テイラー展開、デジタル演算アルゴリズムと和算

Taylor Series Expansion, Digital Arithmetic Algorithm and Wasan

小林春夫 (群馬大学) 魏江林 (宜賓学院) 桑名杏奈 (和洋女子大学)
Haruo KOBAYASHI (Gunma University), Jianglin WEI (Yibin University)
Anna KUWANA (Wayo Woman's University)

1. テイラー展開での気づき

ずいぶん以前になるが（当時）三洋電機 名野隆夫さんに研究室でアナログ集積回路関係の講義をしていただいた。その中の一つの電気数学講義で三角関数のテイラー展開のご説明で図 1 の数値計算表示が強烈に印象に残っている。テイラー展開は x=a 近傍でのみ近似が成立との先入観があったが 項数を増やすと -∞ < x < ∞ の範囲で テイラー展開のサイン関数への漸近に気が付く。すなわちサイン関数では「収束範囲」が (-∞, ∞)である。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{(f)''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{(f)^n(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

$$\sin x = 0 + 1x + 0x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + 0x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + 0x^8 + \cdots$$

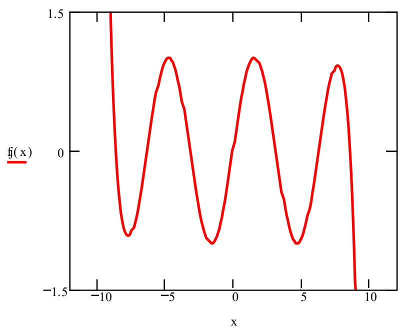

図 1 サイン関数 sin(x) のテイラー展開 20 項までの数値計算結果

指数関数 exp(x) も「収束範囲」が (-∞, ∞) であり 項数が増えるとテイラー展開が漸近していくが、 指数関数は単調増加関数であるのでそれほど印象は強くない。しかしサイン関数は曲がりくねっている。テイラー展開がこれに漸近していくのは驚きであった。

2. 和算と級数展開

和算でも複雑な問題を級数展開を使って解く方法がよく用いられている。例えば建部賢弘は円周率を級数として表すことを試みている。和算の級数展開は微積分を用いるテイラー展開を行ってはいないが結果的に両者は等しくなる。が、大域的ではなく局所的に利用するのが主である印象である。「大域的に利用する」は自分にとって盲点になっていた。

3. テイラー展開のデジタル演算アルゴリズムへの応用

テイラー展開近似は（原関数に依存するが）x が大域的に成り立つ。これが浮動小数点デジタル除算に利用できないかと考えた。デジタル四則演算では加算/減算は比較的小さな回路で実現でき 乗算は回路規模が大きくなる。除算は非常に大きな回路になる。

デジタル除算 g(z)=y/x を計算するのに まず 1/x を計算し次に y を掛けることを考える。1/x の効率的計算が重要である。 f(x)=1/x を x=a の回りでテイラー展開をして計算をと考える。しかしこの方法は一見してダメで効率は良くないであろう。精度を上げるためには項数を多くしなければならなく、掛け算の回数が多くなってしまうと推察できるからである。が、やってみると良い結果である。「これはすごいぞ !」と思う。各項の係数が比較的規則的になり計算しやすいからである。

外部発表をするために文献調査をすると「テイラー展開でデジタル浮動小数点演算」は標準手法の一つであることを知る。しかしながらこのほかにもアイデアを入れていたので新規なところがあり論文が採択された。「研究するときは事前にほかの人の論文を読まない」ことが功を奏した。 「人の論文を読んでしまうとそれに引きずられて自分の発想ができなくなる」の対偶を実感した。「テイラー展開でデジタル演算」でいくつもの論文・国際学会発表をすることができ [1-5]、博士課程学生であった著者の一人がこの内容で博士号を取得することができた。

4. まとめ

「向日葵は太陽の動きにつれてその方向を追うように花が回る。それがなぜなのかを調べるのが理学であり、それを例えば日時計に利用しようと考えるのが工学である。」テイラー展開をデジタル浮動小数点アルゴリズムに応用することで研究成果を上げることができた。

関連外部発表リスト

[1] J. Wei, A. Kuwana, H. Kobayashi, K. Kubo, "IEEE754 Binary32 Floating-Point Logarithmic Algorithms based on Taylor-Series Expansion with Mantissa Region Conversion and Division", IEICE Trans. Fundamentals (Jul. 2022).

[2] J. Wei, A. Kuwana, H. Kobayashi, K. Kubo, Y. Tanaka, "Floating-Point Inverse Square Root Algorithm Based on Taylor-Series Expansion", IEEE Trans. on Circuits and Systems II (July 2021).

[3] J. Wei, A. Kuwana, H. Kobayashi, K. Kubo, Y. Tanaka, "Floating-Point Square Root Calculation Algorithm Based on Taylor-Series Expansion and Region Division", IEEE MWSCAS (Aug. 2021).

[4] J. Wei, A. Kuwana, H. Kobayashi, K. Kubo, "Divide and Conquer: Floating-Point Exponential Calculation Based on Taylor-Series Expansion", IEEE ASICON (Oct. 2021).

[5] J. Wei, A. Kuwana, H. Kobayashi, K. Kubo, "Revisit to Floating-Point Division Algorithm Based on Taylor-Series Expansion", IEEE APCCAS (Dec. 2020).