信号推定アルゴリズムの ADC 評価への応用

梁取 友貴*, 桑名 杏奈, 片山 翔吾（群馬大学）
佐藤 賢央, 石田 嵩, 岡本 智之, 市川 保（ローム株式会社）
中谷 隆之, 畠山 一実, 小林 春夫（群馬大学）

Application of Signal Estimation Algorithm to ADC Evaluation

Yuki Yanadori*, Anna Kuwana, Shogo Katayama (Gunma University)
Keno Sato, Takashi Ishida, Toshiyuki Okamoto, Tamotsu Ichikawa (ROHM Semiconductor)
Takayuki Nakatani, Kazumi Hatayama, Haruo Kobayashi (Gunma University)

キーワード：正弦波, Prony 法, 最小二乗法, 周波数推定, 信号推定, ADC 評価
(Sine wave, Prony's method, least squares method, frequency estimation, signal estimation, ADC evaluation)

1. 研究背景と目的

高性能アナログ集積回路ではテスト技術がますます難しく重要になってきている(1)-(5)。信号周波数を推定する手法として FFT がある。厳密なコヒーレント条件が作れないときにも Hanning 窓を用いて FFT で正確にスペクトル推定できる等でよく用いられている。一般に FFT は多くの標本値を用いてスペクトル測定を高精度に行う。一方少ない数の標本値から周波数を推定できるアルゴリズムとして Prony 法や最小二乗法があげられる(6)(7)。Prony 法を活用すると、等速移動音源の速度、騒音パワー、音源の通過時刻が測定でき、定常騒音源の位置推定にも応用できる。Prony 法は美しいアルゴリズムであるが、雑音があると精度良い推定ができない(4)(5)。最小二乗法は、入力周波数が既知の場合は陽に解けるが、入力周波数が未知の場合は反復法を用いて計算する必要があり、特に高周波数のときに収束に時間がかかる(6)(7)。

本研究では、ADC 評価への応用を目指して、2 種類のアルゴリズム（Prony 法と最小二乗法）に対して雑音が推定精度に与える影響を調べる。

2. 原理

〈2･1〉Prony法

周波数f，正弦波定数 A, θ, d の正弦波とする。標本化周波数f_sとすると、n点目の標本値は以下のようになる。

$$x(n) = A\cos(2\pi f n / f_s + \theta) + d \quad \text{------------} (1)$$

$n = 0,1,2,3$ とした4点の標本値 $x(0), x(1), x(2), x(3)$ を用いて、以下の式(2) (3) (4)を計算することで、元の正弦波の周波数fを求めることができる。

$$a = \frac{\{x(0) - x(3)\}}{\{x(1) - x(2)\}} \quad \text{------------} (2)$$

$$z_r = \frac{(a-1)}{2} \quad \text{------------} (3)$$

$$f = f_s \frac{\left\{ \arg\left(z_r + j\sqrt{(1-{z_r}^2)}\right) \right\}}{2\pi} \quad \text{------------} (4)$$

なお、標本値が5点以上得られる場合は、式(2)のaを最小二乗法によって求める。また、他の未知数（振幅A, 位相θ）も求めることができる。本稿では4点の標本値を用いた周波数fの推定を対象としているため、詳細は割愛する。

〈2･2〉最小二乗法

最小二乗法は、複数の離散点の組を適当な関数を用いて近似するときに、離散点と関数の差の二乗和が最小となるように関数の係数を決定する方法である。正弦波で周波数 f が既知の場合、最小二乗法により振幅 A、位相 θ、直流オフセット d を求める方法が知られている。以下に示す。

推定したい正弦波を式(5)とする。

$$y = A\sin(ft + \theta) + d \quad \text{------------} (5)$$

離散点の組$(t_1, y_1), (t_2, y_2), \ldots, (t_n, y_n)$と既知の値 f を用いて途中式(6)～(14)を、さらに式(15)～(18)を計算する。

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} 1 \quad \text{------------} (6)$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{------------} (7)$$

$$a_3 = \sum_{i=1}^{n} \sin(ft_i) \quad \text{------------} (8)$$

$$a_4 = \sum_{i=1}^{n} \cos(ft_i) \quad \text{------------} (9)$$

$$a_5 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cos(ft_i) \quad \text{------------} (10)$$

$$a_6 = \sum_{i=1}^{n} y_i \sin(ft_i) \quad \text{------------} (11)$$

$a_7 = \sum_{i=1}^{n} \sin(ft_i) \cdot \cos(ft_i)$ ----------------------------(12)

$a_8 = \sum_{i=1}^{n} \{\cos(ft_i)\}^2$ ------------------------------------(13)

$a_9 = \sum_{i=1}^{n} \{\sin(ft_i)\}^2$ ---------------------------------------(14)

$a_J = 2a_3a_4a_7 + a_1a_9a_8 - a_3a_3a_8$

$\quad -a_4a_4a_9 - a_1a_7a_7$ --------------------------------(15)

$a_A = \dfrac{a_3a_4a_5 + a_2a_4a_7 + a_1a_6a_8 - a_1a_5a_7 - a_4a_4a_3 - a_2a_3a_8}{a_J}$-------(16)

$a_B = \dfrac{a_1a_5a_9 + a_3a_4a_6 + a_2a_3a_7 - a_3a_3a_5 - a_2a_4a_9 - a_1a_6a_7}{a_J}$ -----(17)

$a_C = \dfrac{a_3a_7a_5 + a_4a_7a_6 + a_2a_9a_8 - a_4a_9a_5 - a_2a_7a_7 - a_3a_8a_6}{a_J}$ ------(18)

最後に式(5)のパラメータを式(19)～(21)により推定する。

$A = \sqrt{a_A^2 + a_B^2}$ ---(19)

$\theta = -\dfrac{\arcsin(a_B/A)}{f}$ ---------------------------------------(20)

$d = a_C$ ---(21)

なお、振幅、位相、直流オフセットに加えて周波数も未知である場合は解析的に解くことは難しく、反復法を用いて解く必要があるが、本稿では対象としない。

3. 研究方法

Prony 法および最小二乗法を用いて波形のパラメータを推定する際、Prony 法における「標本値」、最小二乗法における「離散点」に雑音が混ざると、推定精度が劣化する。雑音には 3 種類あり、式(22)の$a(t)$を振幅変調ノイズ、$\theta(t)$を位相ノイズ、$n(t)$を加法ノイズとよぶ。ここでは、雑音の種類と大きさが推定精度に与える影響を調べる。

$y(t) = A\{1 + a(t)\}\sin[ft + \theta_0\{1 + \theta(t)\}]$

$\qquad +C\{1 + n(t)\}$---------(22)

雑音の大きさを標本値のばらつく範囲として定義し、中心値との比をNR (Noise Ratio)と呼ぶことにする。たとえば「加法ノイズNR = 0.2」は、式(22)に対して、

$y(t) = A\{1 + a(t)\}\sin[ft + \theta_0\{1 + \theta(t)\}]$

$\qquad +C\{1 \pm 0.1n(t)\}$-----(23)

の範囲で標本値がばらつくことを意味する。今回は$\mathrm{NR} = 0.0, 0.1, \cdots, 0.5$ の範囲でシミュレーションを実施した。

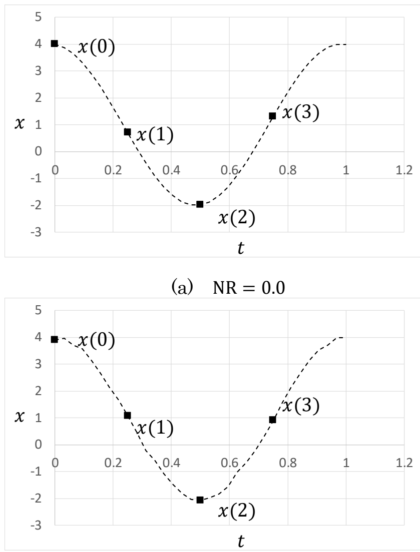
振幅 3.0、初期位相 0.1、直流オフセット 1.0、周波数 1.0 の正弦波を「元の波形」として用いた。C 言語標準の rand 関数を用いて発生させた乱数列を、ばらつきとして重畳した。乱数の種を固定することで、すべてのシミュレーションに対して同等の乱数列を用いた。単位は位相のみ radian を用い、振幅、直流オフセットについては無次元の数値とする。

4. 結果

〈4･1〉Prony法

式(1)に対して振幅 3.0、初期位相 0.1、直流オフセット 1.0、周波数 1.0 を代入し、$f_s = 4$とする。ノイズなし（NR = 0.0）の場合、図 1(a)に示すように標本値として$x(0) = 3.985, x(1) = 0.700, x(2) = -1.985, x(3) = 1.300$ が得られる。これらを式(2)-(4)に代入して計算すると$f = 1$ が得られる。NR = 0.2の加法ノイズが加わった場合、図 1(b)に示すように、$x(0) = 3.900,\ x(1) = 1.064, x(2) = -2.082, x(3) = 0.902$ が得られる。同様に計算すると$f = 1.015$となり、本来の f の値から誤差が生じる。

同様に、3 種の雑音に対してfを推定した結果を図 2 に示

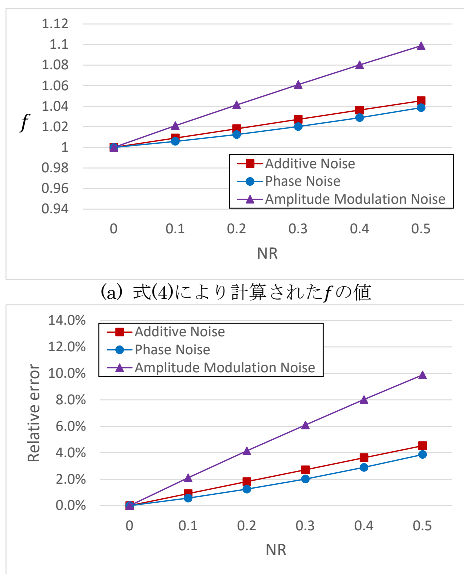


(a) NR = 0.0

(b) NR = 0.2の加法ノイズ

図 1 Prony 法の計算に使用する標本値

Fig. 1. Samples for Prony method.



(a) 式(4)により計算されたfの値

(b) 真の値（f = 1.0）に対する相対誤差の絶対値

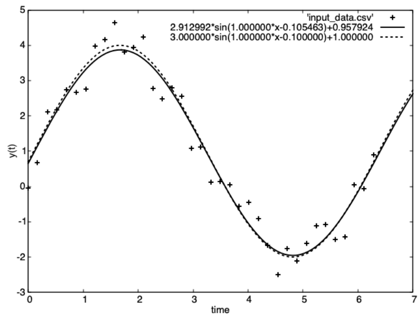
図 2 Prony 法による推定結果

Fig. 2. Estimation results by Prony method.

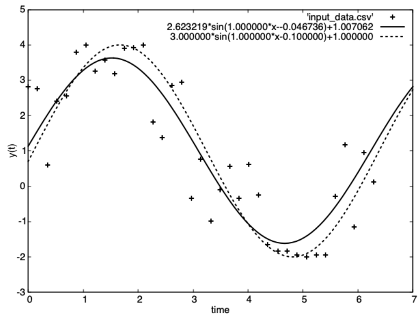
す。図 2(a)は推定結果そのものを示す。図 2(b)には、推定結果の、真の値に対する相対誤差の絶対値を示す。ノイズが大きくなると、周波数が大きくなる方に向かって線形的に誤差が大きくなることがわかる。振幅変調ノイズによる誤差が一番大きく、NR = 0.5のとき相対誤差は 9.9%となった。

〈4･2〉最小二乗法

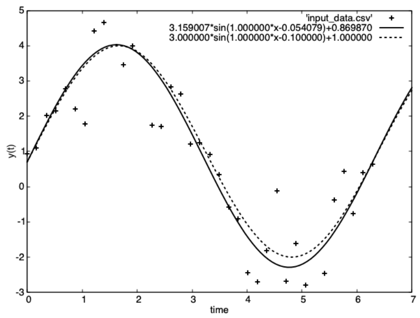
式(5)に対して振幅 3.0、初期位相 0.1、直流オフセット 1.0、周波数 1.0 を代入し、3 節で述べた雑音を重畳する。37 点の離散点の組を抽出し、式(6)-(21)に代入して、振幅、位相、直流オフセットをそれぞれ推定した。元の波形、離散点、推定された波形の例を図 3 に示す。



(a) NR = 0.5の加法ノイズが重畳された例



(b) NR = 0.5の位相ノイズが重畳された例



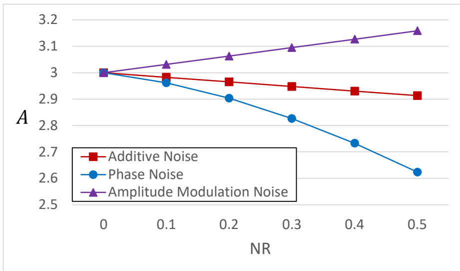
(c) NR = 0.5の振幅変調ノイズが重畳された例

図 3 最小二乗法の計算に利用する標本点、元の波形（点線）、推定された波形（実線）

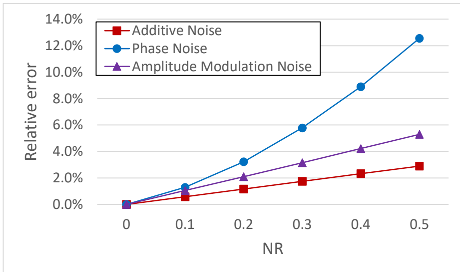
Fig. 3. Sampled points used for least squares calculation, original wave (dotted line) and estimated wave (solid line).

図 4 に振幅の、図 5 に位相の、図 6 に直流オフセットの推定結果を示す。図 2 と同様に、(a)には計算された値そのものを、(b)には推定された値の真の値との相対誤差の絶対値を示した。なお位相に関しては、真の値 0.1 に対する相対誤差ではなく、位相の取りうる範囲πに対する相対誤差の絶対値を示した。

図 4 より、3 種のノイズが振幅の推定結果に与える影響を考察する。(a)より、振幅変調ノイズは振幅を大きくする方向に、位相ノイズと加法ノイズは振幅を小さくする方向に誤差を与えることがわかる。(b)より、位相ノイズによる誤差が一番大きいことがわかる。NR = 0.5のとき相対誤差約 13%が生じた。また、位相ノイズによる誤差のみ、線形的ではなく非線形的に増加する様子が読み取れる。



(a) 式(19)により計算されたAの値



(b) 真の値（A = 3.0）に対する相対誤差の絶対値

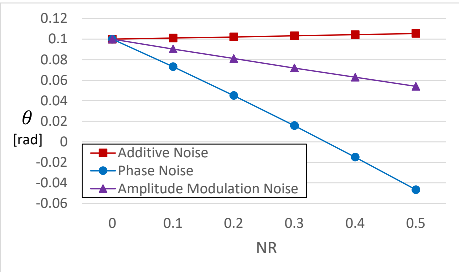
図 4 最小二乗法による振幅の推定結果

Fig. 4. Estimated amplitude by the least squares method.

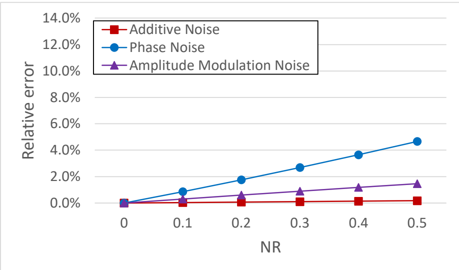
図 5 より、3 種のノイズが位相の推定結果に与える影響を考察する。図 5 (a)より、加法ノイズは正の方向に、位相ノイズと振幅変調ノイズは負の方向に誤差を与えることがわかる。図 5 (b)より、位相ノイズによる誤差が一番大きいことがわかる。NR = 0.5のとき相対誤差約 5%が生じた。位相の取りうる範囲π（半周期）に対する相対誤差を計算しているため、推定波形は元の波形から「半周期の 5%」負方向にずれることを意味する。加法ノイズは位相の推定にほとんど影響を与えない（NR = 0.5でも相対誤差 0.2%である）。

図 6 より、3 種のノイズが直流オフセットの推定結果に与える影響を考察する。図 6 (a)より、位相ノイズは直流オフセットを大きくする方向に、加法ノイズと振幅変調ノイズは直流オフセットを小さくする方向に誤差を与えることが

わかる。図 (b)より、振幅変調ノイズによる誤差が一番大きいことがわかる。NR = 0.5のとき相対誤差約 13%が生じた。また、位相ノイズによる誤差は、線形的ではなく非線形に増加する様子が読み取れる。位相ノイズは、直流オフセットの推定に対してほとんど影響を与えない（NR = 0.5でも相対誤差 0.7%である）。



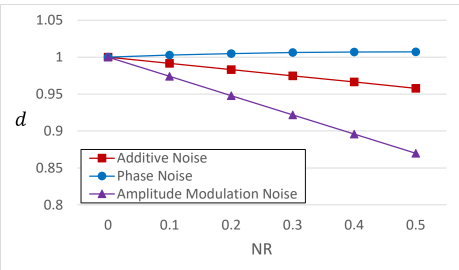
(a) 式(20)により計算されたθの値



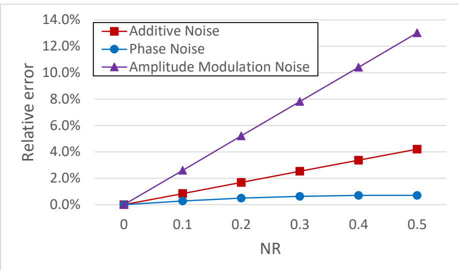
(b) θ が取りうる範囲（π [rad]）に対する相対誤差の絶対値

図 5 最小二乗法による位相の推定結果

Fig. 5. Estimated phase by the least squares method.



(a) 式(21)により計算されたdの値



(b) 真の値（d = 1.0）に対する相対誤差の絶対値

図 6 最小二乗法による直流オフセットの推定結果

Fig. 6. Estimated DC offset by least squares method.

5. まとめ

本研究では、サンプリングにより得られた標本値を使って元の波形を推定する手法として Prony 法と最小二乗法に着目し、加法ノイズ、位相ノイズ、振幅変調ノイズが測定値に与える影響を調べた。Prony 法による周波数の推定と最小二乗法による直流オフセットの推定においては振幅変調ノイズが、最小二乗法による振幅および位相の推定においては位相ノイズが、それぞれ顕著な影響を与えることがわかった。特に最小二乗法による振幅の推定において、ノイズが大きくなると位相ノイズによる誤差が非線形的振る舞いをみせることがわかった。

本稿で実施できたのは、Prony 法、最小二乗法ともに基礎的な動作確認であるため、今後、より詳細な ADC 評価応用への検証を行っていく。

文　献

(1) 小林 春夫 他 :「IoT 時代のアナログ/ミクストシグナル回路テスト技術」電気学会論文誌（論文誌 C), Vol.141, No.1, pp.1-12 (2021)

(2) K. Sato, et.al.: "Revisit to Accurate ADC Testing with Incoherent Sampling Using Proper Sinusoidal Signal and Sampling Frequencies", 51st IEEE International Test Conference (Oct. 2021)

(3) 田部井 誠 他 :「FFT を用いた高精度周波数決定法」電子情報通信学会和文論文誌 A, Vol.J70-A, No.5, pp.798-805 (1987)

(4) 本木 義人 他 :「通信用 AD 変換器テスト評価のためのマルチトーン・カーブ・フィッティング・アルゴリズム」電子情報通信学会（和文誌 C), Vol.J86-C, No.2, pp.186-196 (2003)

(5) H. Kobayashi, et.al. : "ADC standard and testing in Japanese industry", Computer Standards & Interfaces Vol.23, pp.57–64, (2001)

(6) 井 研治 他 :「Prony 法の周波数推定アルゴリズムによる雑音の影響」, 日本音響学会誌 42 巻 11 号, pp.853-859 (1986)

(7) 石山 亮 他 :「周波数推定法による推定誤差の検討」, 小山工業高等専門学校研究紀要 第 33 号, pp.113-114, (2001)