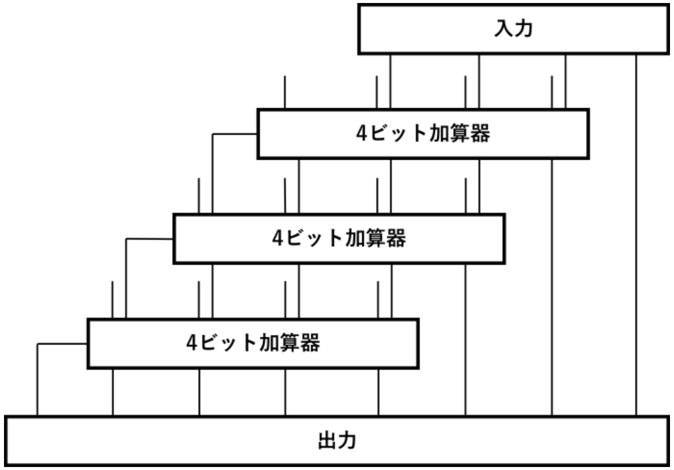
デジタル加算器と乗算器

4bit 加算器



- Full adder 4個

4bit 乗算器



- Full adder 2倍
- 2倍のlatency（遅い）

乗算器の個数はできるだけ少なく！

指数関数のテイラー展開演算

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

演算回路実装 ⇒ 乗算の回数を少に

直接

$$x^2 = x \times x$$
$$x^3 = x^2 \times x$$
$$x^4 = x^2 \times x^2$$
$$x^5 = x^3 \times x^2$$
$$x^6 = x^3 \times x^3$$

乗算5回

$$\frac{x^2}{2!} \quad \frac{x^3}{3!} \quad \frac{x^4}{4!} \quad \frac{x^5}{5!} \quad \frac{x^6}{6!}$$

乗算5回

分散型
積和演算

$$x^2 = x \times x$$
$$x^3 = x^2 \times x$$
$$x^4 = x^2 \times x^2$$
$$x^5 = x^3 \times x^2$$
$$x^6 = x^3 \times x^3$$

乗算5回

⇓

加算に変える

2進数 浮動小数点表現

x を 2進数 浮動小数点表現 $M \times 2^{E}$　　$1 \leq M < 2$

1　　8　　23

1　　11　　52

符号部
Sign

指数部
Exponent

仮数部
Mantissa

32bit

64bit

$$例 : x = 2022 \Rightarrow 1.11111100011 \times 2^{10}$$

M　　E

数式モデルとテイラー展開

$$f(x) = e^{x} \longrightarrow f(M, E) = e^{M} \times e^{2^{E}}$$

2進数 浮動小数点表現

y_1 y_2

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \frac{x^{5}}{5!} + \frac{x^{6}}{6!} + \cdots$$

⇩

y_1 と y_2 に適用

目次

- 研究背景と研究目的
- 関数モデルとテイラー展開
- <u>分散型積和演算</u>
- 実行例での検証
- 改良構成
- 他関数への応用
- まとめ

テイラー展開への分散型積和演算適用

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

係数とxとの積をなくせる

1か0が入る

	MSB		LSB
X			
X^2			
X^3			
X^4			
X^5			
X^6			

係数の和を計算

列ごとの和を2倍しながら加算していく

並列ビットシリアル演算

$$y = \left(2 * \left(2 * (2 * \square) + \square\right) + \square\right) \times \frac{1}{2^n}$$

小数点以下nビットの分だけ$\frac{1}{2}$をかける

固定小数点の位を正すためのビットシフト

目次

- 研究背景と研究目的
- 関数モデルとテイラー展開
- 分散型積和演算
- <u>実行例での検証</u>
- 改良構成
- 他関数への応用
- まとめ

分散型積和演算:$e^{1.5}$ (10)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

メモリ: 係数値

x のべき乗値

$x = 1.1$ (2)

並列ビットシリアル演算

例

MSB　　　　LSB

X	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
X^2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
X^3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
X^4	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
X^5	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
X^6	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1

係数の和を計算

列ごとの和を2倍しながら加算していく

加算器

分散型積和演算　ステップ1（MSB)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

例

X	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
X^2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
X^3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
X^4	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
X^5	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
X^6	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1

$$y - 1 = \frac{1}{720}$$

分散型積和演算 ステップ2 (MSB-1)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

例

X	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
X^2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
X^3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
X^4	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
X^5	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
X^6	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1

1ビット左シフト

$$y - 1 = \left(\begin{array}{c} \mathbf{2} \times \left(\frac{1}{720}\right) \\ + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{120}\right) \end{array} \right)$$

分散型積和演算 ステップ3 (MSB-2)

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

例

X	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
X^2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
X^3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
X^4	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
X^5	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
X^6	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1

$$y - 1 = \left(\begin{array}{c} 2 \times \left(\begin{array}{c} 2 \times \left(\frac{1}{720}\right) \\ + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{120}\right) \end{array} \right) \\ + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}\right) \end{array} \right)$$

分散型積和演算 最終ステップ

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

例

X	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
X^2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
X^3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
X^4	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
X^5	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
X^6	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1

$$y - 1 = \left(2 \times \left(2 \times \left(2 \times \left(2 \times \left(2 \times \left(2 \times \left(2 \times \left(2 \times \left(2 \times \frac{1}{720} + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{24} \right) \right) + \left(\frac{1}{720} + \frac{1}{120} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \right) + \left(\frac{1}{720} + \frac{1}{120} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + 1 \right) \right) + \left(\frac{1}{120} + 1 \right) \right) + \left(\frac{1}{720} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) \right) + \left(\frac{1}{720} + \frac{1}{6} \right) \right) + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{24} \right) \right) + \frac{1}{120} \right) + \frac{1}{720} \right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$y = 4.477539063$$

分散型積和演算
アルゴリズム

1.1 (2進) ⇒ 1.5 (10進)

$$e^{1.5} = 4.48168907$$

電卓

99.9% 一致！！

目次

- 研究背景と研究目的
- 関数モデルとテイラー展開
- 分散型積和演算
- 実行例での検証
- <u>改良構成</u>
- 他関数への応用
- まとめ

2項ずづまとめて計算

X	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X^2	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X^3	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X^4	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
X^5	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
X^6	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

３項ずつまとめて計算

X	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X^2	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X^3	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X^4	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
X^5	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
X^6	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

改良構成

同時に計算する項数を減らす

↓

2行ずつまたは3行ずつ計算し　最後にまとめる

↓

メモリと加算器の削減、**回路の小型化**

目次

- 研究背景と研究目的
- 関数モデルとテイラー展開
- 分散型積和演算
- 実行例での検証
- 改良構成
- <u>他関数への応用</u>
- まとめ

他関数への応用：$\frac{1}{\sqrt{x}}$

aまわりのテイラー展開

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{1 - \frac{x-a}{2a} + \frac{3(x-a)^2}{8a^2} - \frac{5(x-a)^3}{16a^3} + \frac{35(x-a)^4}{128a^4} - \cdots\right\}$$

$\downarrow$ 1まわりのテイラー展開

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots$$

$\downarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \underline{\left(\frac{3}{8}x^2 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots\right)} - \underline{\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{16}x^3 + \cdots\right)}$$

他関数への応用: $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}}} = \mathbf{1} + \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{x}^{2} + \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{128}}\boldsymbol{x}^{4} + \cdots\right) - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}\boldsymbol{x}^{3} + \cdots\right)$$

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ x^4 \\ x^6 \\ x^8 \\ x^{10} \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ & & & & & \cdots & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x^3 \\ x^5 \\ x^7 \\ x^9 \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ & & & & & \cdots & & & & \end{pmatrix}$$

他関数への応用：$\frac{1}{\sqrt{1.5}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \underbrace{\left(\frac{3}{8}x^2 + \frac{35}{128}x^4 + \frac{231}{1024}x^6\right)}_{y_1} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{16}x^3 + \frac{63}{256}x^5\right)}_{y_2}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ x^4 \\ x^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & . & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x^3 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & . & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \left(2\times\left(2\times\left(2\times\left(2\times\frac{3}{8}+0\right)+\frac{35}{128}\right)\right)+0+\frac{231}{1024}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0.114364624$$

$$y_2 = \left(2\times\left(2\times\left(2\times\left(2\times\frac{1}{2}+0\right)+\frac{5}{16}\right)\right)+0+\frac{63}{256}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.2967529297$$

分散型積和演算：　0.8176116943

電卓計算　　　　：　0.8164965809

他関数への応用

$$f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \cdots$$

係数とxのべき乗との積の形にテイラー展開できればすべての関数に応用可能

$$\begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & . & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow a \\ \leftarrow b \\ \leftarrow c \\ \leftarrow d \\ \leftarrow e \\ \leftarrow f \end{array}$$

係数の和を計算

列ごとの和を2倍しながら加算していく

目次

- 研究背景と研究目的
- 関数モデルとテイラー展開
- 分散型積和演算
- 実行例での検証
- 改良構成
- 他関数への応用
- まとめ

まとめ

様々な関数の浮動小数点デジタル演算

回路規模が大きい

テイラー展開　通常計算：　乗算が多い

↓

回路規模が小さい

分散型積和演算：　乗算を減らし、加算を増やす

テイラー展開計算に有効

参考文献

(1) J. Wei, A. Kuwana, H. Kobayashi, K. Kubo, “Divide and Conquer: Floating-Point Exponential Calculation Based on Taylor-Series Expansion”, IEEE 14th International Conference on ASIC (Oct. 2021)

(2) J. Wei, A. Kuwana, H. Kobayashi, K. Kubo, "IEEE754 Binary32 Floating-Point Logarithmic Algorithms based on Taylor-Series Expansion with Mantissa Region Conversion and Division" IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E105-A, No.7 (Jul. 2022.)

(3) J. Wei, A. Kuwana, H. Kobayashi, K. Kubo, Y. Tanaka, "Floating-Point Inverse Square Root Algorithm Based on Taylor-Series Expansion", IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, Vol. 68, Issue 7, pp. 2640-2644 (July 2021).

(4) J. Wei, A. Kuwana, H. Kobayashi, K. Kubo, Y. Tanaka, “Floating-Point Inverse Square Root Algorithm Based on Taylor-Series Expansion”, IEEE Trans. Circuits and Systems Ⅱ:Express Briefs, Vol. 68, No. 7, July 2021

(5) M. T. Khan, R. A. Shaik, “High-Performance VLSI Architecture of DLMS Adaptive Filter for Fast-Convergence and Low-MSE”, IEEE Trans. Circuits and Systems Ⅱ, 10.1109/TCSⅡ.2022.3141687.

(6) E. Özalevli, W. Huang, P. E. Hasler, D. V. Anderson, “A Reconfigurable Mixed-Signal VLSI Implementation of Distributed Arithmetic Used for Finite Impulse Response Filtering”, IEEE Trans. Circuits and Systems- Ⅰ: Vol.55, No. 2, pp. 510-521 (March 2008).

(7) Ali M. Al-Haj, “Fast Discrete Wavelet Transformation Using FPGAs and Distributed Arithmetic”, International Journal of Applied Science and Engineering, pp. 160-171 (Jan. 2003).

(8) S. Badave, A. Bhalchandra, “Critical Path Reduction of Distributed Arithmetic Based FIR Filter”, International Journal of Advanced Computer Science a-nd Applications, Vol. 7, No. 3, pp. 71-77 (2016).

(9) R. Bala, S. Aktar, “Fast Fourier Transformation Realization with Distributed Arithmetic”, International Journal of Computer Applications, Vol. 102, No. 15, pp. 22-25 (Sept. 2014).

(10) R. Mehra, Ginne, “FPGA Based Gaussian Pulse Shaping Filter Using Distributed Arithmetic Algorithm”, International Journal of Scientific & Engineering Research Vol. 4, Issue 8, pp. 711-715 (Aug. 2013).

ご清聴ありがとうございました