

サンプリング回路の 信号ノイズ比と帯域の考察

電子回路研究会(大阪)

2007.03.30

群馬大学 小林研究室

○上森将文 小林謙介(コンサルタント)

小林春夫 清水一也

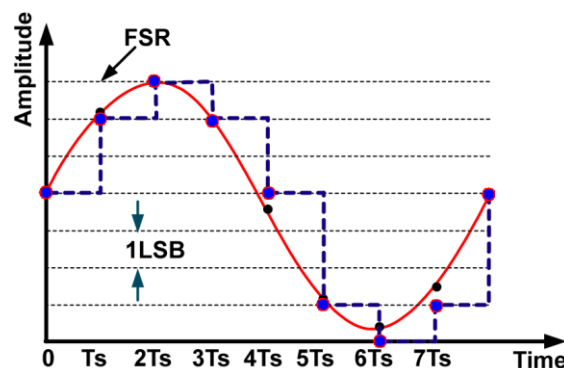
目次

- 研究の現状と目的
- 問題設定
- 2つの**S/H**回路
- 統一化したサンプリング理論
- **SPICE**シミュレーション
- 伝達関数から計算した最適値のまとめ
- まとめ

研究の現状と目的

目的

- 通信・計測器分野での
高精度広帯域信号サンプリング技術の新提案
- 信号・帯域幅と最大**SNR**の関係
の理論式の導出



サンプリング回路技術の現状

■ A/D変換前段のS/H回路

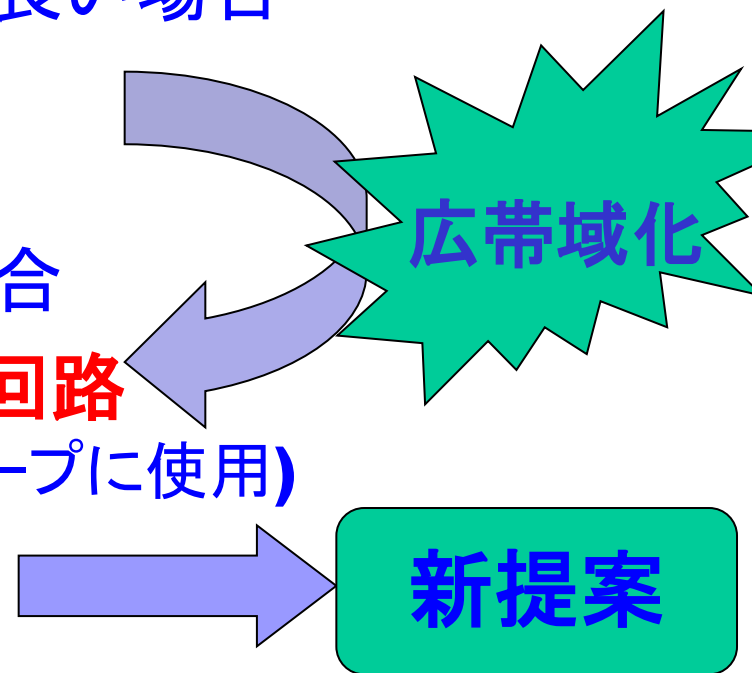
– サンプリング時間が十分に長い場合

- **トラックホールド回路**
(SoC上のADCに使用)

– サンプリング時間が短い場合

- **インパルスサンプリング回路**
(サンプリングオシロスコープに使用)

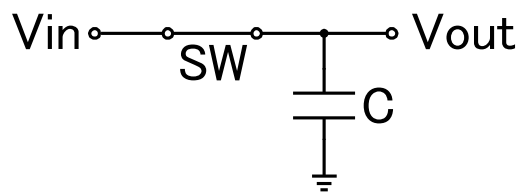
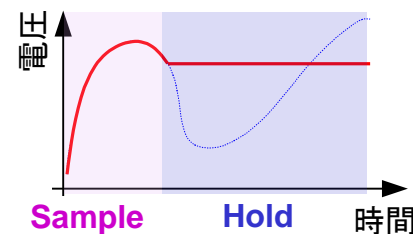
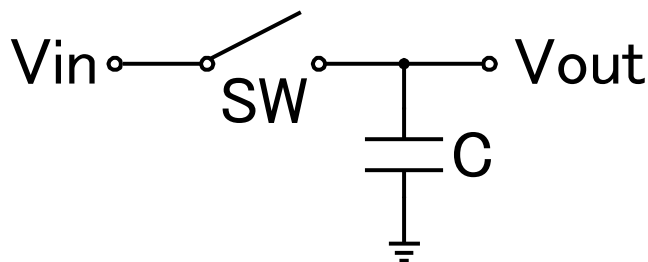
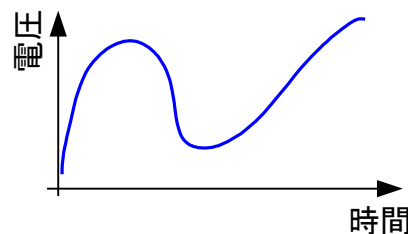
■ 現在別々に扱われている



問題設定

S/H回路の動作

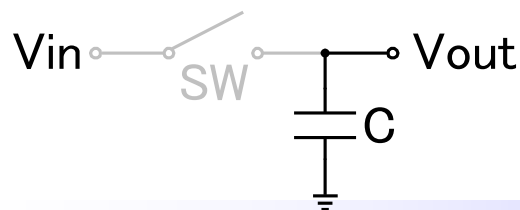
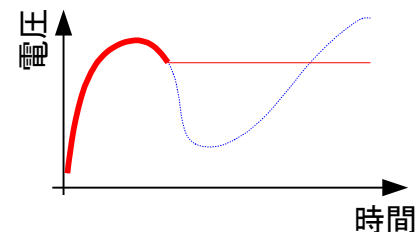
■ S/H回路の基本構成: スイッチと容量



• スイッチSWがONの時

• $V_{out}(t) = V_{in}(t)$

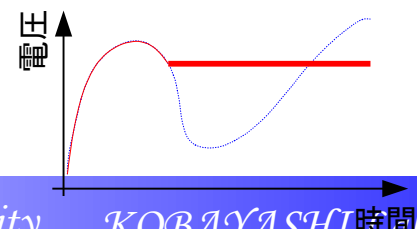
Sample動作



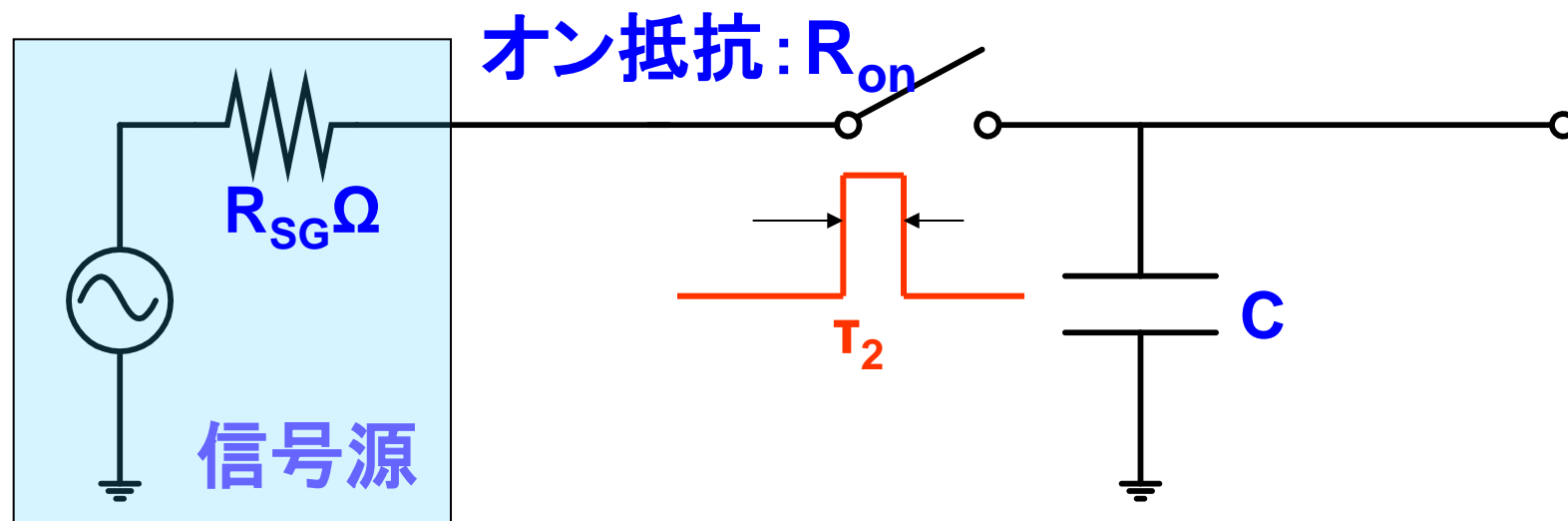
• スイッチSWがOFFの時

• $V_{out}(t) = V_{in}(t_{OFF})$

Hold動作



S/H回路での2つの時定数 τ_1 、 τ_2



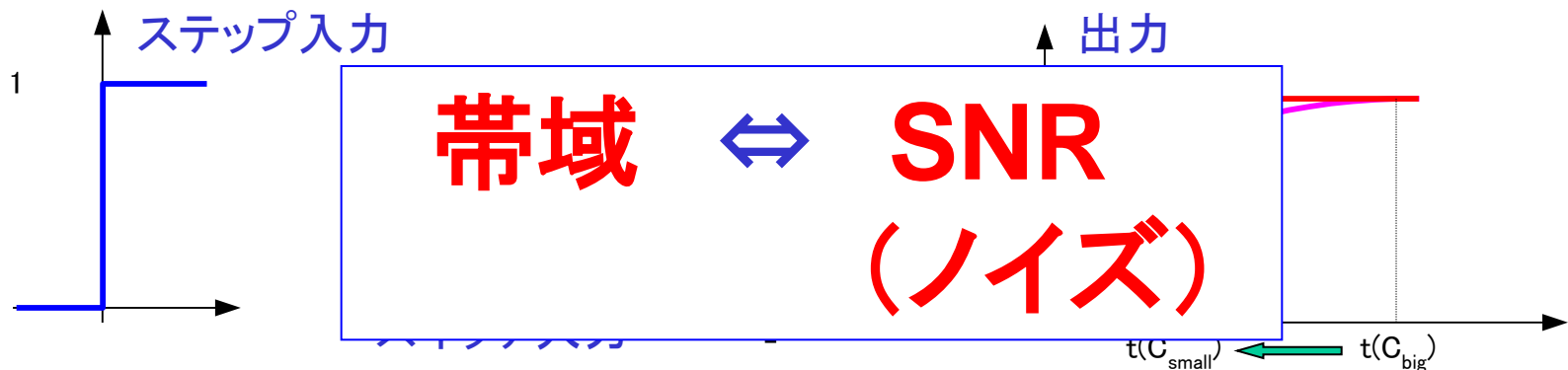
■ S/H回路の時定数

- τ_1 : 信号源の抵抗とスイッチのオン抵抗の合成抵抗と容量から構成される時定数 ($(R_{on} + R_{SG}) \times C$)
- τ_2 : スイッチング時間窓

時定数 τ_1 (容量) の影響

■ 帯域

- 容量: 小 \Rightarrow 素早い充電が可能 (帯域: 広)



■ 熱雑音

- 容量: 小 \Rightarrow ノイズ: 大

$$N_{rms} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

サンプリング時間窓 τ_2 の影響

■ 帯域

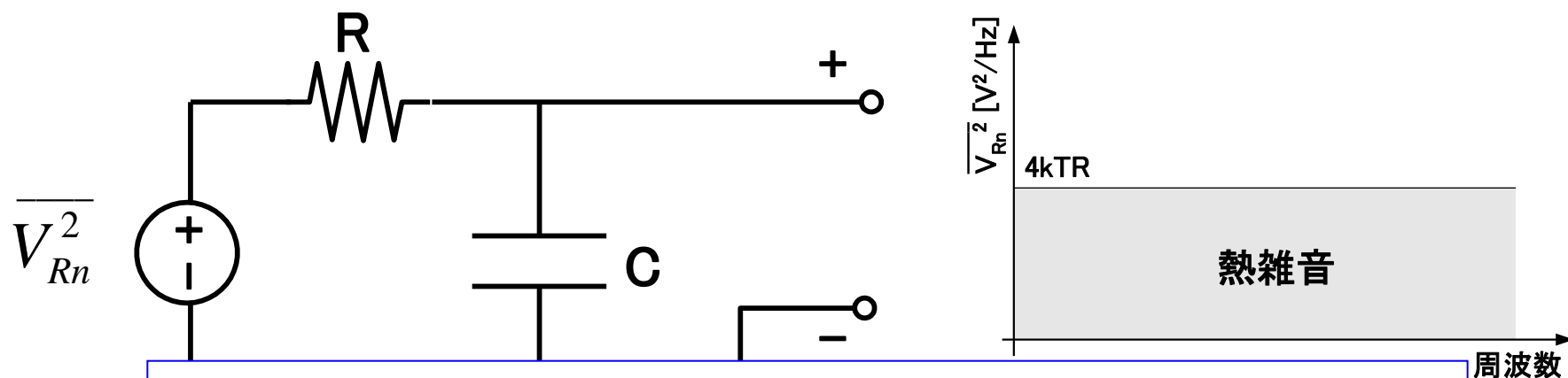
- パルス幅: 短 \Rightarrow 出力: 素早く定まる (帯域: 広)



■ 信号成分

- パルス幅: 短 \Rightarrow 信号成分: 小 $Signal \propto \frac{1}{C}$

S/H回路での出力熱雑音



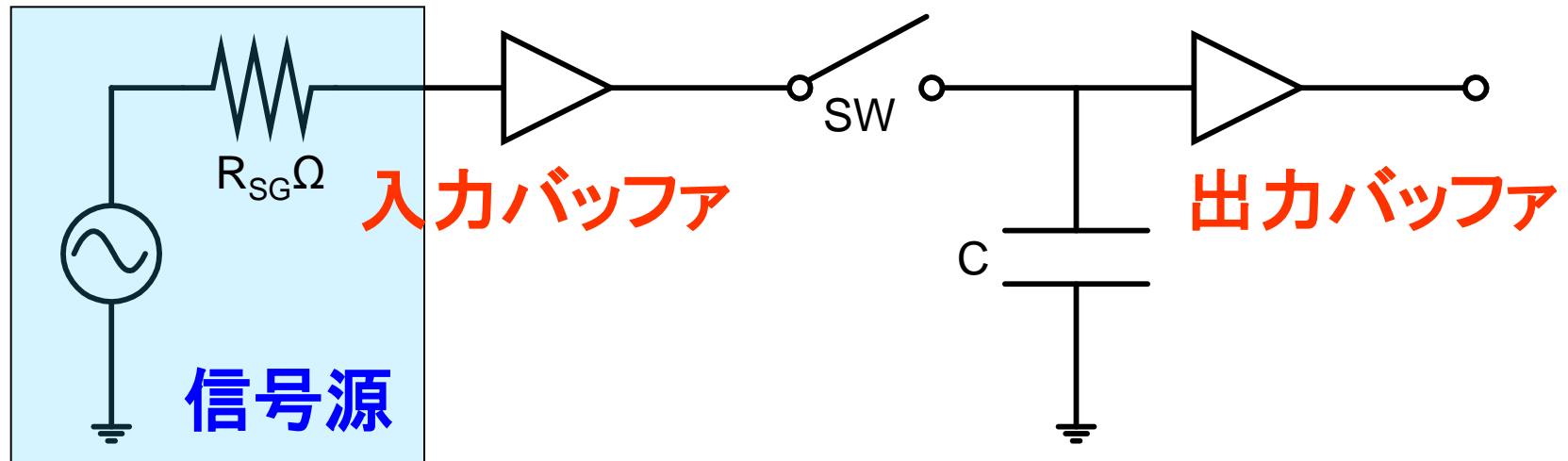
広帯域化 \Rightarrow **C:小** \rightarrow **P_{noise}:大**

雑音パワー

$$P_{n,out} = \int_0^{\infty} \frac{4kTR}{4\pi^2 R^2 C^2 f^2 + 1} df$$

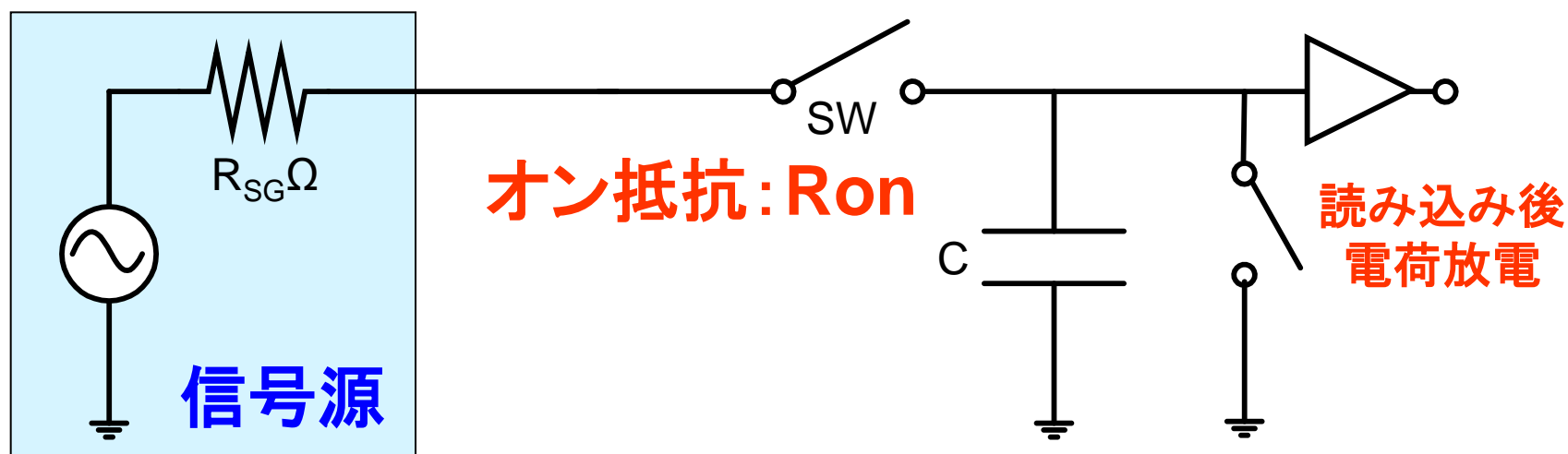
$$= \frac{kT}{C}$$

S/H回路の広帯域化



- 広帯域化(高周波数化)
⇒ 入力バッファ実現困難

S/H回路の広帯域化



■ 広帯域化 (高周波数化)

⇒ 入力バッファ実現困難

⇒ 入力バッファを除いた構成

広帯域信号サンプリング技術の問題設定

■ S/Hの帯域とSNR:トレードオフ

- RC時定数 T_1
- サンプリング時間窓 T_2
 - トラックホールドサンプリング: $T_1 \ll T_2$
 $\Rightarrow \text{SNR} \propto \sqrt{C}$ 、 $\omega_{\text{BW}} = 1/RC$
 - インパルスサンプリング: $T_1 \gg T_2$
 $\Rightarrow \text{SNR} \propto 1/\sqrt{C}$ 、 $\omega_{\text{BW}}: T_2$ に依存

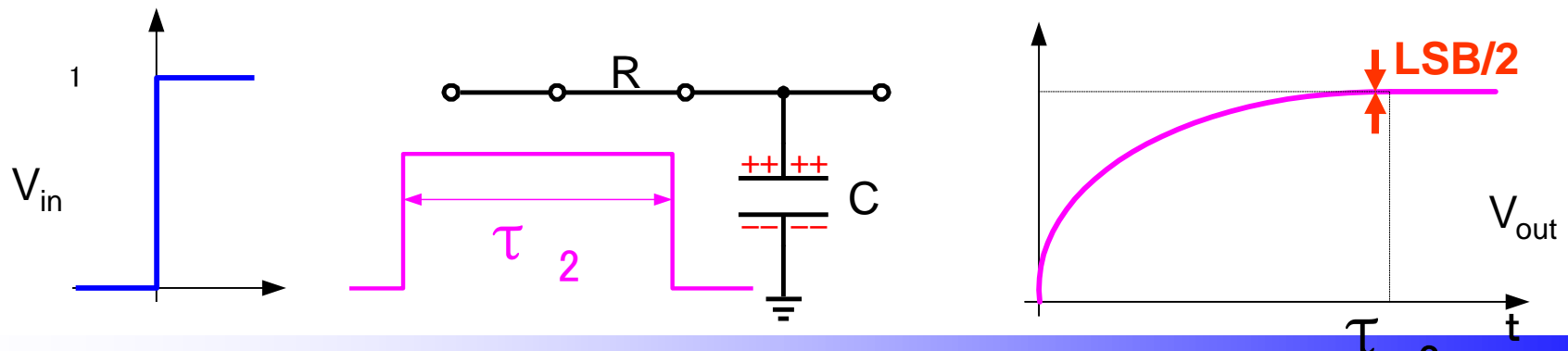
- ## ■ ある帯域 f_{BW} のS/H回路を実現する SNRを最大にする $\Rightarrow T_{1\text{opt}}$ 、 $T_{2\text{opt}}$ を求める

C: サンプリング容量 R: スイッチと信号源の合成抵抗 $T_1 = RC$

2つのS/H回路

トラックホールド回路 $\tau_2 \gg \tau_1$

- **SoC上のADC**に使用
- サンプルング定理
- 単発信号測定可能
- 高周波数信号⇒高速サンプルング必要
- 入出力差が**LSB/2**になるまでトラック



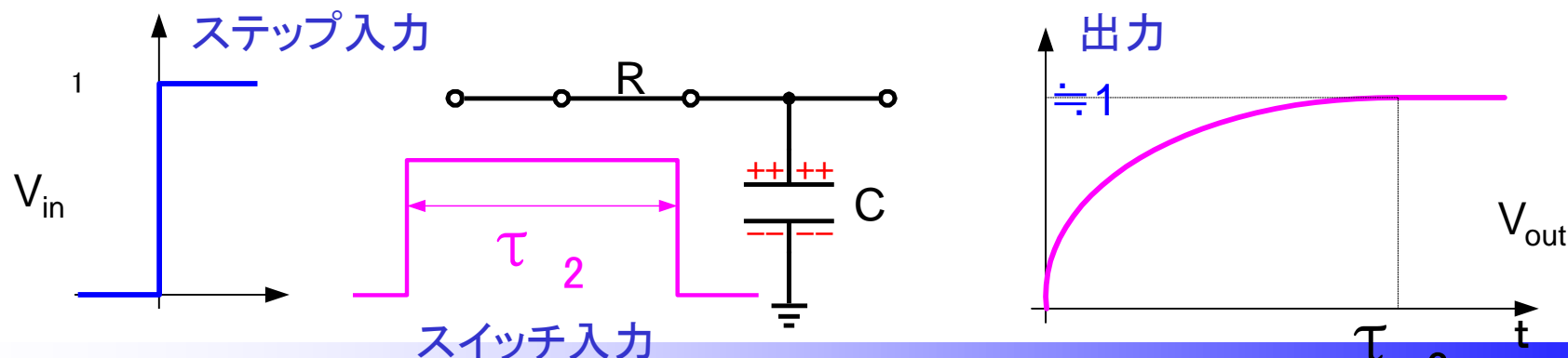
トラックホールド回路の動作

■ スイッチ時間窓 $\tau_2 \gg \tau_1$

- 容量に対して十分充電可能
 \Rightarrow 出力信号成分: $S \doteq 1$ 、
 出力雑音成分: $N_{\text{rms}} = \sqrt{kT/C}$

- **SNR**: $SNR \propto \sqrt{C}$

- 帯域: $\omega_{\text{BW}} = 1/RC$



トラックホールド回路の伝達関数

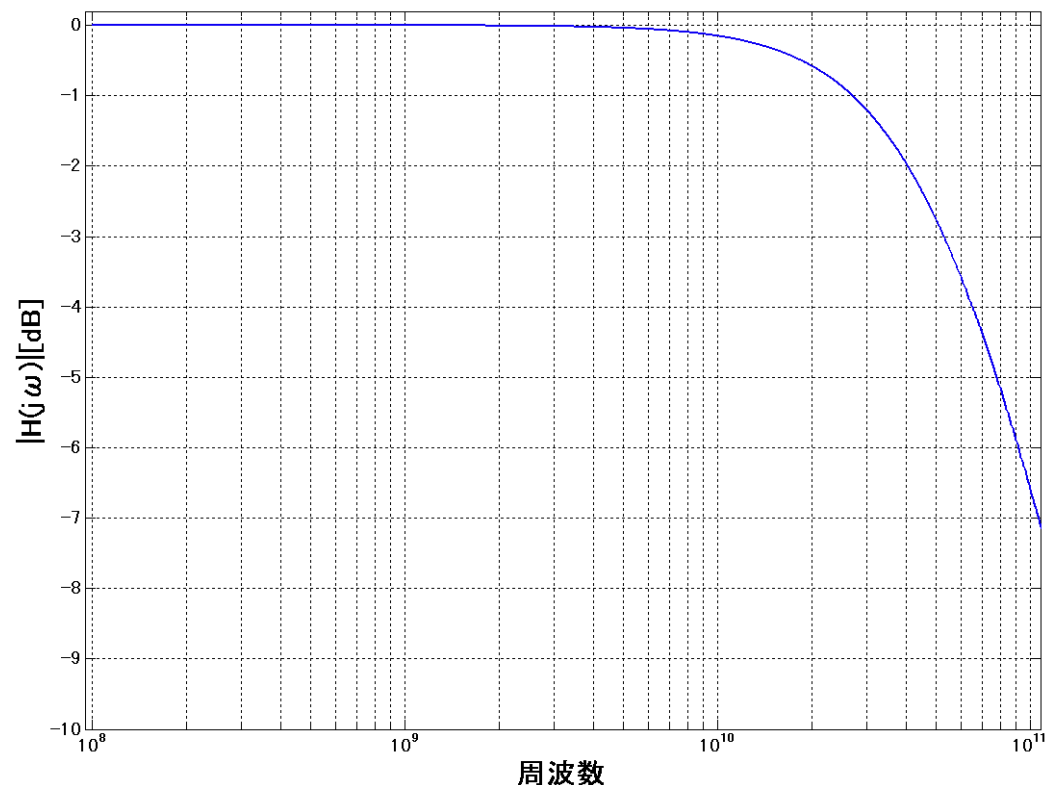
伝達関数

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau_1\omega}$$

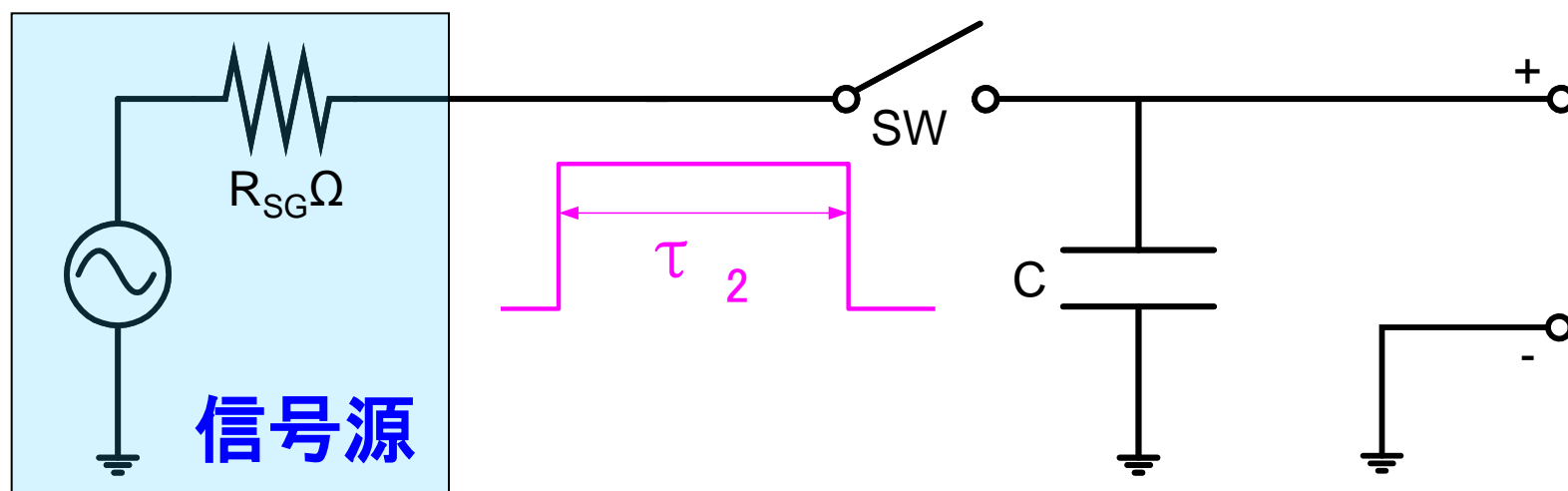
ゲイン

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_1^2\omega^2}}$$

ゲイン特性



トラックホールドの広帯域化

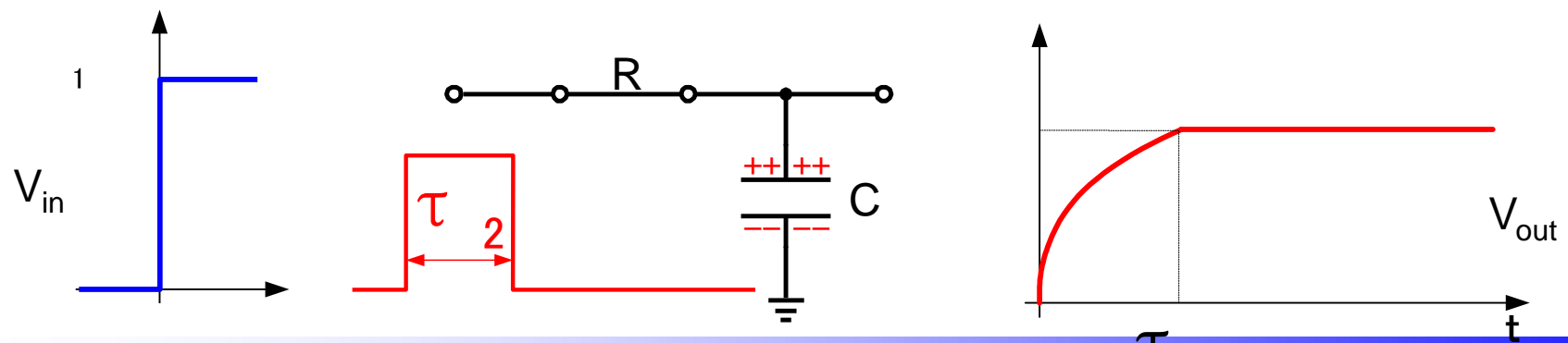


トラックホールド動作の問題点

- 信号源からインピーダンス C が見える
(高周波信号が反射)
- 帯域: $1/(R_{SG} + R_{on})C \Leftrightarrow \text{SNR} \propto \sqrt{C}$

インパルスサンプリング回路 $\tau_2 \ll \tau_1$

- サンプリング・オシロスコープに使用
- 等価時間サンプリング
- 繰り返し生起する信号
- 高周波信号 \Rightarrow スイッチング時間窓 $\tau_2 \rightarrow$ 小
- 信号源への **C** の影響を減らすため τ_2 小



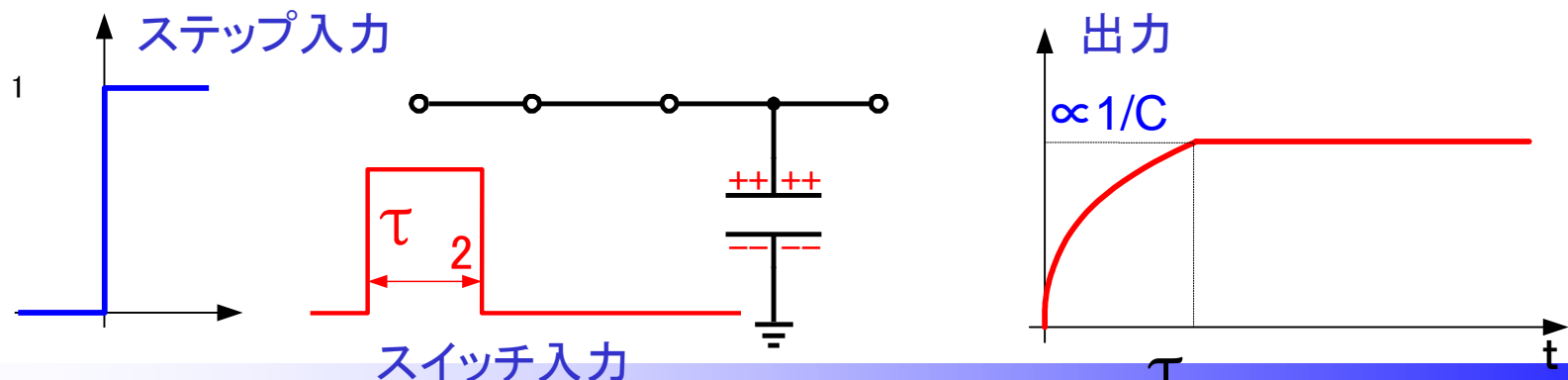
インパルスサンプリング回路の動作

■ スイッチパルス幅 $T_2 \ll T_1$

- 容量に対して十分充電できない
 \Rightarrow 出力信号成分: $S \propto 1/C$ 、
 出力雑音成分: $N_{\text{rms}} = \sqrt{kT/C}$

- **SNR:** $SNR \propto \frac{1}{\sqrt{C}}$

- 帯域: ω_{BW} は T_2 に大きく依存



インパルスサンプリング回路の伝達関数

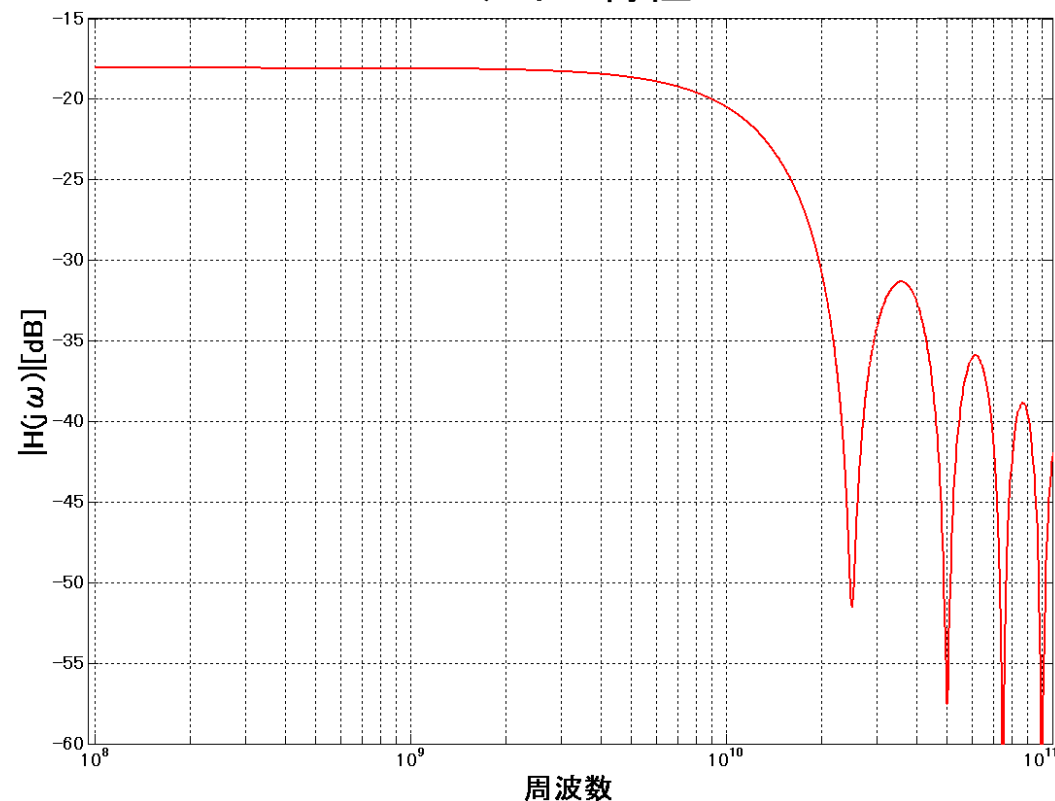
伝達関数

$$H(j\omega) = \frac{\tau_2}{\tau_1} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right) e^{-j\frac{\tau_2}{2}\omega}$$

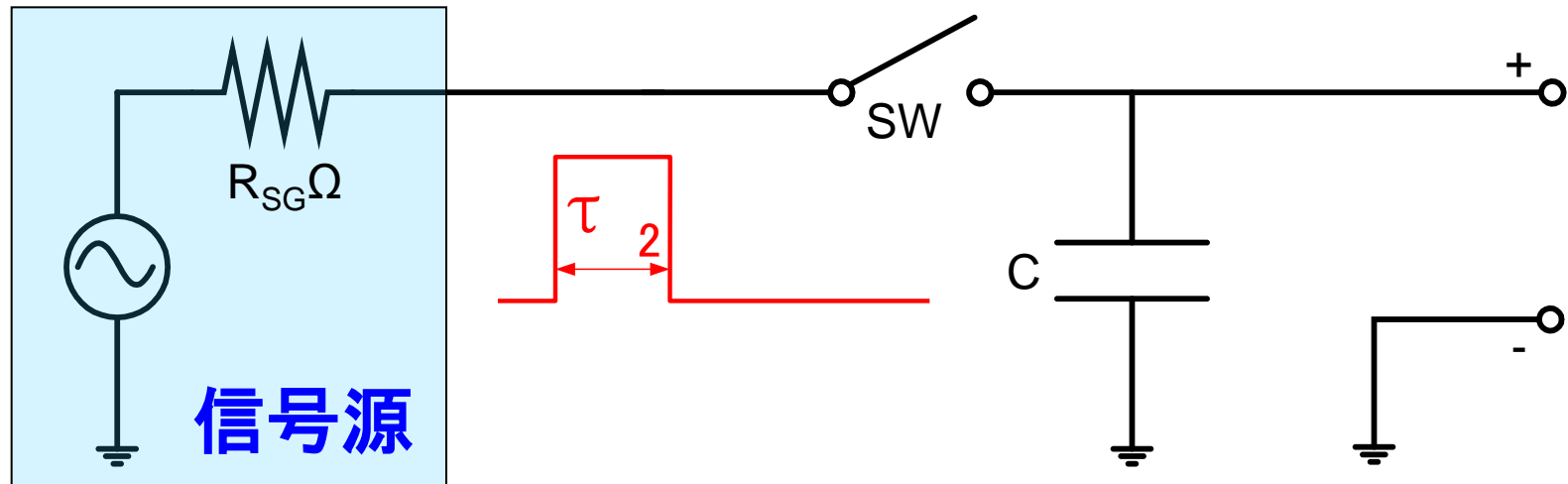
ゲイン

$$|H(j\omega)| = \frac{\tau_2}{\tau_1} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right) \right|$$

ゲイン特性



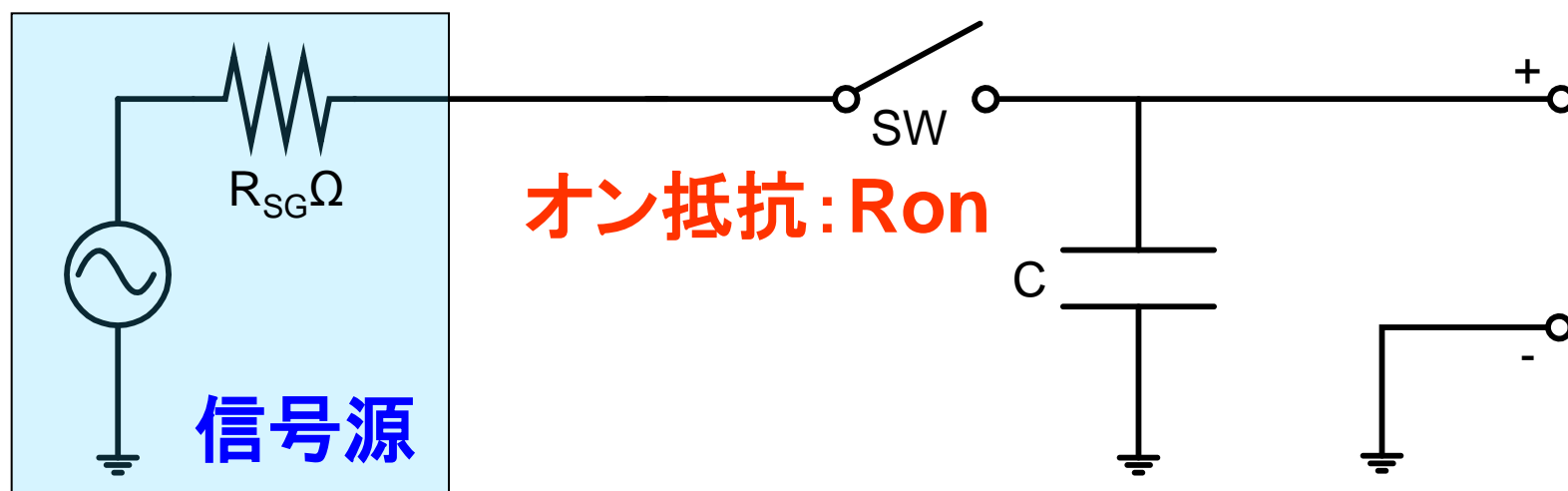
インパルスサンプリングの広帯域化



インパルスサンプリング動作の問題点

- 帯域 → 広 $\Leftrightarrow \tau_2 \rightarrow$ 小
⇒ 技術的に難、信号レベル小
- 出力信号レベル $\propto 1/C \Rightarrow$ SNR劣化

広帯域化への問題



■ 広帯域、高**SNR**を実現

⇒ **トラックホールド回路** $T_2 \gg T_1$ どちらも難しい
インパルスサンプリング回路 $T_2 \ll T_1$

中間領域に最適解が有ることを示す

⇒「**ストローブサンプリング技術** $T_2 \doteq T_1$ 」を提案

広帯域信号サンプリング技術の問題設定

- ある帯域 f_{BW} をもつS/H回路を実現する。
このとき、**SNR**を最大にする

T_{1opt} 、 T_{2opt} を求める



- 非線形最適化問題
 - 理論式を導出し、数値計算
 - **SPICE**で回路シミュレーション

C: サンプリング容量 R: スイッチと信号源の合成抵抗 $T_1 = RC$

T/H回路、インパルスサンプリング 回路を統一した理論

統一したS/H回路の周波数伝達関数

■ 周波数伝達関数

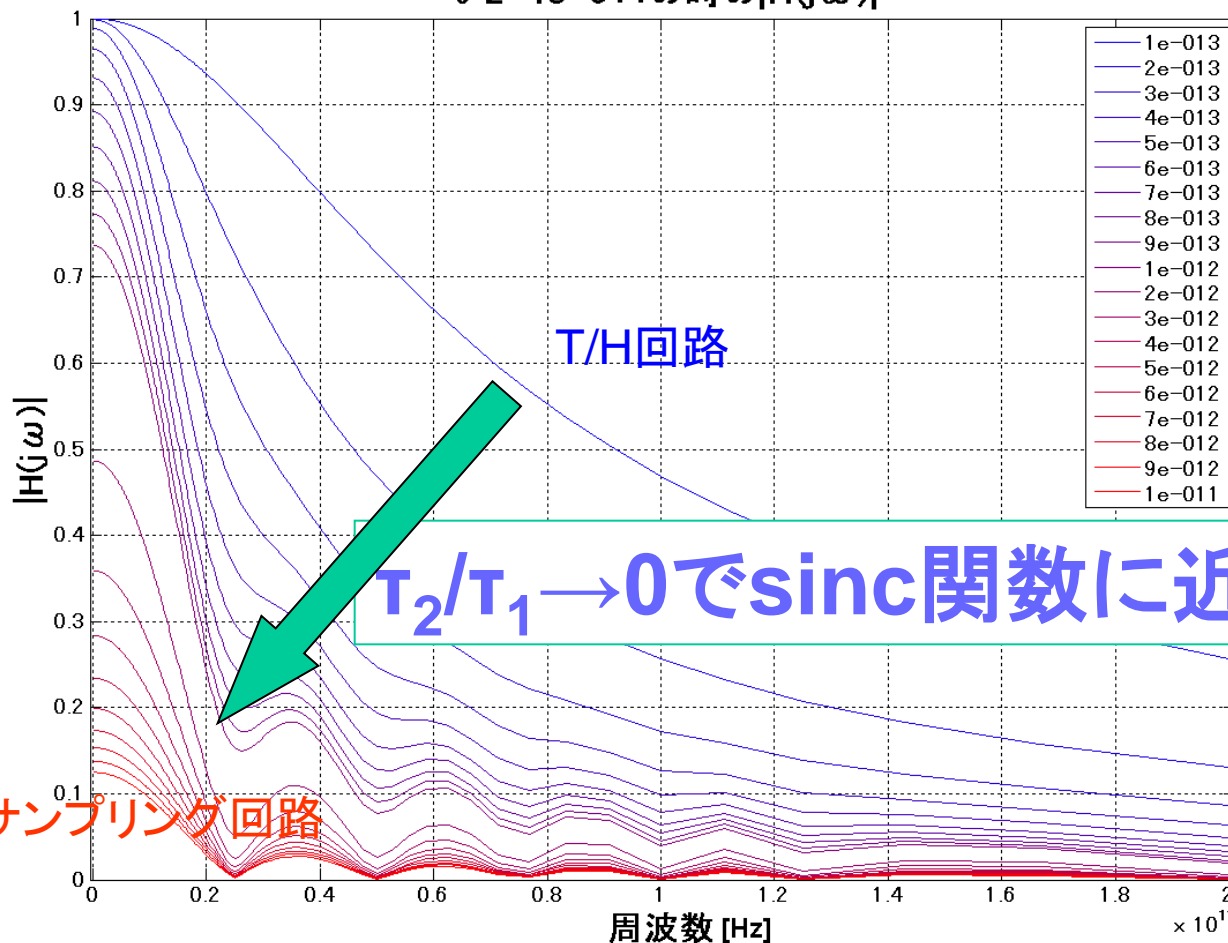
$$H(s) = -\frac{1}{1 + \tau_1 s} \left(e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + s\right)\tau_2} - 1 \right)$$

■ ゲイン特性

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}(1 + j\omega\tau_1)} \right) \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_1^2}} \sqrt{\left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \cos(\omega\tau_2) \right)^2 + \left(-e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \sin(\omega\tau_2) \right)^2} \\ H(j\omega)|_{\omega=0} &= 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \end{aligned}$$

統一したS/H回路のゲイン特性

$\tau^2 = 4e-011$ の時の $|H(j\omega)|$



統一S/H回路の周波数伝達関数の極限

$$H(s) = -\frac{1}{1 + \tau_1 s} \left(e^{-\left(\frac{1}{\tau_1} + s\right)\tau_2} - 1 \right)$$

■ $\tau_2/\tau_1 \rightarrow \infty$

(T/H回路)

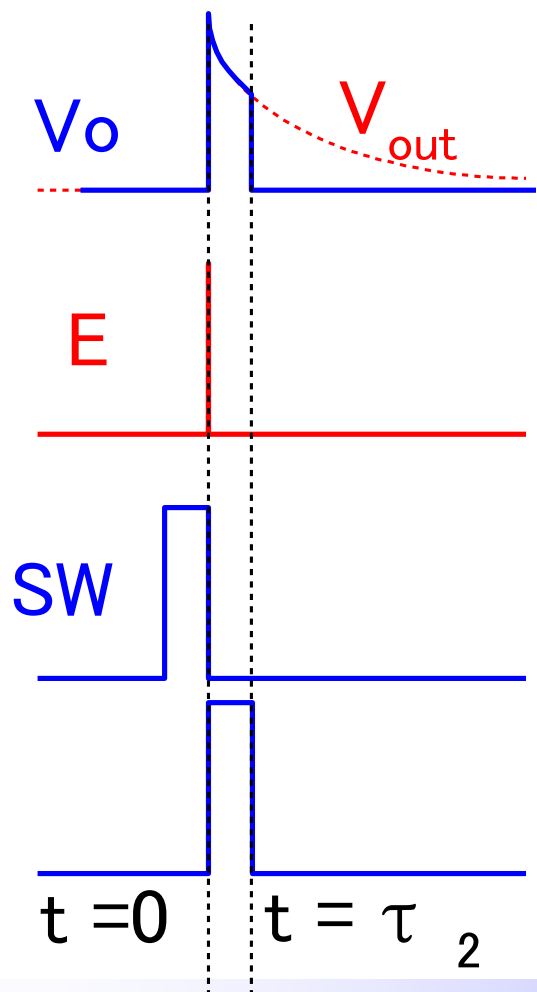
$$\lim_{\substack{\tau_2 \rightarrow \infty \\ \tau_1}} H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau_1\omega}$$

■ $\tau_2/\tau_1 \rightarrow 0$

(インパルスサンプリング回路)

$$\lim_{\tau_1\omega \gg 1, \frac{\tau_2}{\tau_1} \rightarrow 0} H(j\omega) = \frac{\tau_2}{\tau_1} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_2}{2}\right) e^{-j\frac{\tau_2}{2}\omega}$$

統一S/H回路のインパルス応答



■ $t < 0$

$$V_o = 0$$

■ $0 \leq t < \tau_2$

$$V_o = e^{-t/RC} / RC$$

■ $t \geq \tau_2$

$$V_o = 0$$

帯域の計算(1)

伝達関数より

■ 帯域 ω_{BW} : $|H(j\omega_{BW})| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(j0)|$ 厳密式

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega_{BW}^2 C^2 R^2}} \sqrt{\left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{CR}} \cos(\omega_{BW} \tau_2)\right)^2 + \left(-e^{-\frac{\tau_2}{CR}} \sin(\omega_{BW} \tau_2)\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{CR}}\right)$$



解析的に解くのは困難
⇒ 数値計算で ω_{BW} を求める。

帯域の計算(2)

ステップ応答立ち上がり時間より

■ **RC直列回路の帯域: $RC(1/\omega_{BW} = 1/2\pi f_{BW})$ 出力が最大値の10%から90%となる時間**

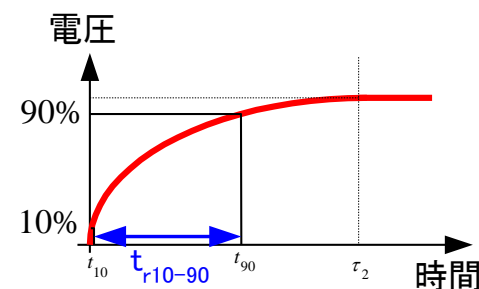
t_{r10-90} から帯域 RC_{est} を推定

$$t_{V_{out}90\%} = -(RC)_{est} \log_e 0.1$$

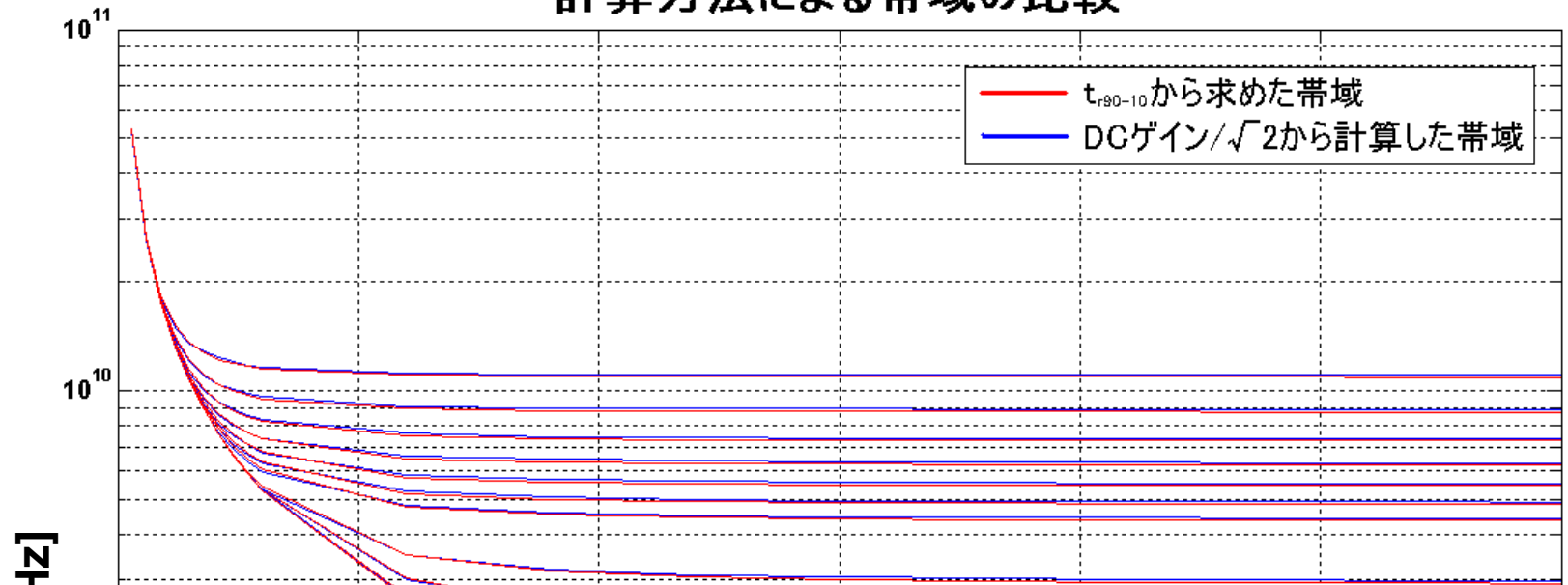
$$t_{V_{out}10\%} = -(RC)_{est} \log_e 0.9$$

$$t_{r10-90} = t_{V_{out}90\%} - t_{V_{out}10\%} = (RC)_{est} \log_e \frac{0.9}{0.1}$$

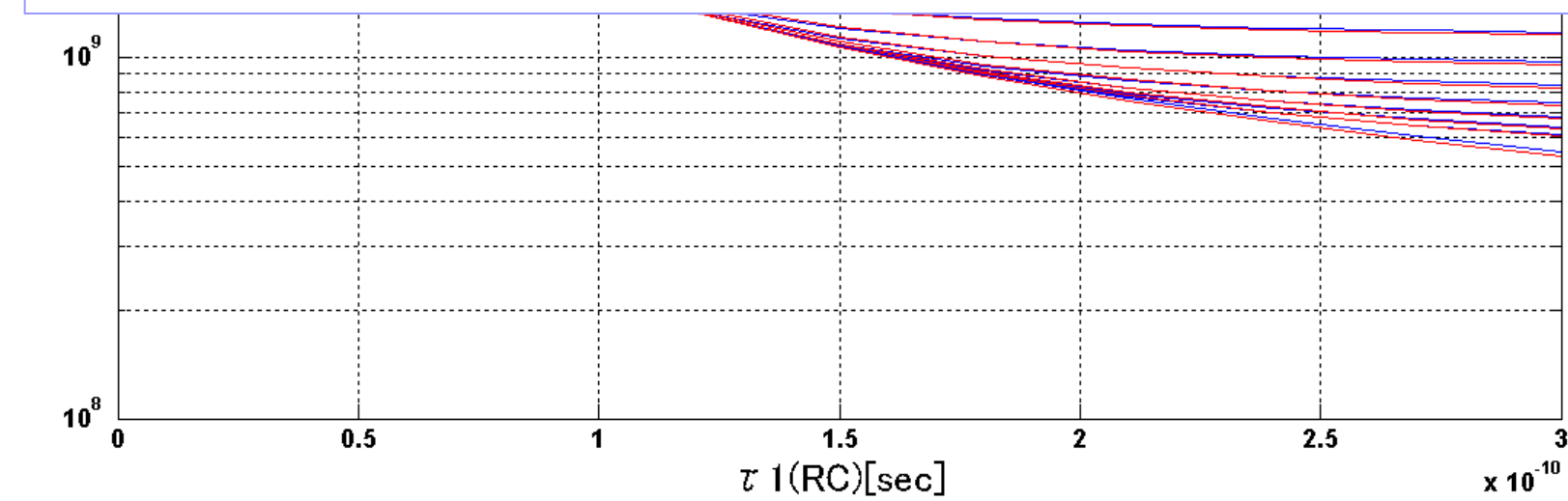
$$\text{近似式: } \mathbf{RC_{est} = t_{r10-90} \div 2.1972}$$



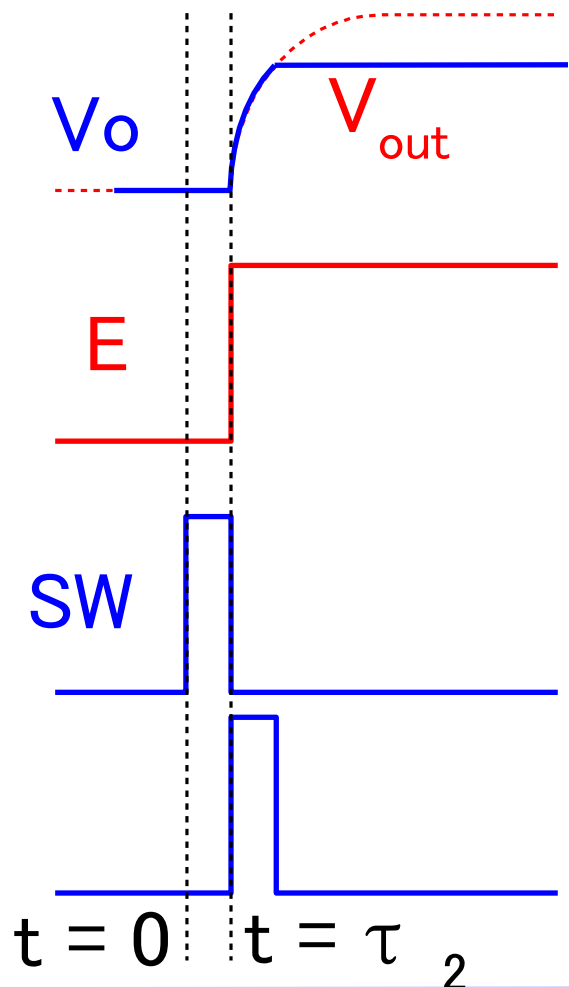
計算方法による帯域の比較



シミュレーションで2つの計算方法は一致



統一S/H回路のステップ応答



■ $t < 0$

$$V_o = 0$$

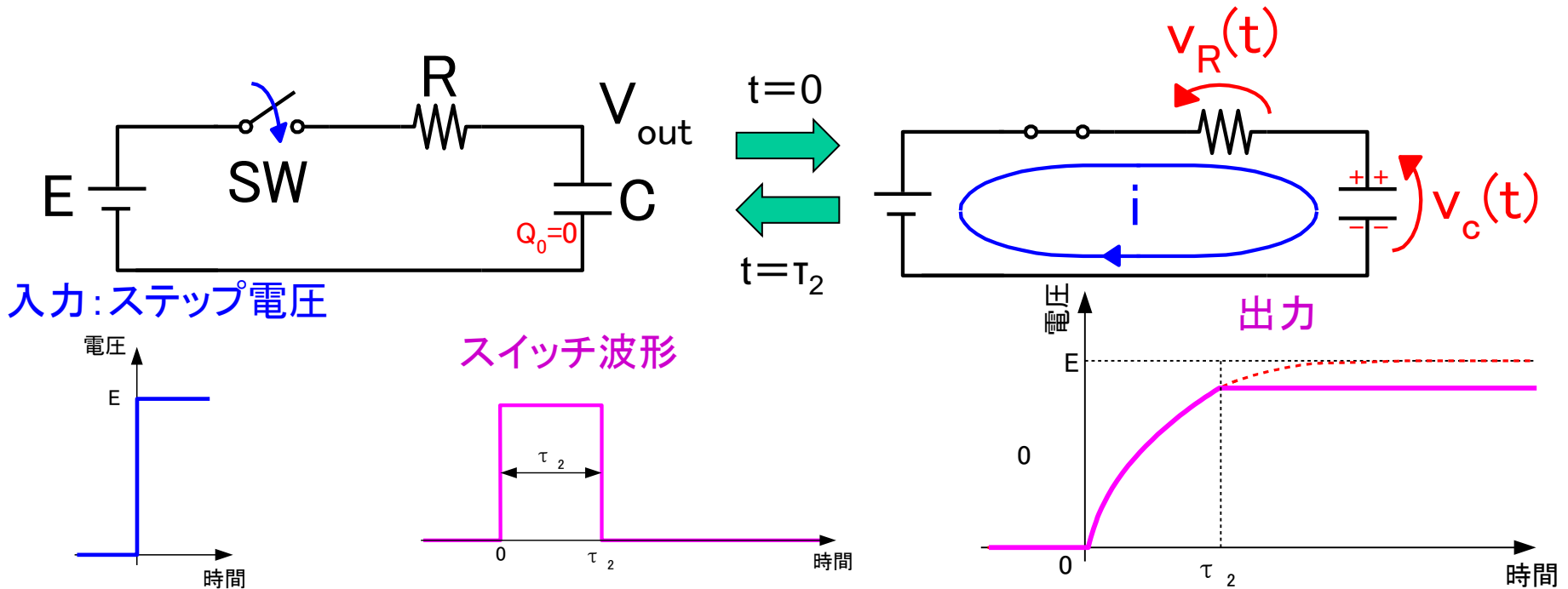
■ $0 \leq t < \tau_2$

$$V_o = 1 - e^{-(t + \tau_2)/RC}$$

■ $t \geq \tau_2$

$$V_o = 1 - e^{-\tau_2/RC}$$

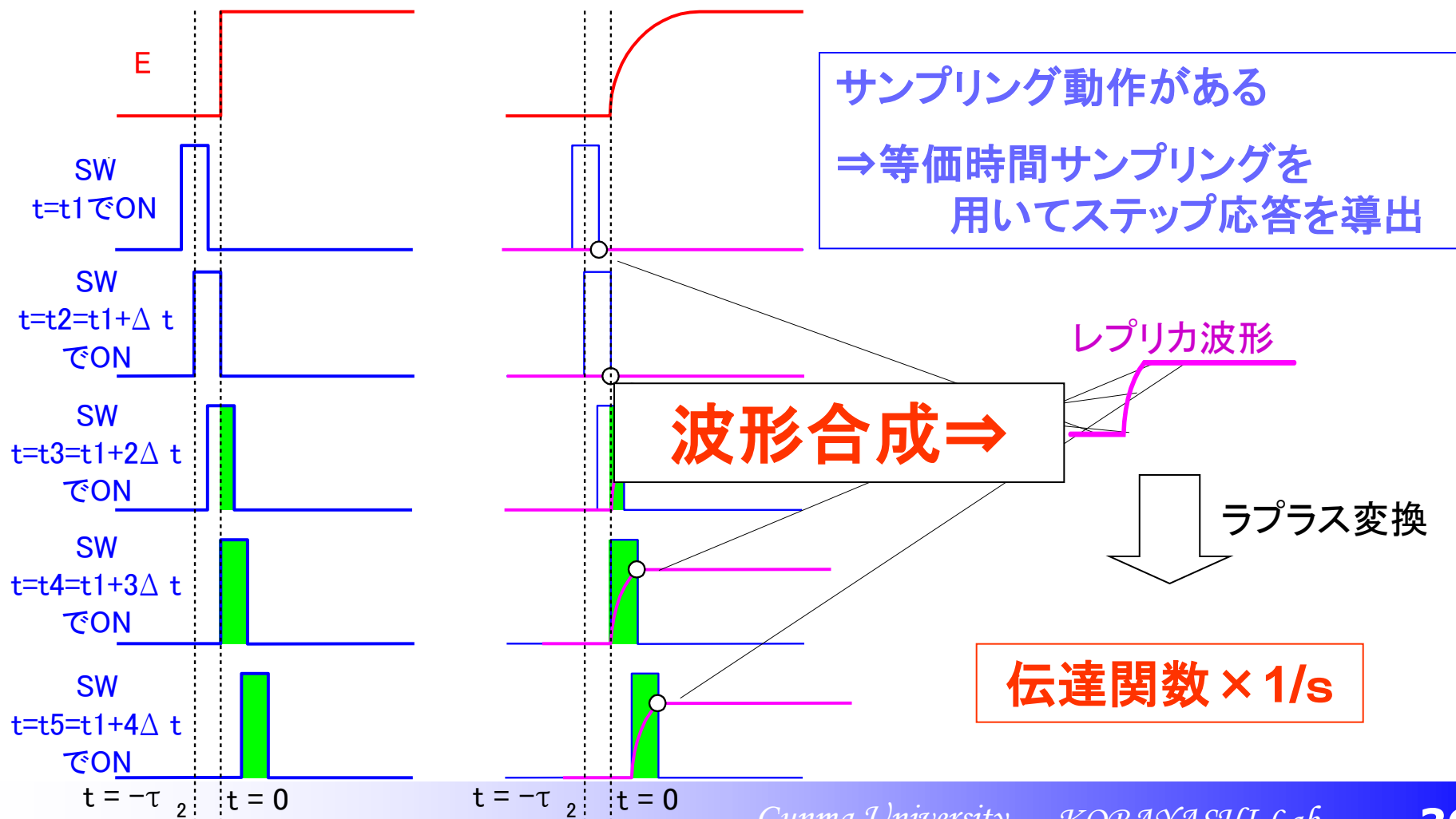
S/H回路のステップ応答



■ E : ステップ入力、スイッチ SW を τ_2 閉じる

■ SW が閉じている時の出力: $V_{out}(t) = CV(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$

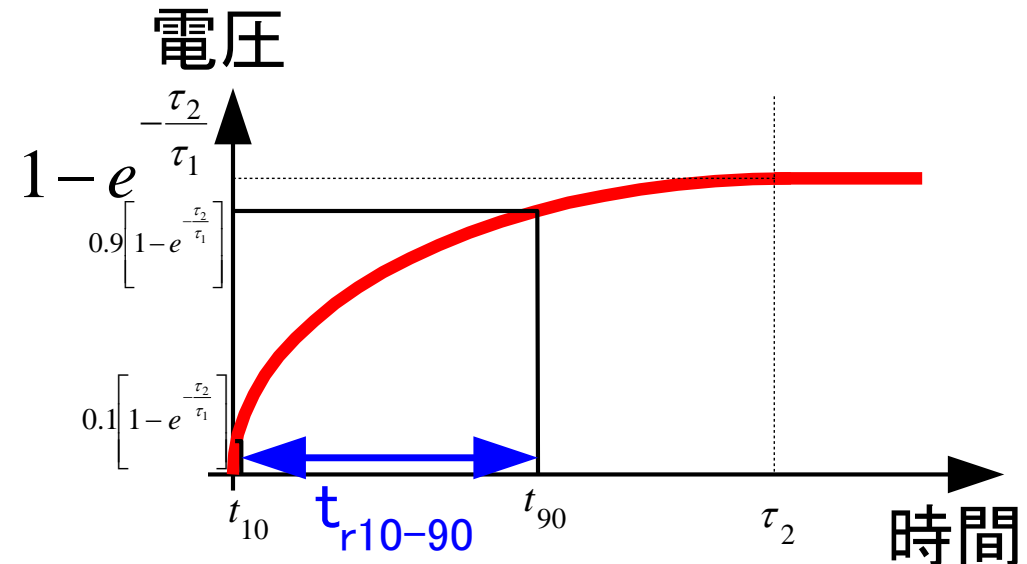
等価時間サンプリングでステップ応答を得る



立ち上がり時間からの帯域推定

単位ステップ応答 $s(t)$

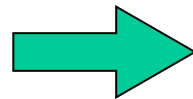
$$s(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} & (0 \leq t < \tau_2) \\ 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} & (\tau_2 \leq t) \end{cases}$$



■ 一次系を仮定し、 t_{r10-90} から RC_{est} を推定

$$t_{10} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t_{10}}{\tau_1}} = 0.1 \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)$$

$$t_{90} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t_{90}}{\tau_1}} = 0.9 \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)$$



$$t_{r10-90} = \tau_1 \ln \frac{0.9 + 0.1e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}}{0.1 + 0.9e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}}$$

$$RC_{est} \cong \frac{t_{r10-90}}{2.1972}$$

統一S/H回路のSNR

■ 熱雑音 : $E_{noise} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$ (k :ボルツマン定数、 T :温度)

■ 信号成分: $E_{signal} = 1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}$

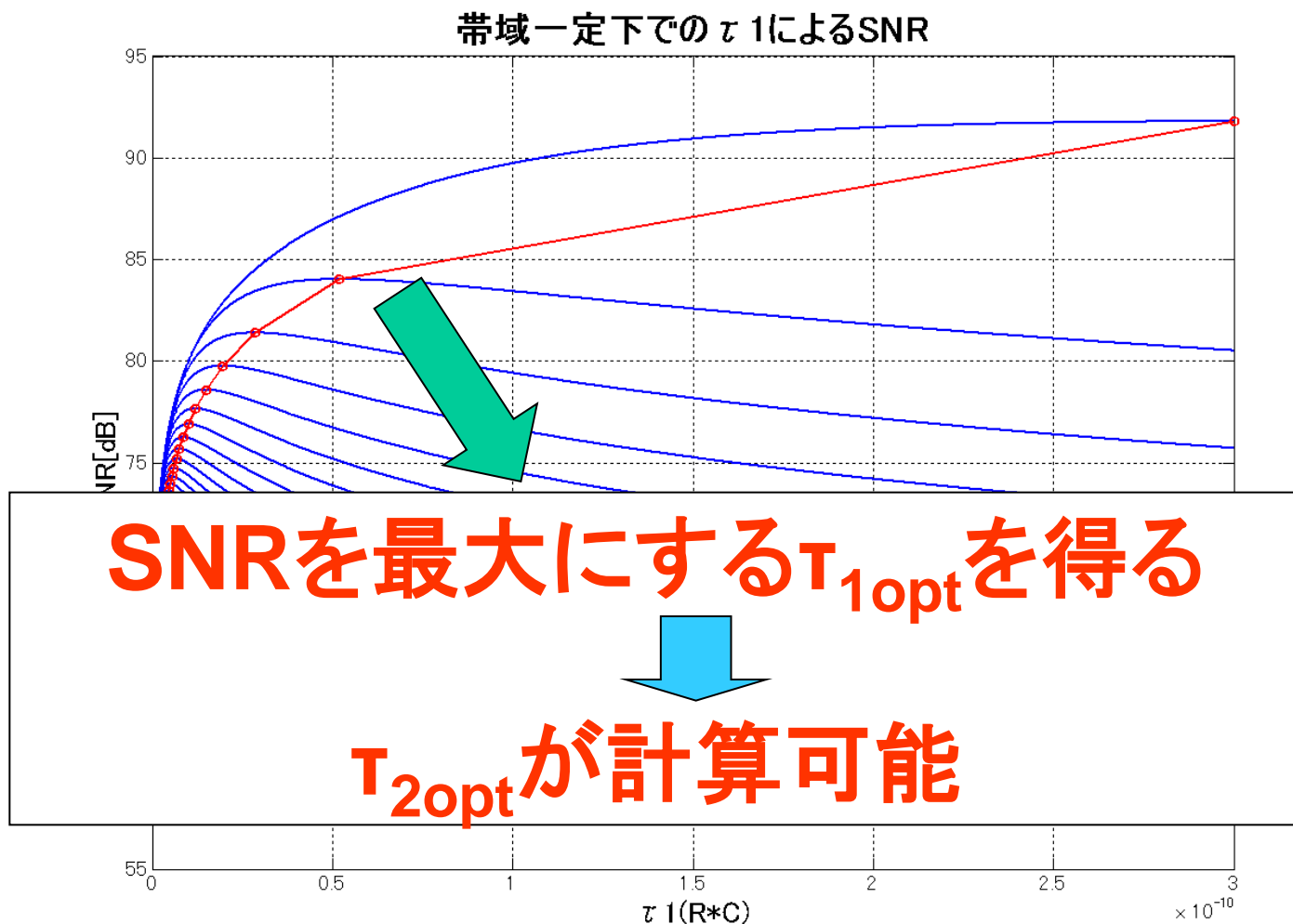
■ SNR: $SNR = \frac{E_{signal}}{E_{noise}} = \frac{1}{\sqrt{kTR}} \sqrt{\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)$

$$SNR = 10 \frac{1}{\sqrt{kTR}} \sqrt{\tau_1} 10^{\frac{t_{r10-90}}{\tau_1}} \frac{1 - e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}}{1 - 9e^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}}}$$

$$RC_{est} \cong \frac{t_{r10-90}}{2.1972}$$

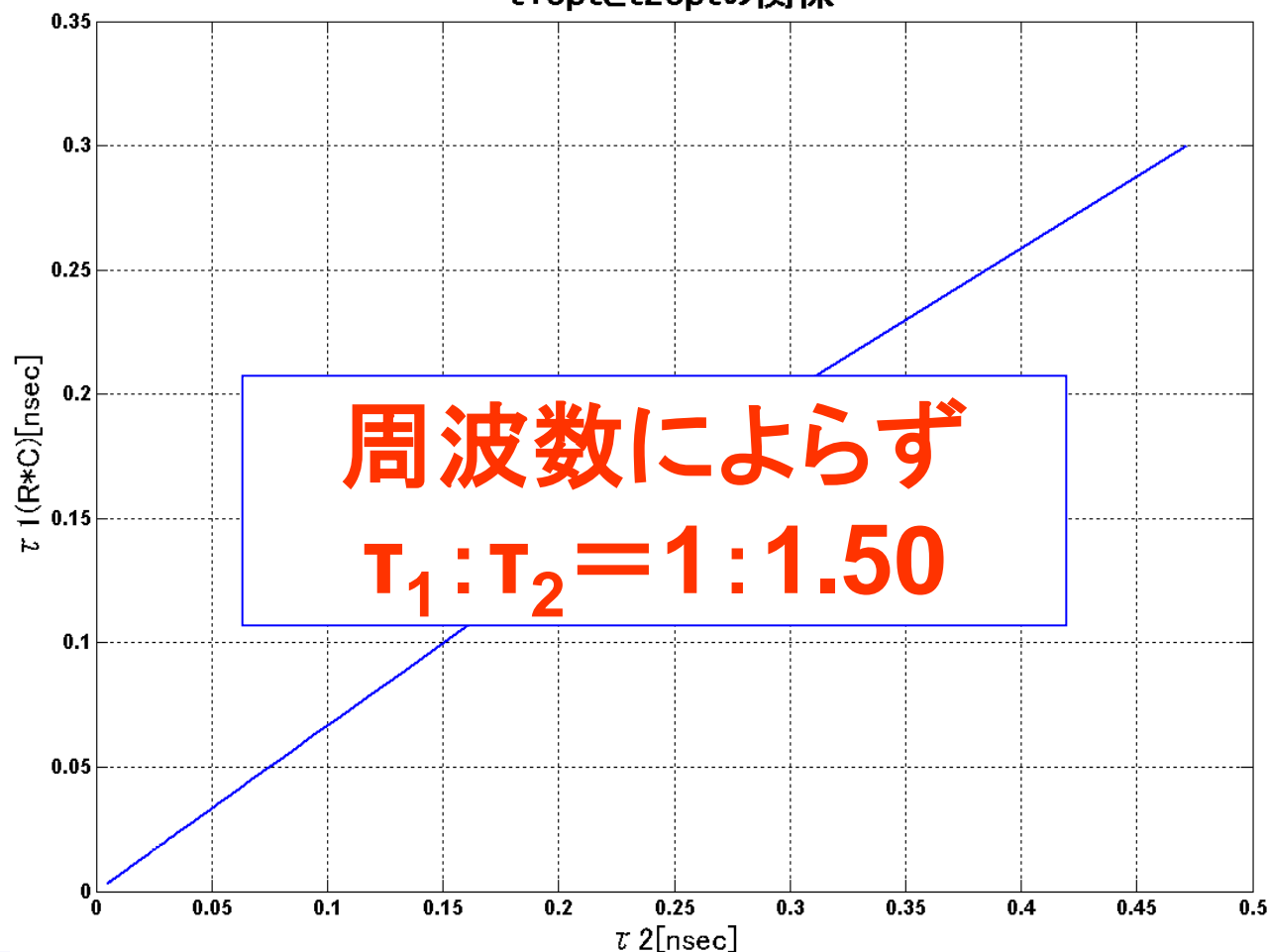
■ f_{BW} :一定 $\Rightarrow t_{r10-90} = 0.35 f_{BW}$:一定
 $\Rightarrow \tau_1$ を振りSNRを数値計算

帯域一定下の τ_1 によるSNR



T_{1opt} と T_{2opt} の関係

t1optとt2optの関係

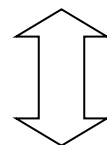


エネルギーの観点からの

T_{1opt} と T_{2opt}

■ 帯域一定下で

SNRを最大



等価

ホールド容量に蓄えるエネルギーを最大

■ 回路的考察とシミュレーションにより発見

SNR最大 ⇔ 容量保持エネルギー最大の証明

$$\text{SNR} = 20 \log V_{\text{out}} / \text{root}(kT/C) \quad [\text{dB}]$$

$$= 10 \log V_{\text{out}}^2 / (kT/C)$$

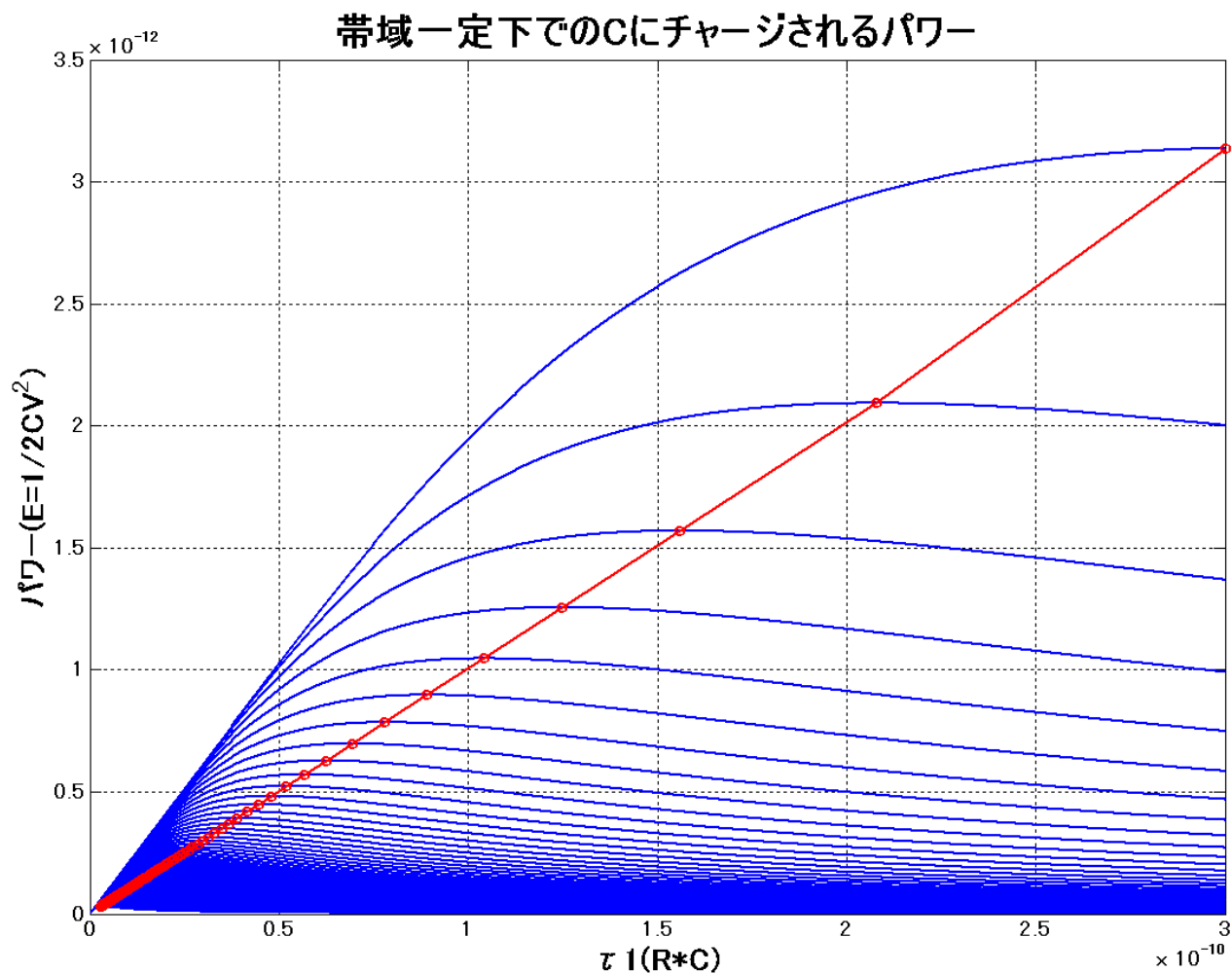
$$= 10 \log [(1/2) C V_{\text{out}}^2] + \text{定数}$$

$$= 10 \log [\text{容量保持エネルギー}]$$

+ 定数

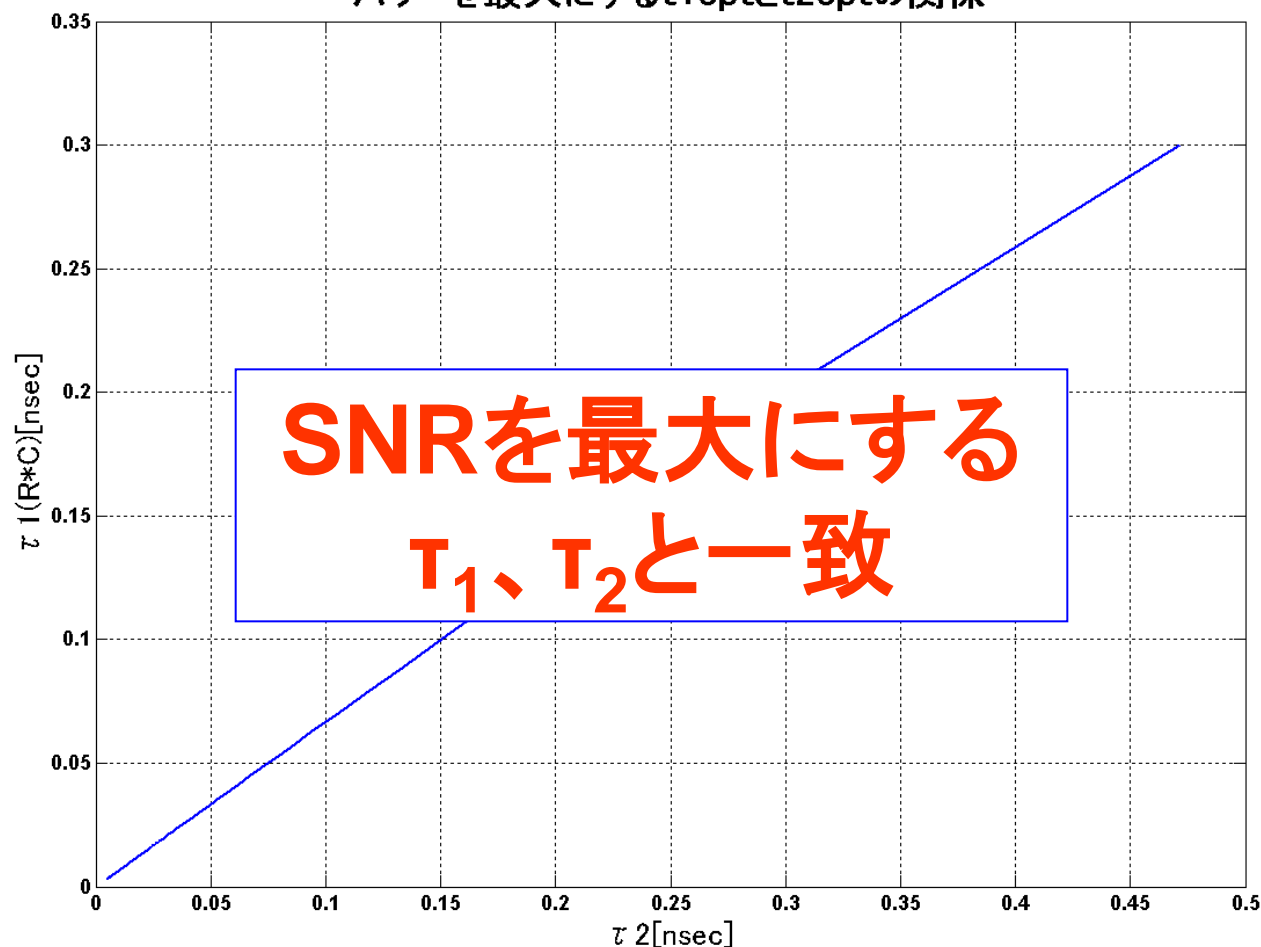
⇒ 容量保持エネルギー最大 ⇔ **SNR**最大

T_{1opt} と T_{2opt} の物理的解釈



T_{1opt} と T_{2opt} の物理的解釈

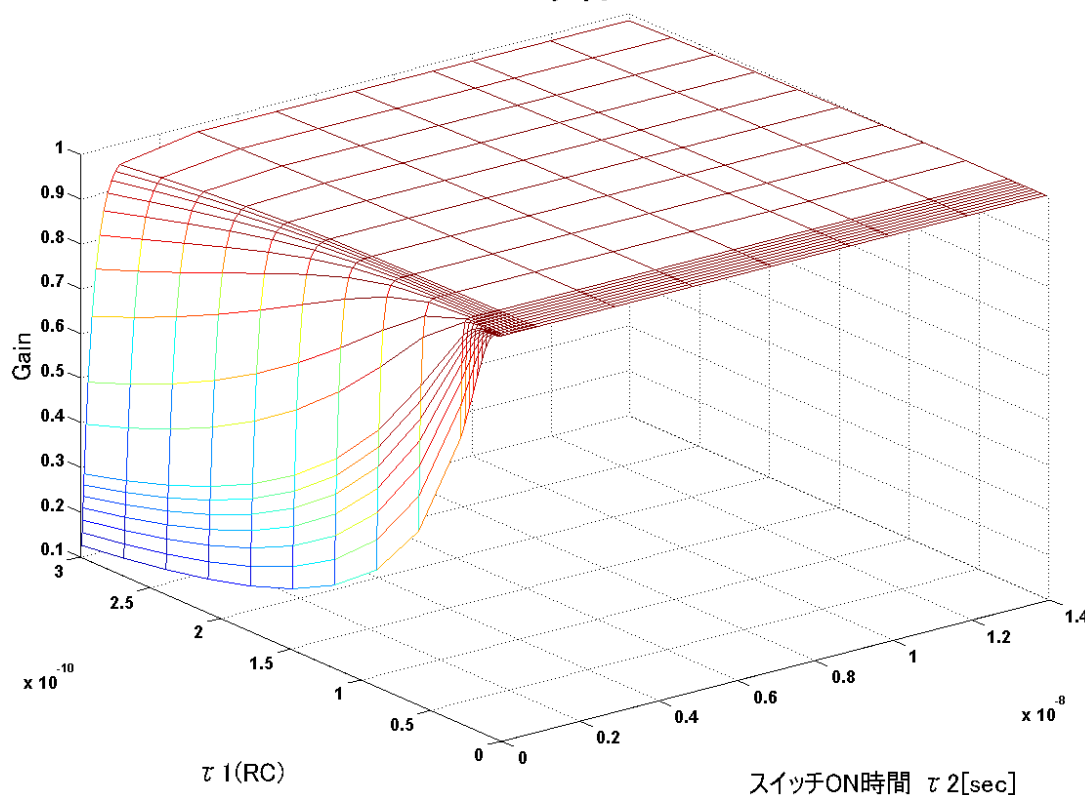
パワーを最大にする t_{1opt} と t_{2opt} の関係



T_{1opt} と T_{2opt} を得る計算過程

■ ステップ応答の出力振幅を求める

DCゲイン

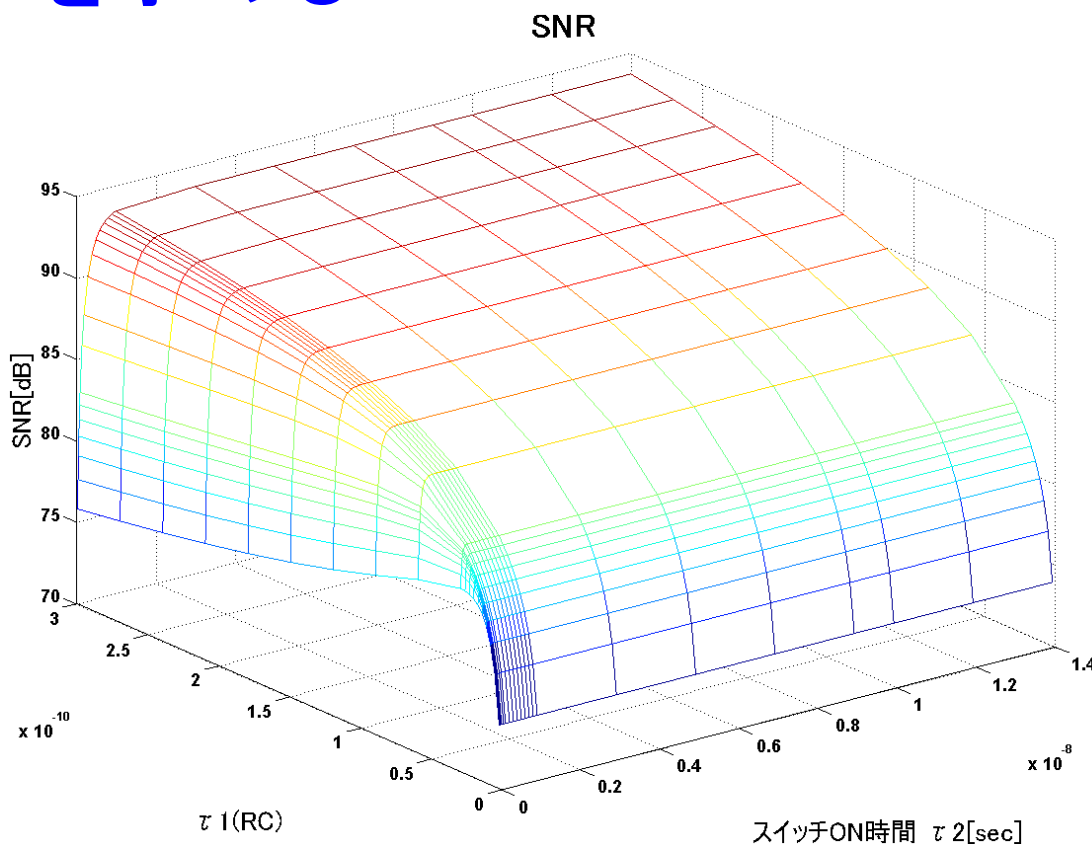


信号成分:
 $1 - \exp(-t_{2opt}/t_{1opt})$

T_{1opt} と T_{2opt} を得る計算過程

■ SNRを求める

信号成分:
 $1 - \exp(-t_{2opt}/t_{1opt})$
 雑音成分(rms):
 $\sqrt{kT/C}$

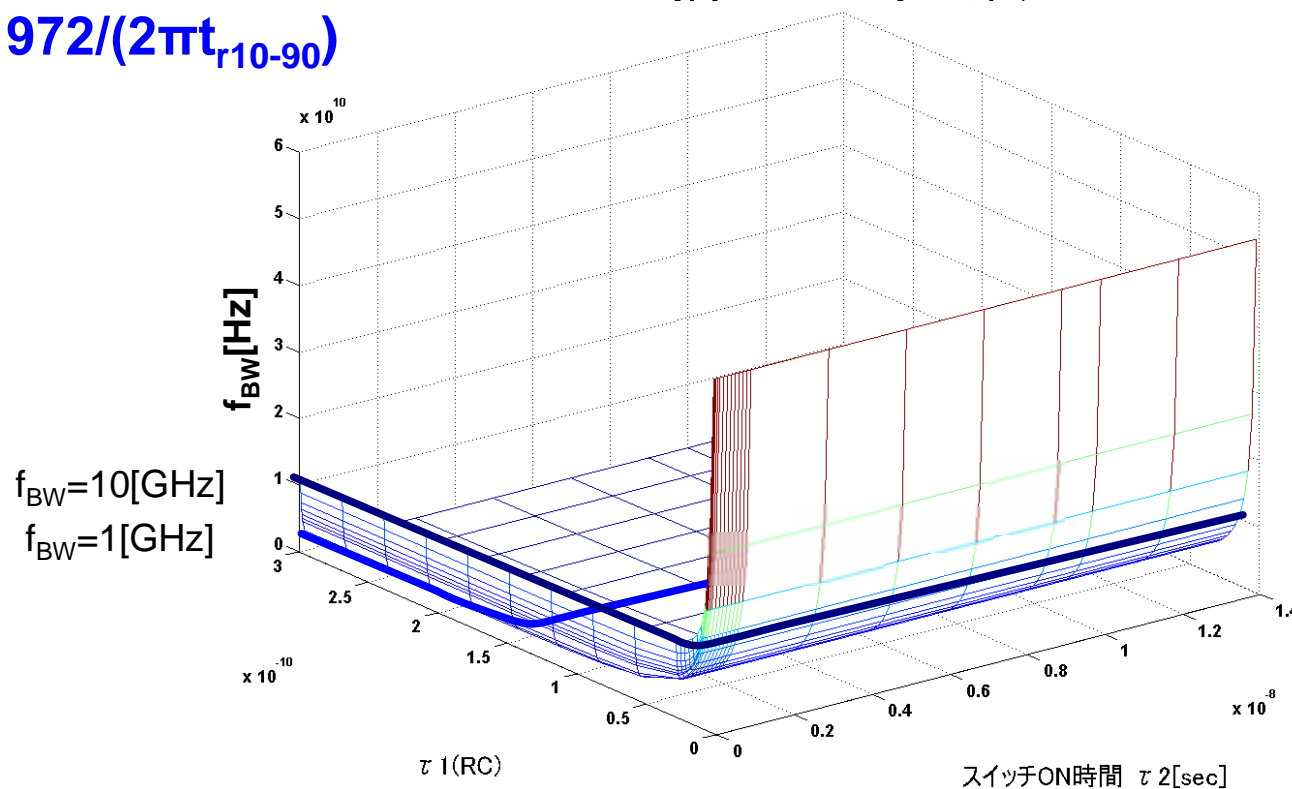


T_{1opt} と T_{2opt} を得る計算過程

■ 帯域を求める

10%-90%の時間 t_{r90-10} から求めた帯域

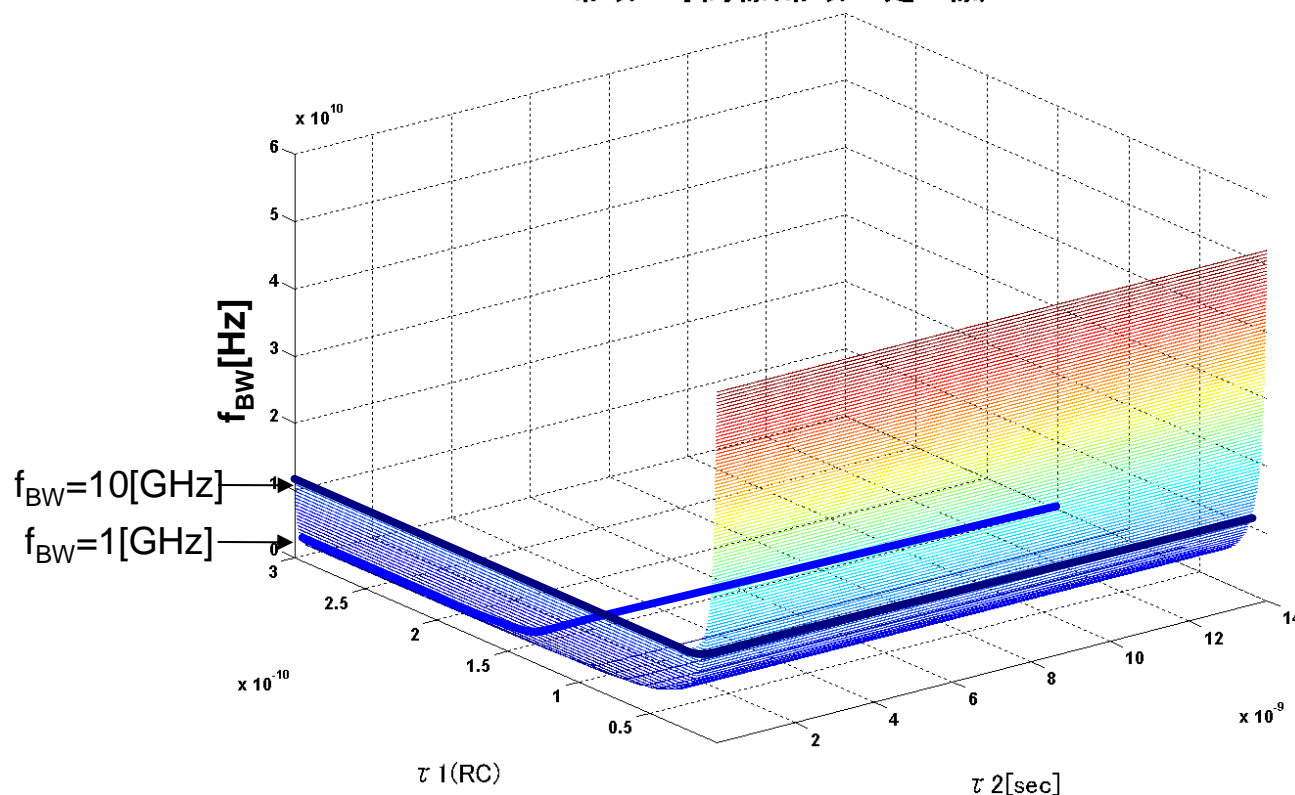
$$f_{BW} = 2.1972 / (2\pi t_{r10-90})$$



T_{1opt} と T_{2opt} を得る計算過程

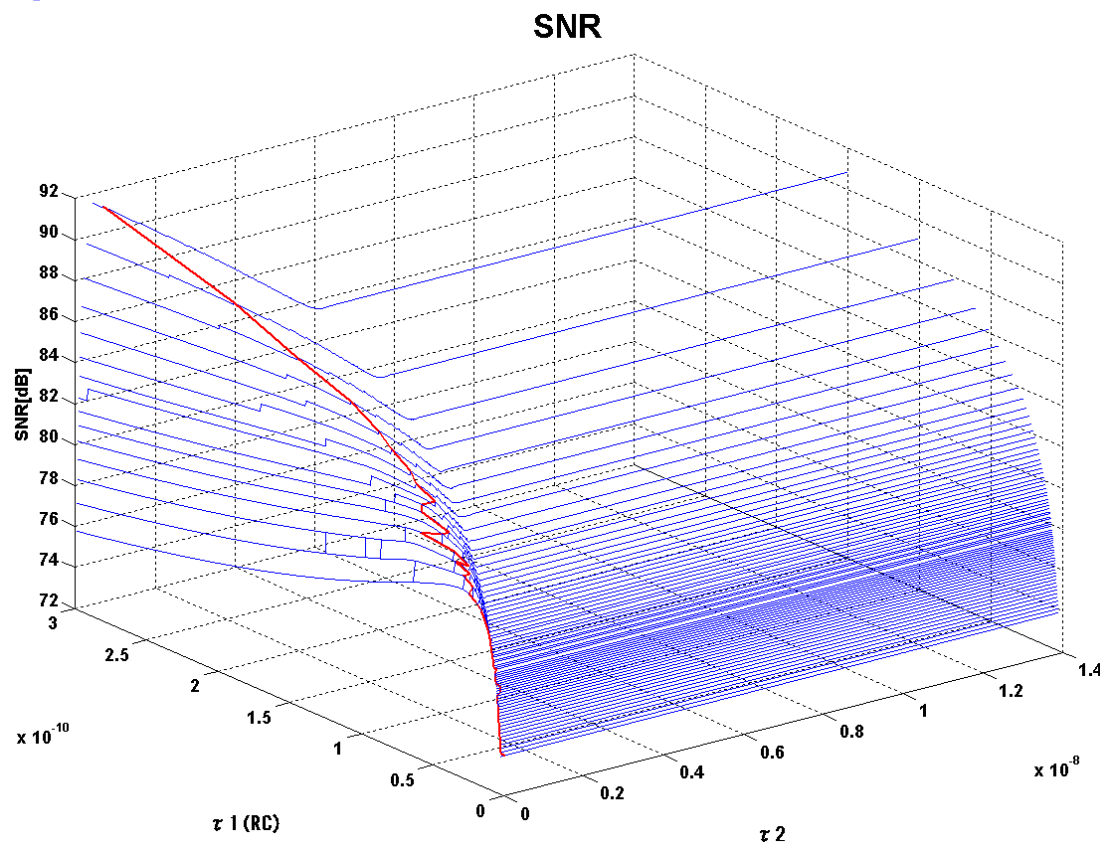
■ 帯域一定の条件を求める

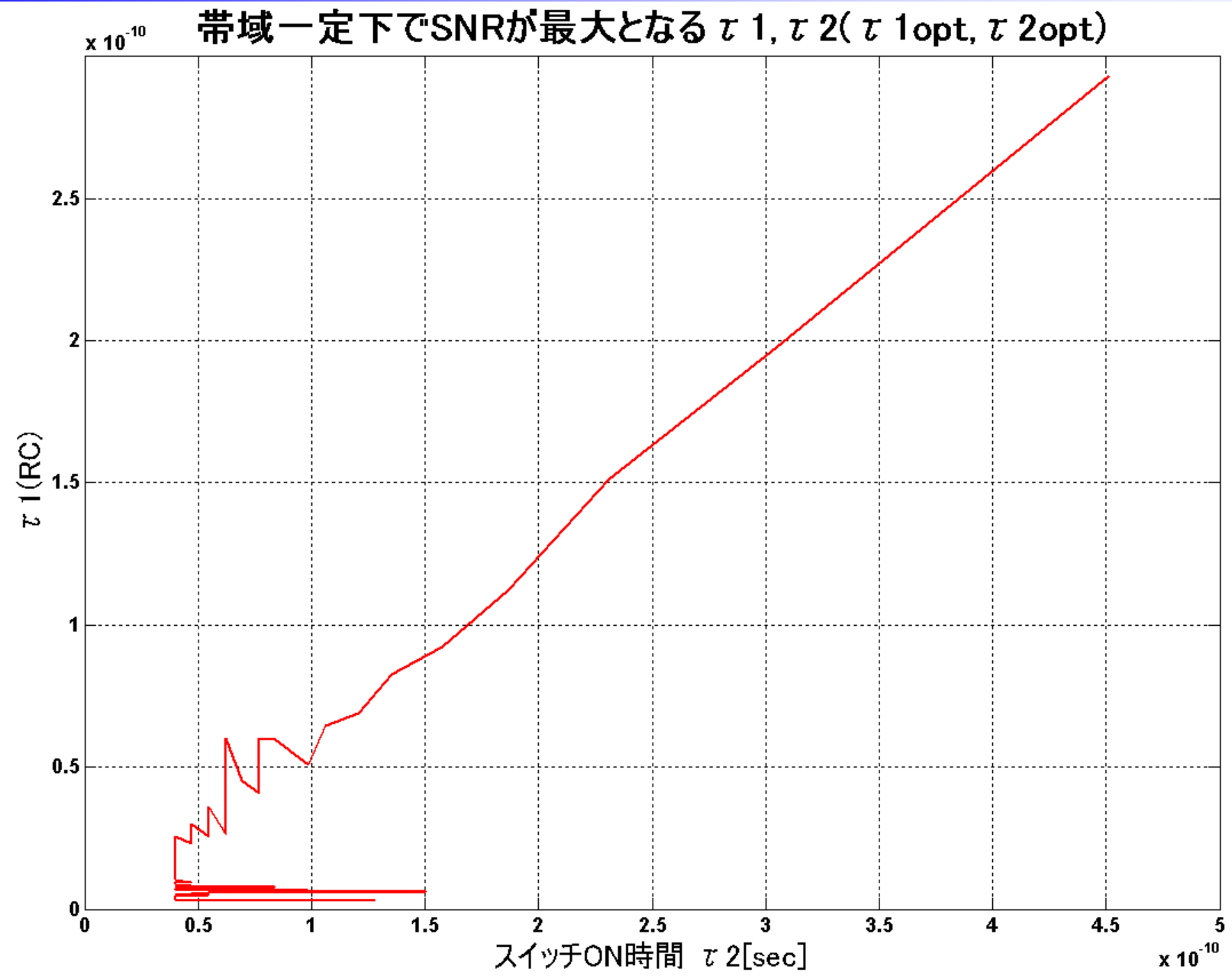
帯域の等高線(帯域一定の線)

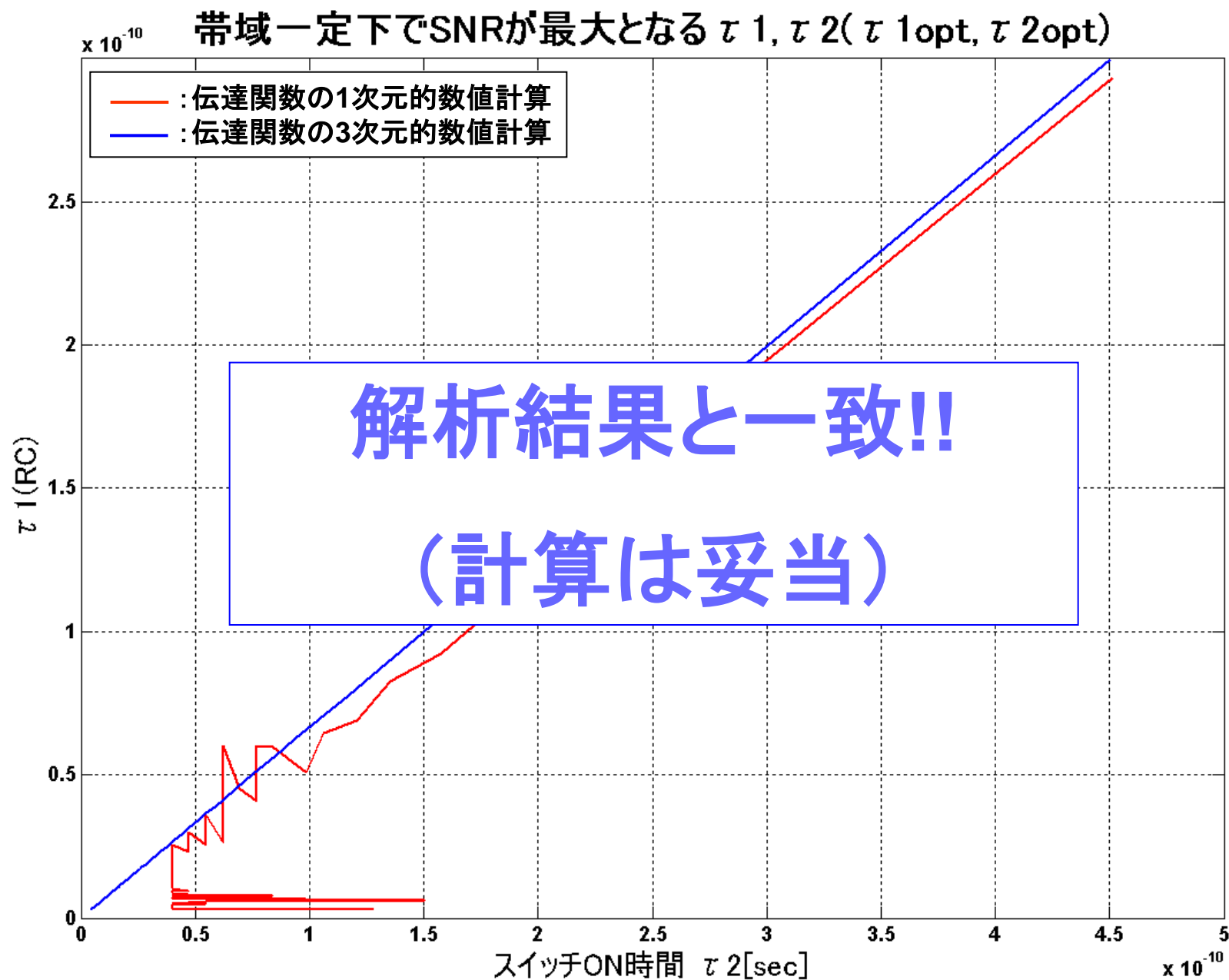


T_{1opt} と T_{2opt} を得る計算過程

■ ある帯域でのSNRを求める

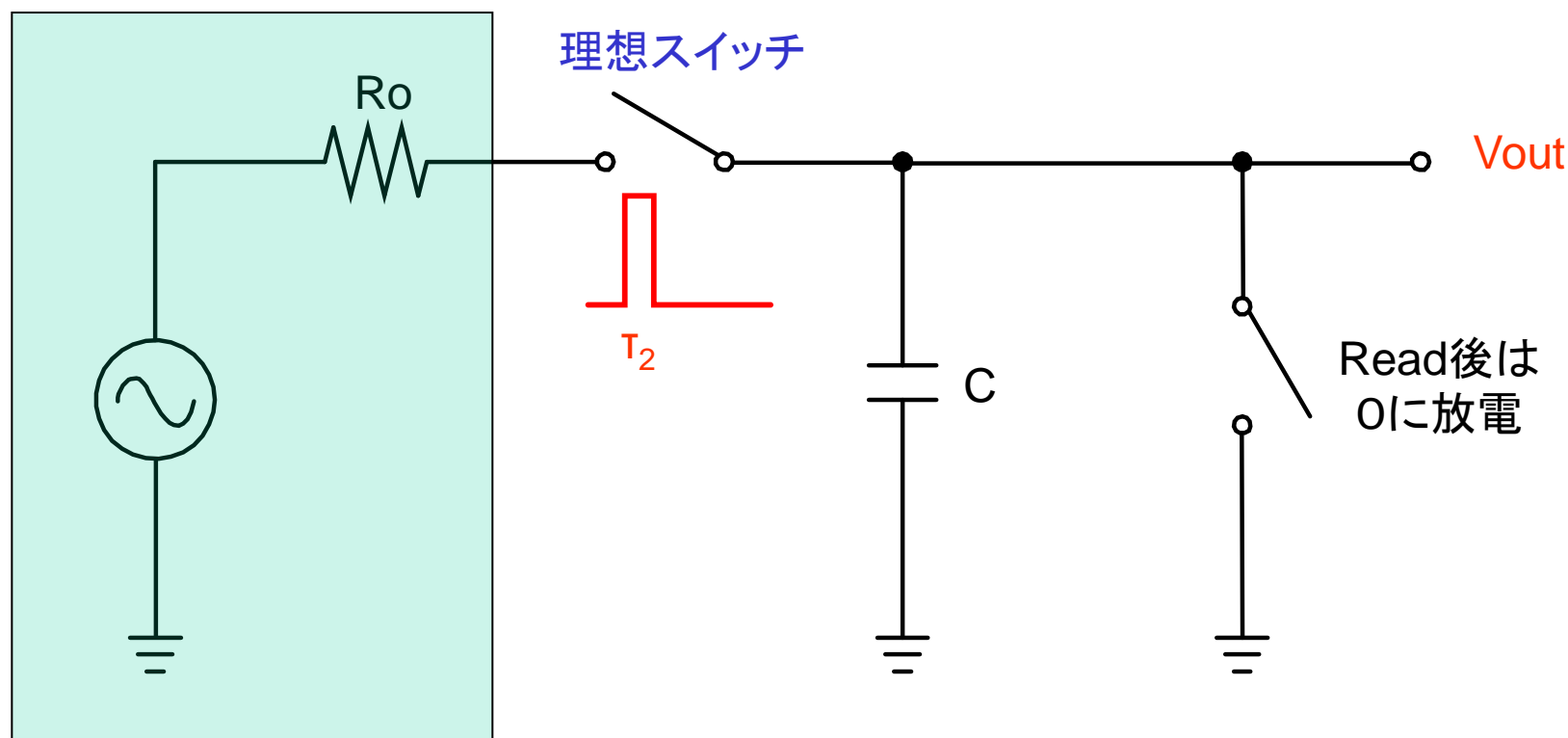






SPICEシミュレーション によるアプローチ

シミュレーション回路



ステップ入力

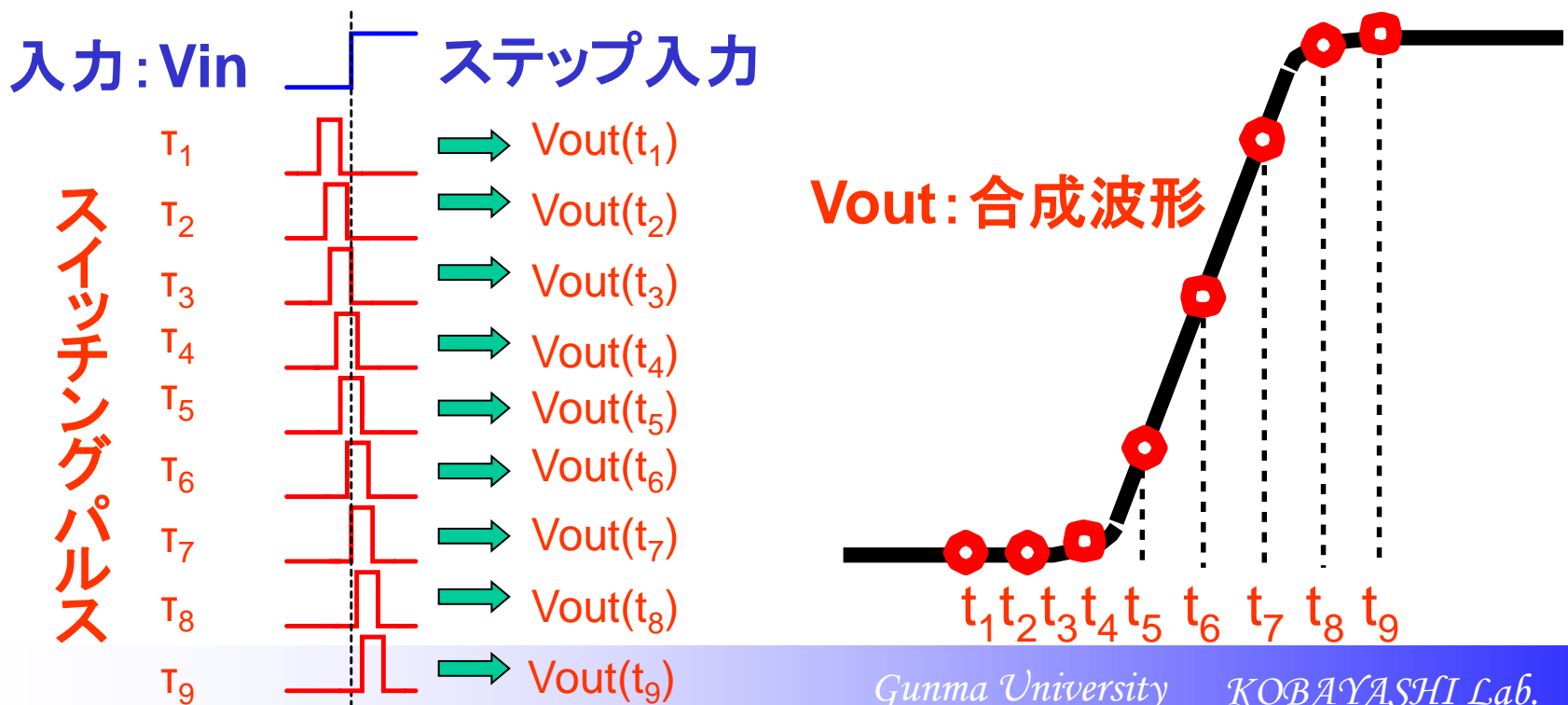
Ro: 固定 (30Ω)

T_1 、 T_2 : パラメータ

$N_{rms} = \sqrt{kT/C}$ で計算

等価時間サンプリング

■ ステップ入力の等価時間サンプリング
 ⇒ 帯域 f_{bw} と 信号 S



計算方法

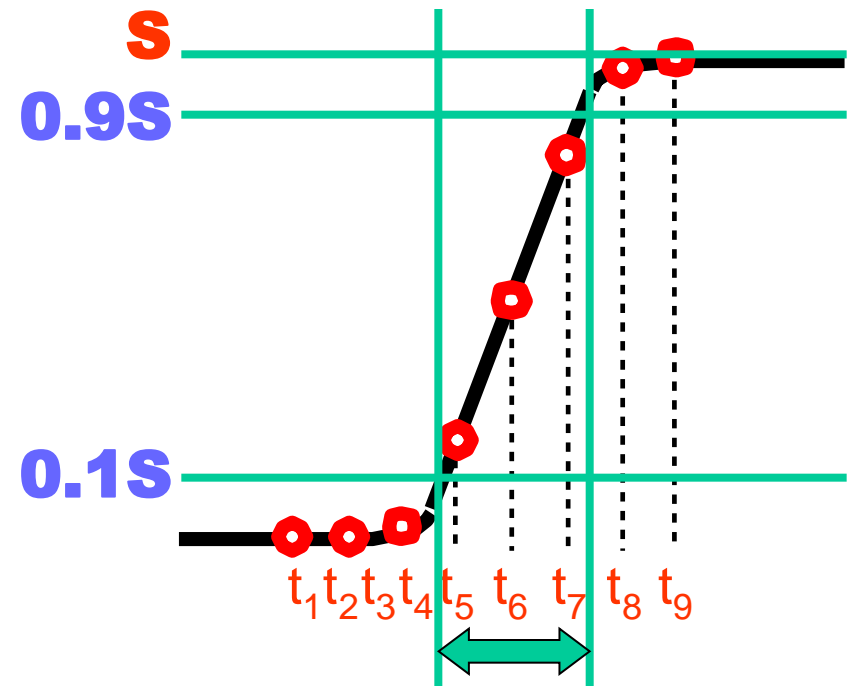
■ シミュレーション結果

- 信号:**S**
- 立ち上がり時間: **t_{r10-90}**

■ $\text{Noise} = \sqrt{kT/C}$

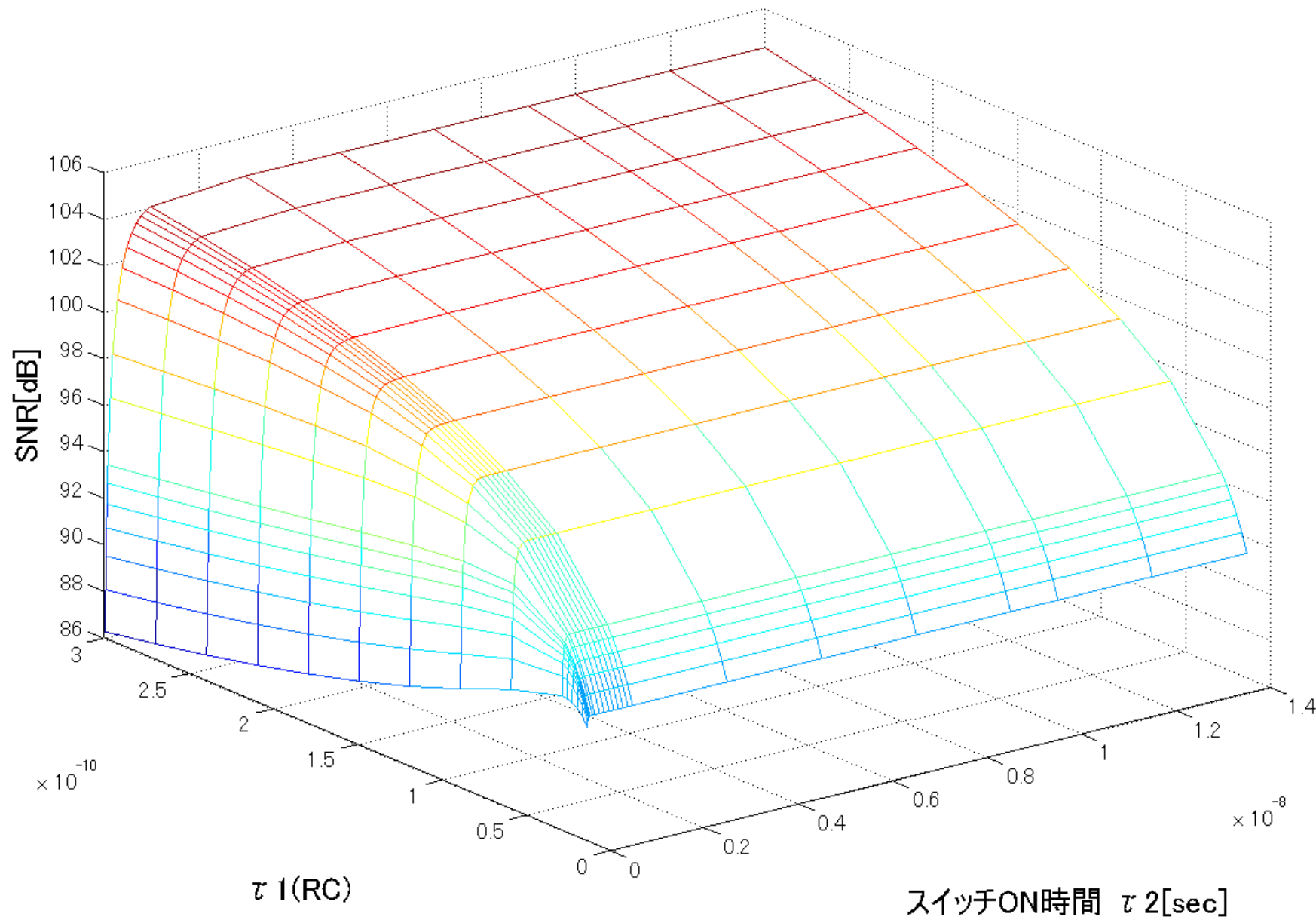
⇒ **SNR**

⇒ 一次系仮定の帯域

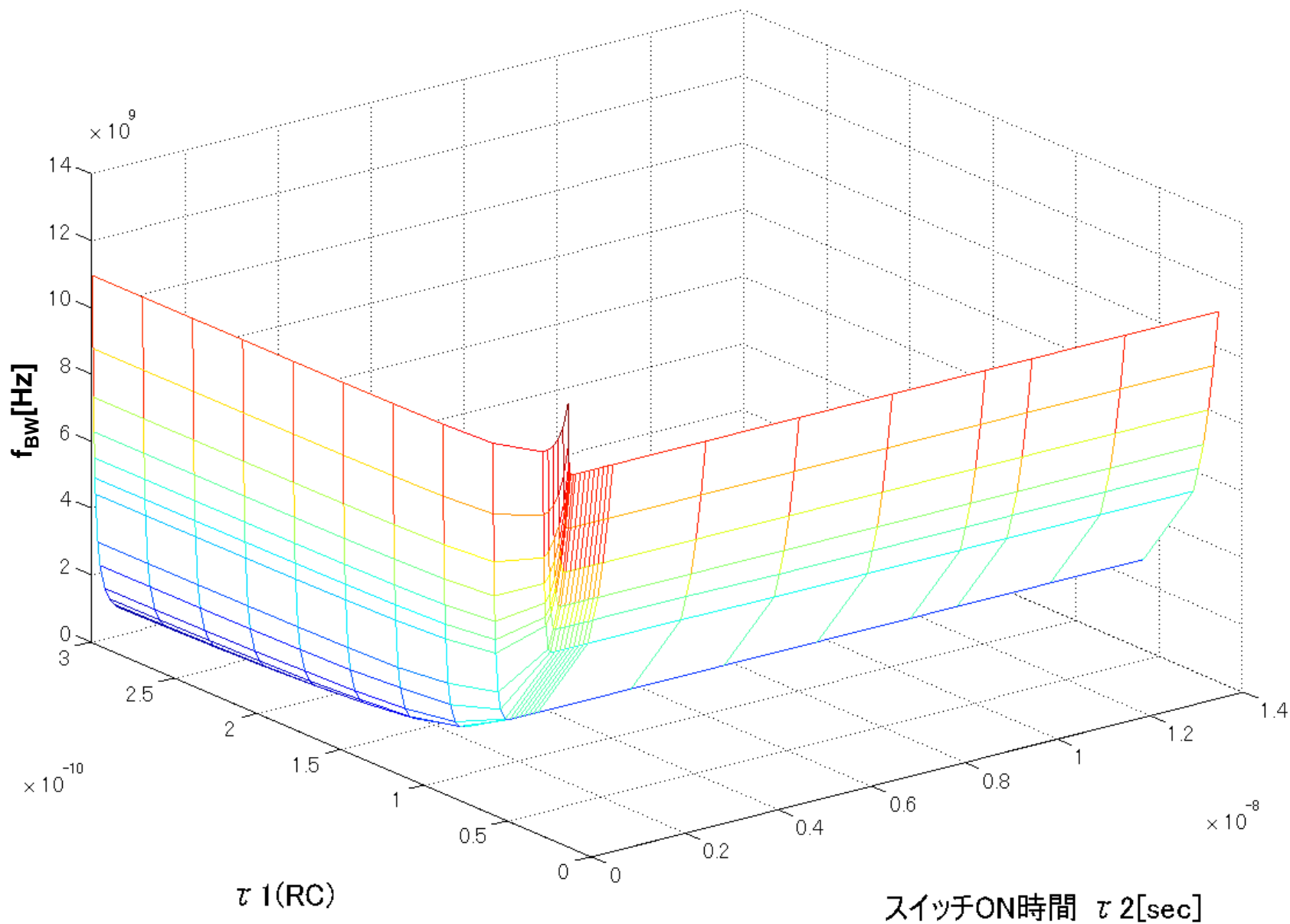


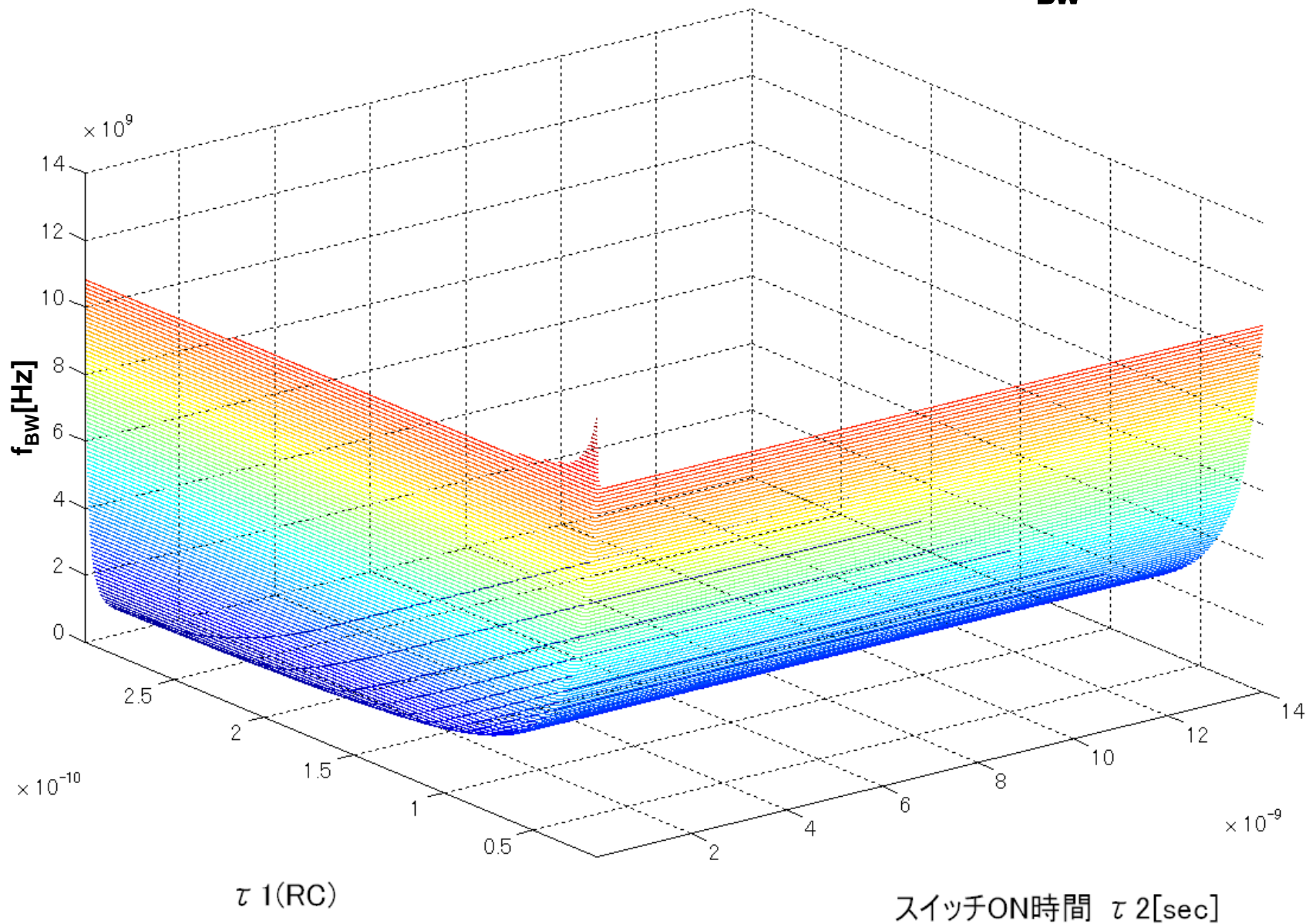
$$RC_{\text{est}} = t_{r10-90} / 2.1972 \quad \leftarrow t_{r10-90}$$

SPICEシミュレーション結果から計算したSNR

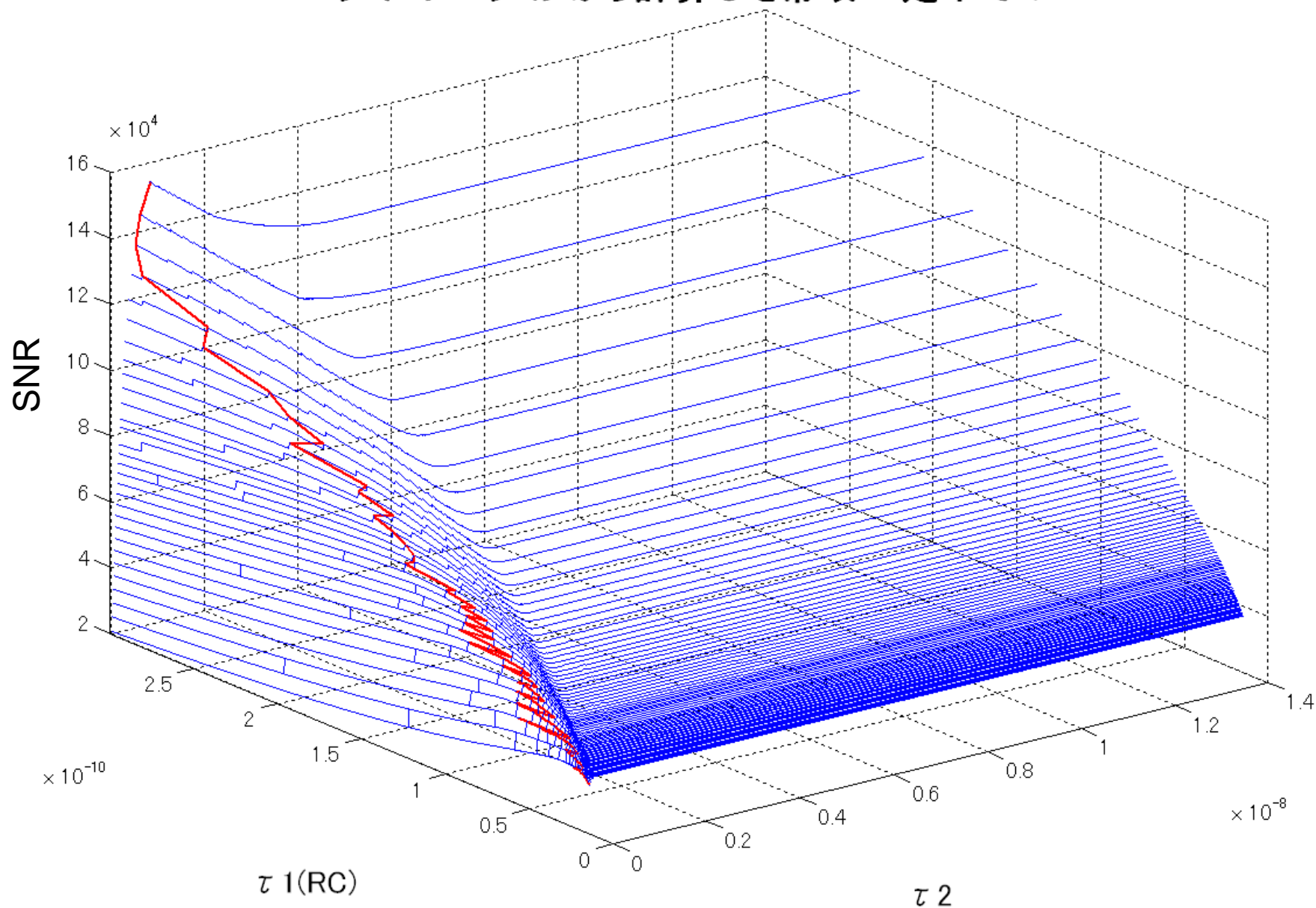


SPICEシミュレーション結果から計算した帯域

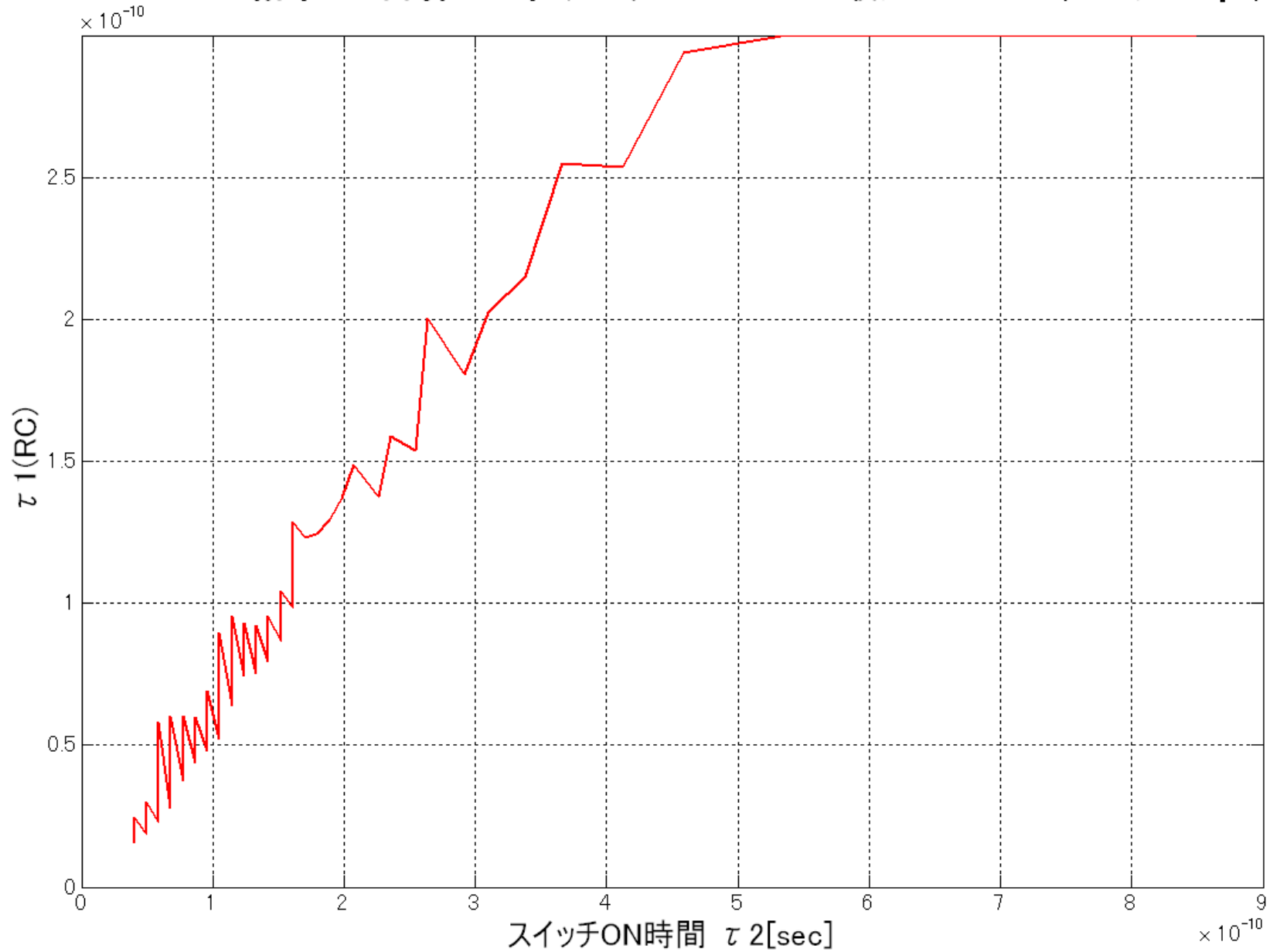


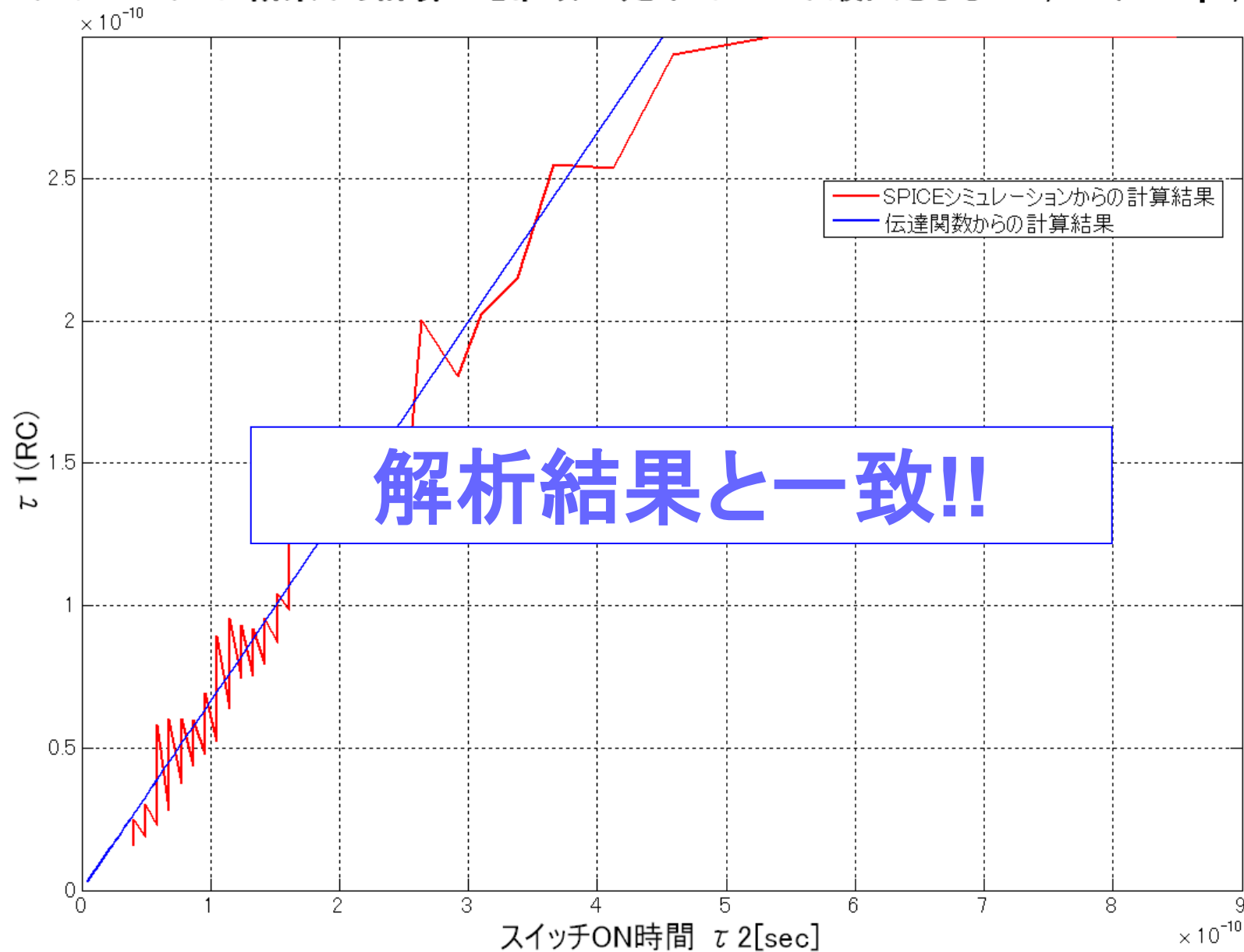
SPICEシミュレーション結果から計算した帯域の等高線 (f_{BW} 一定の線)

SPICEシミュレーションから計算した帯域一定下でのSNR



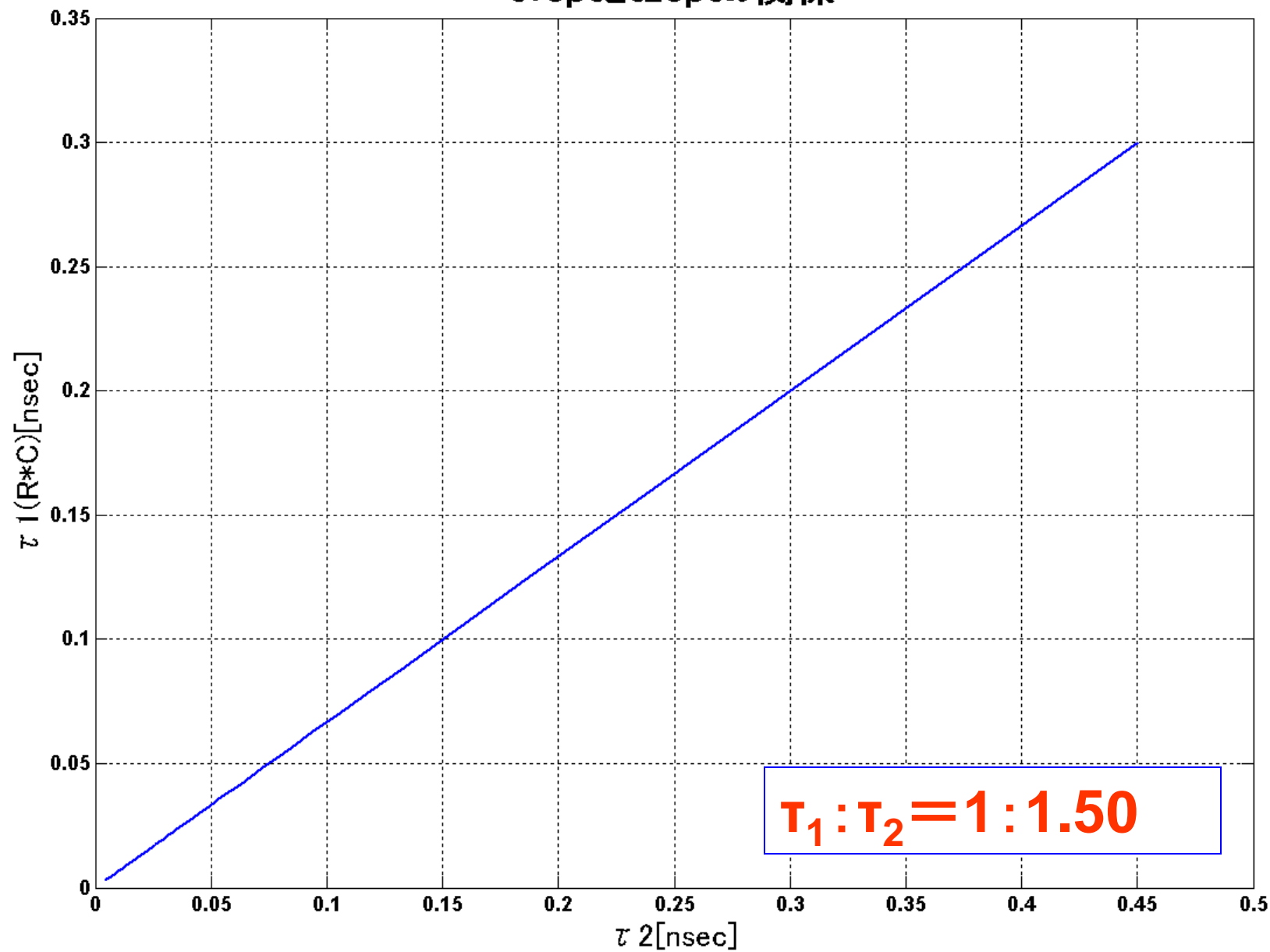
SPICEシミュレーション結果から計算した帯域一定下でSNRが最大となる $\tau 1, \tau 2$ ($\tau 1_{opt}, \tau 2_{opt}$)



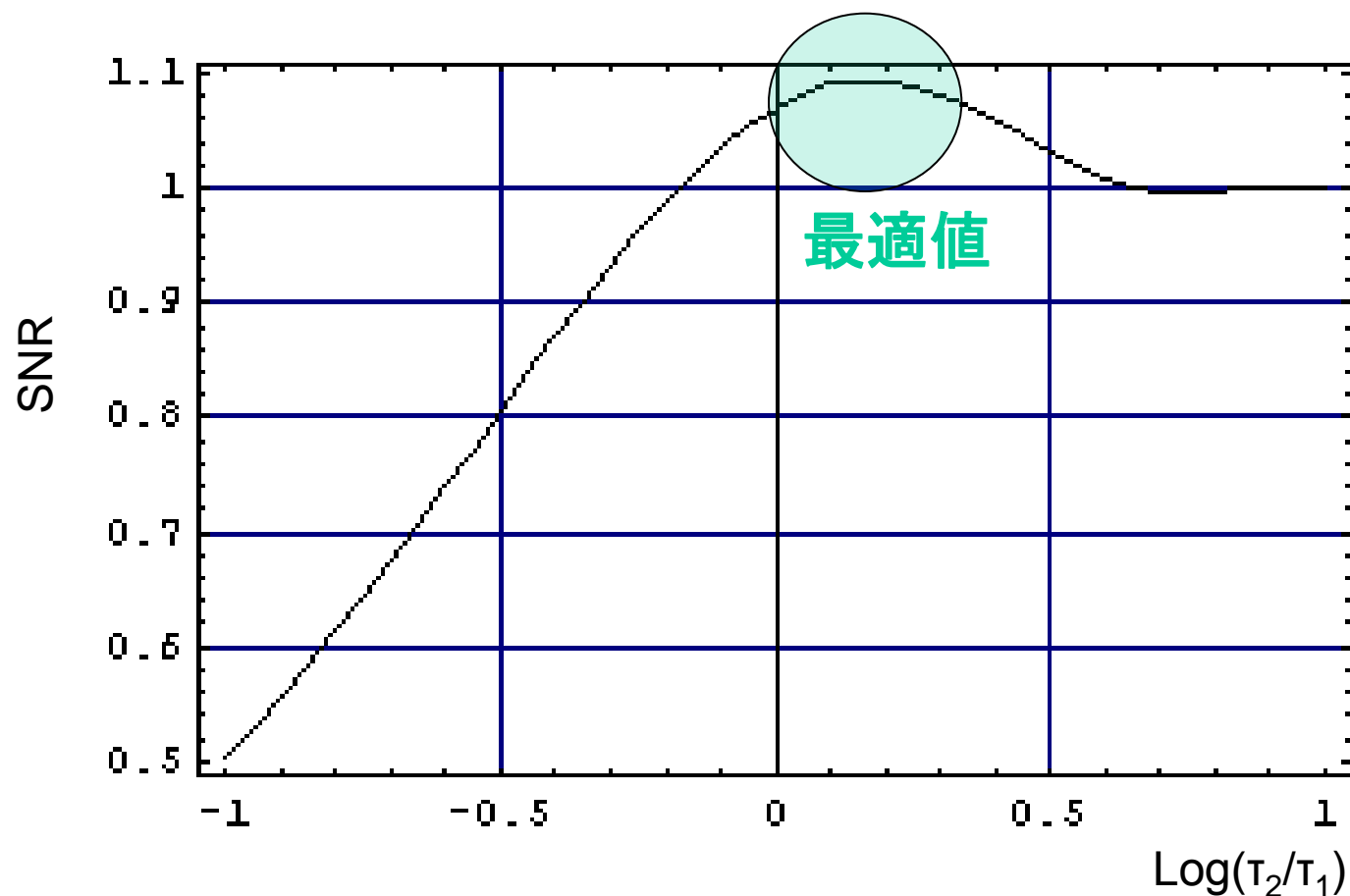
SPICEシミュレーション結果から計算した帯域一定下でSNRが最大となる τ_1, τ_2 (τ_{1opt}, τ_{2opt})

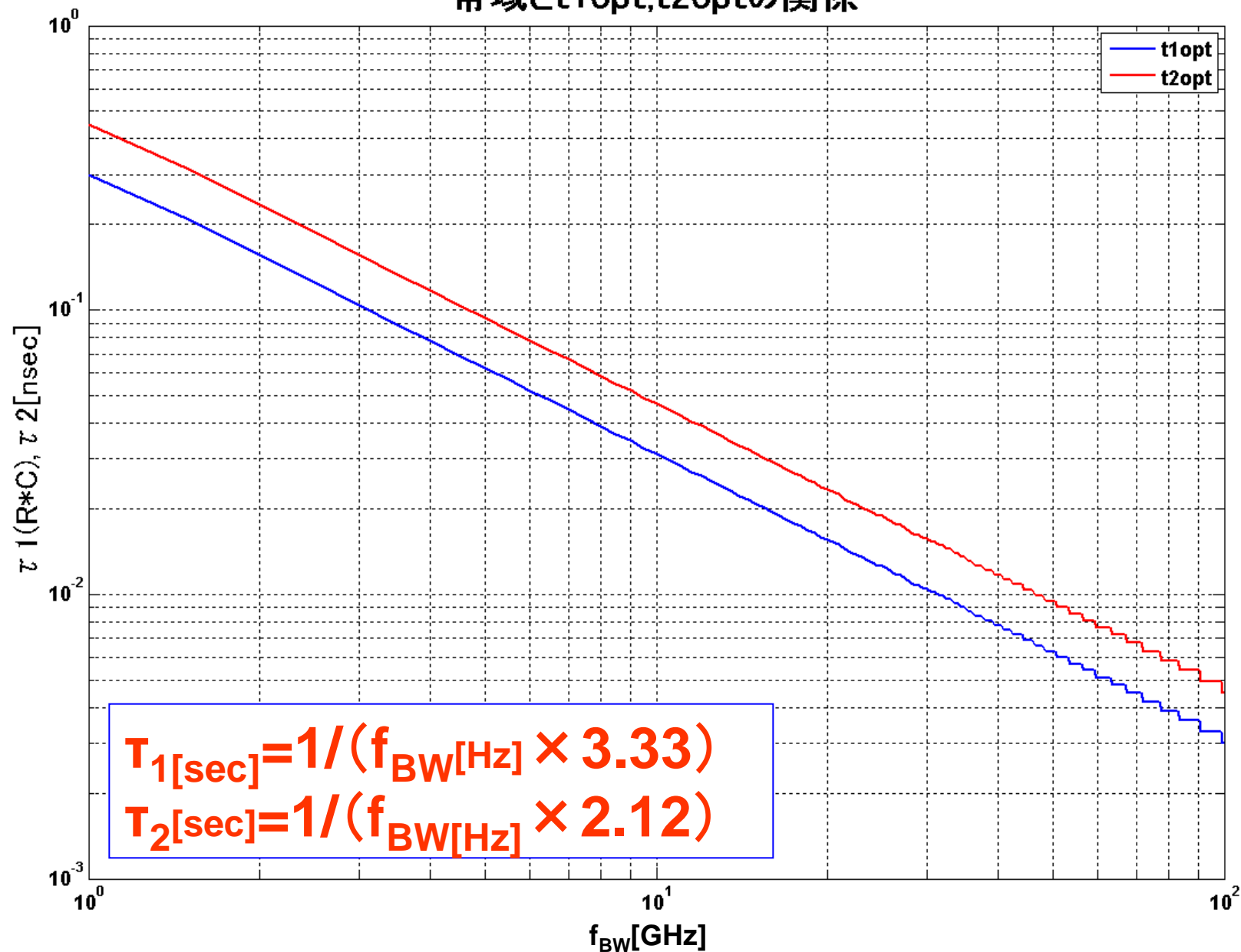
結果の考察

t1optとt2optの関係

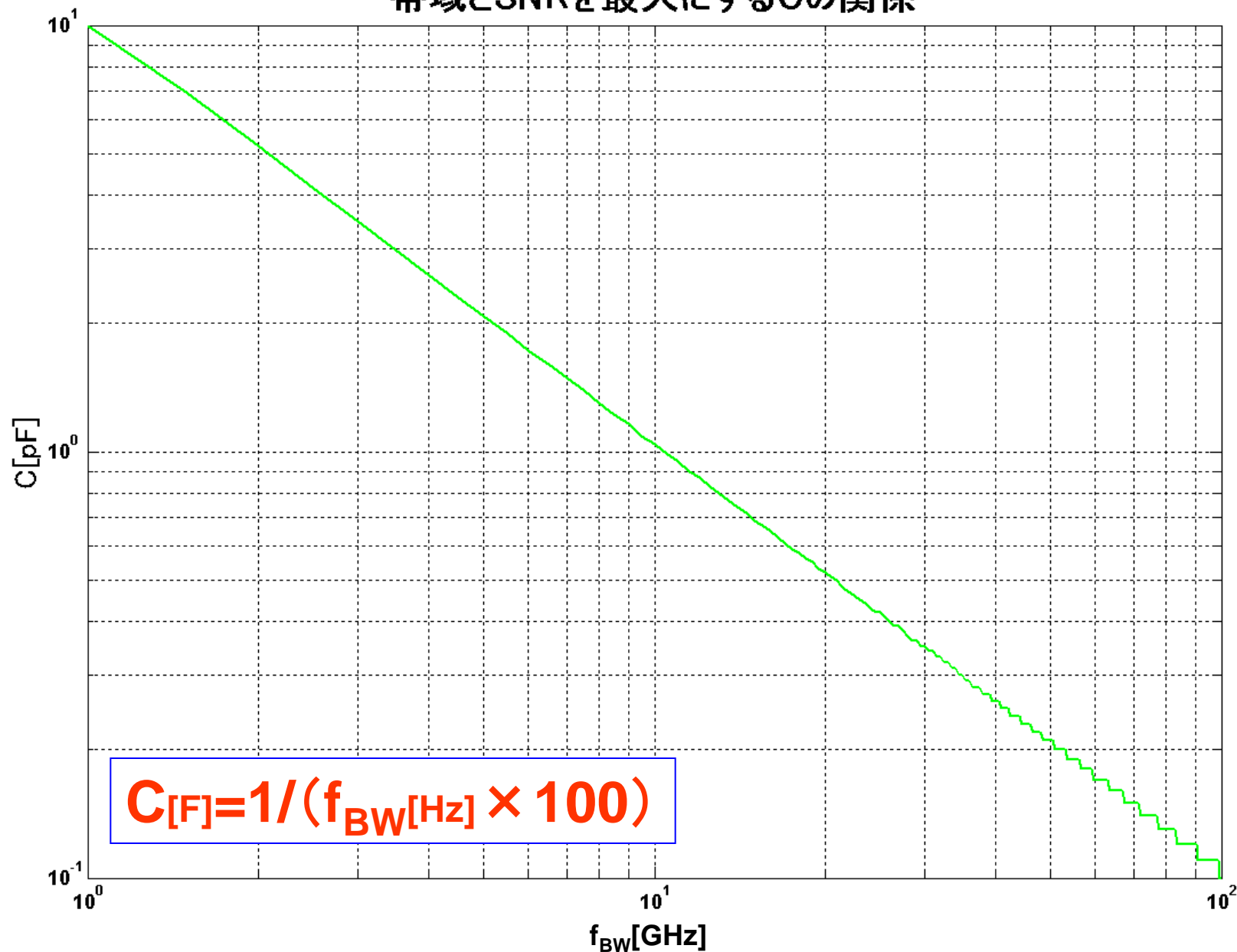


T_2/T_1 とSNRの関係

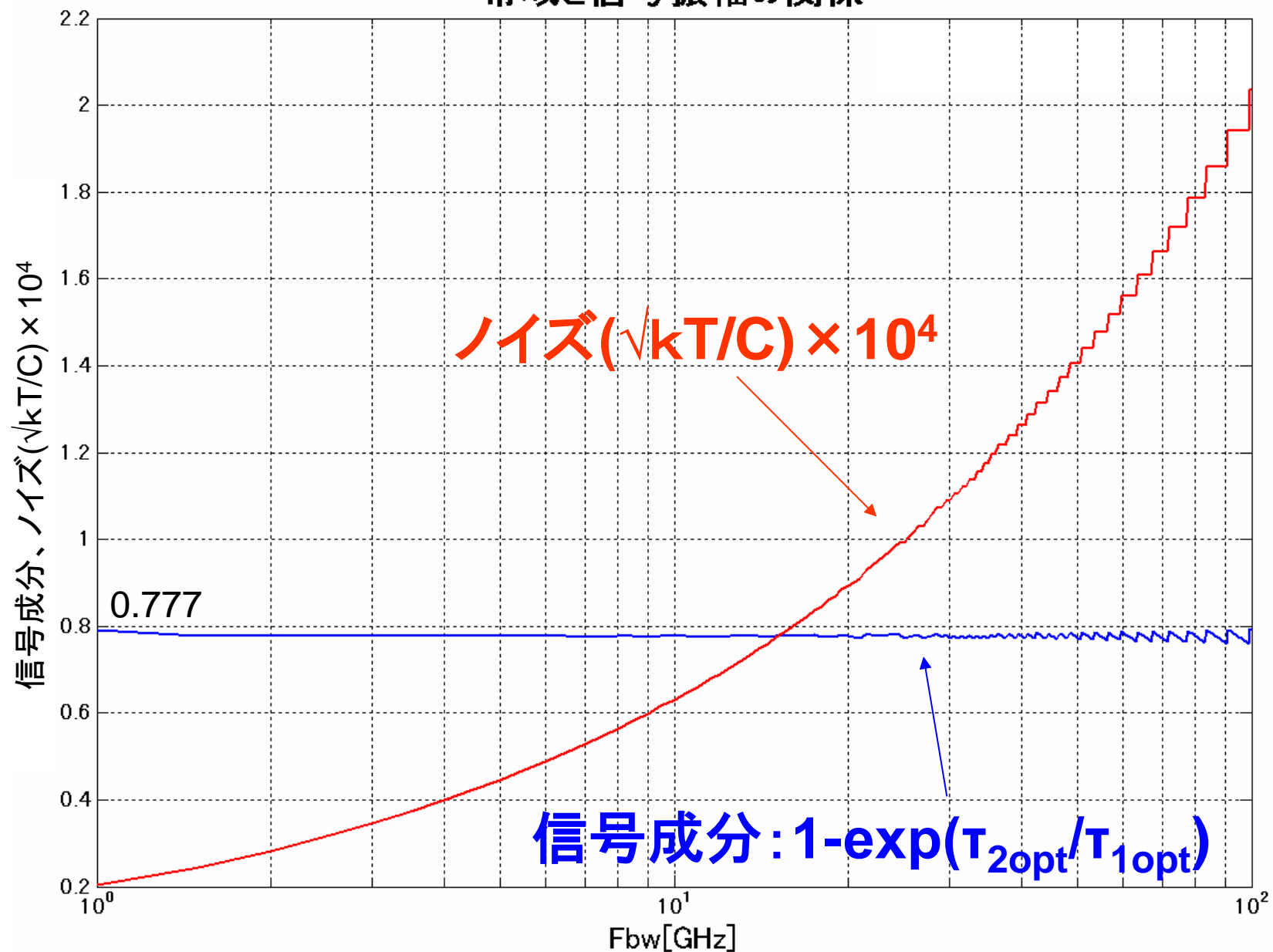


帯域と t_{1opt} , t_{2opt} の関係

帯域とSNRを最大にするCの関係

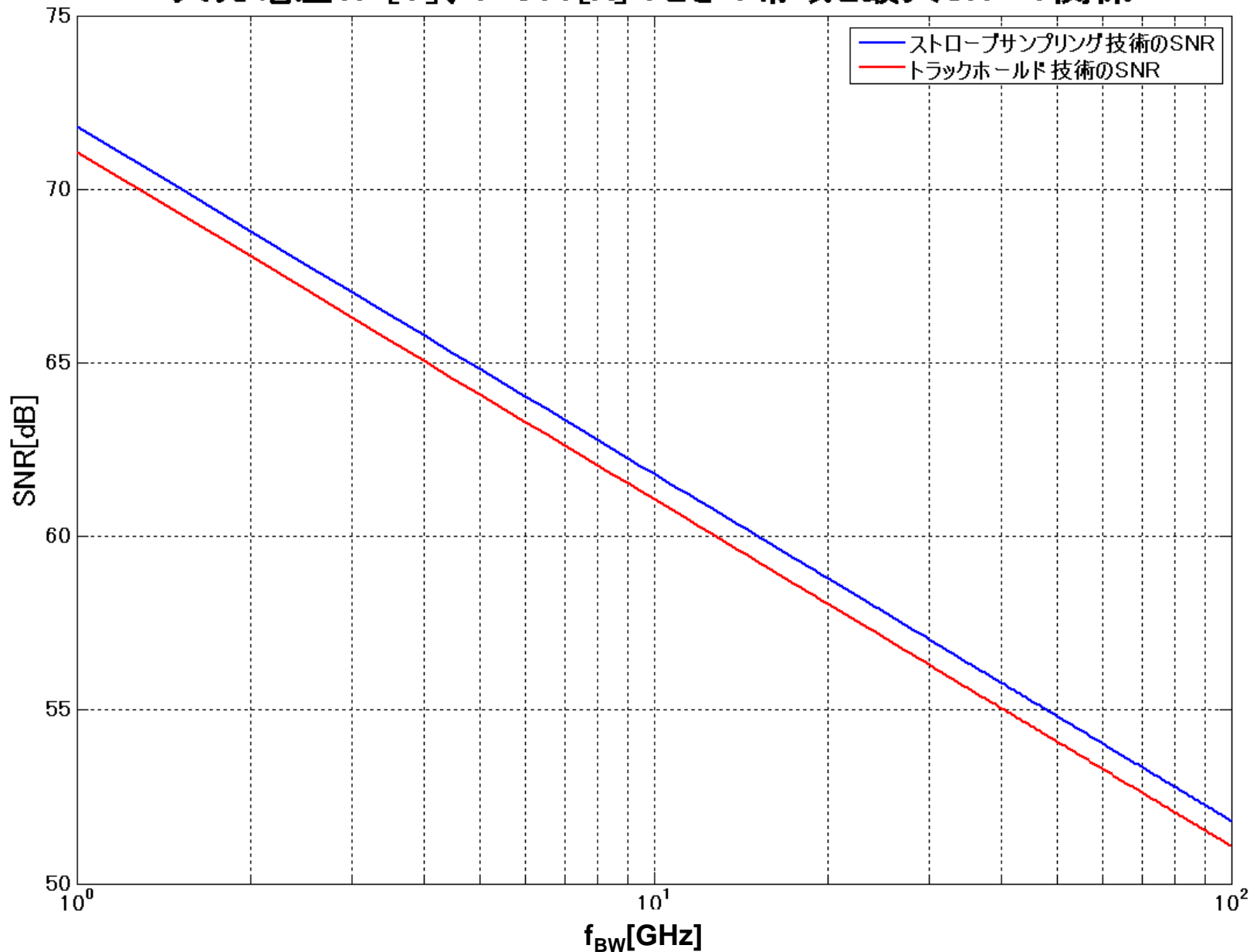


帯域と信号振幅の関係



入力電圧0.1[V]、T=300[K]のときの帯域と最大SNRの関係

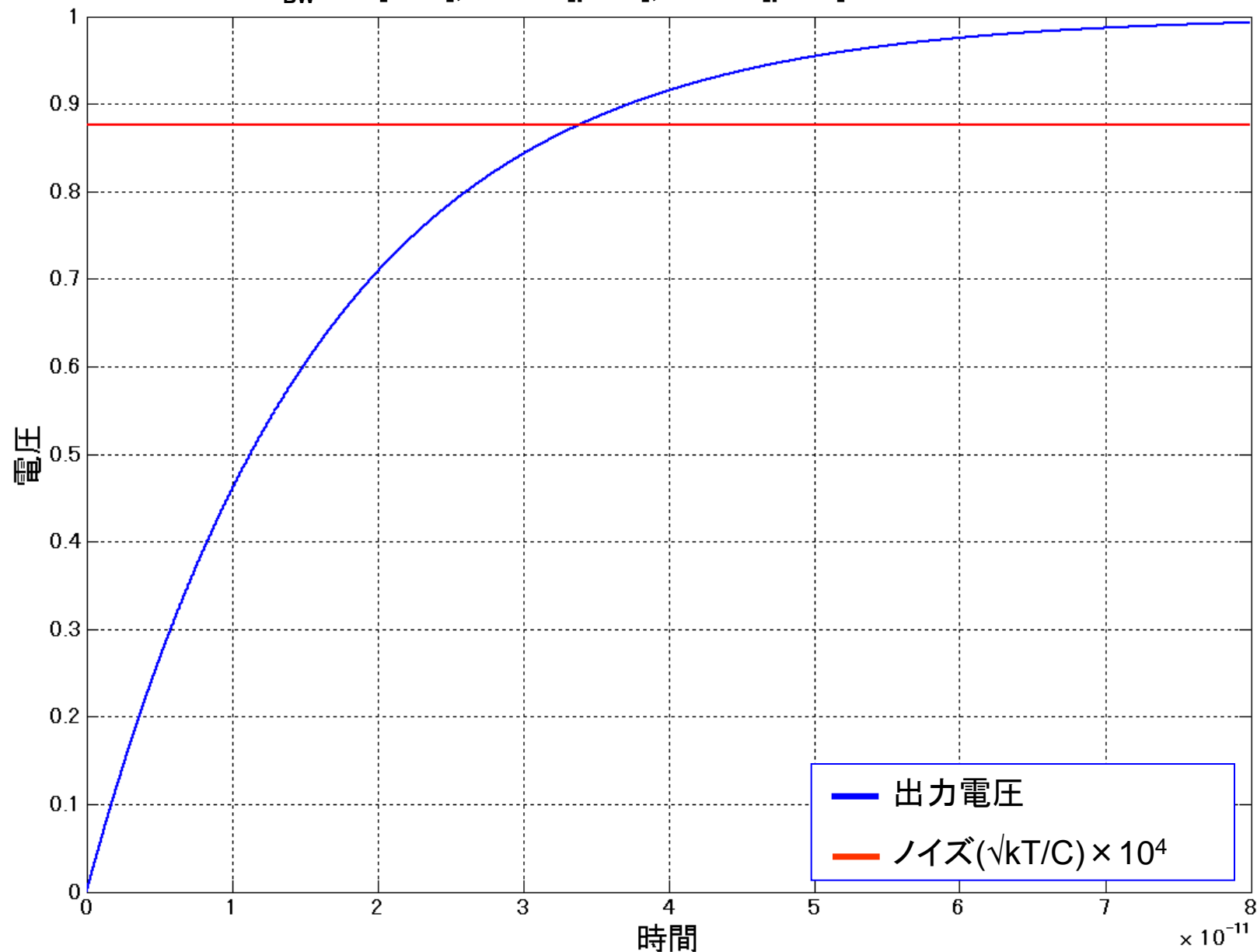


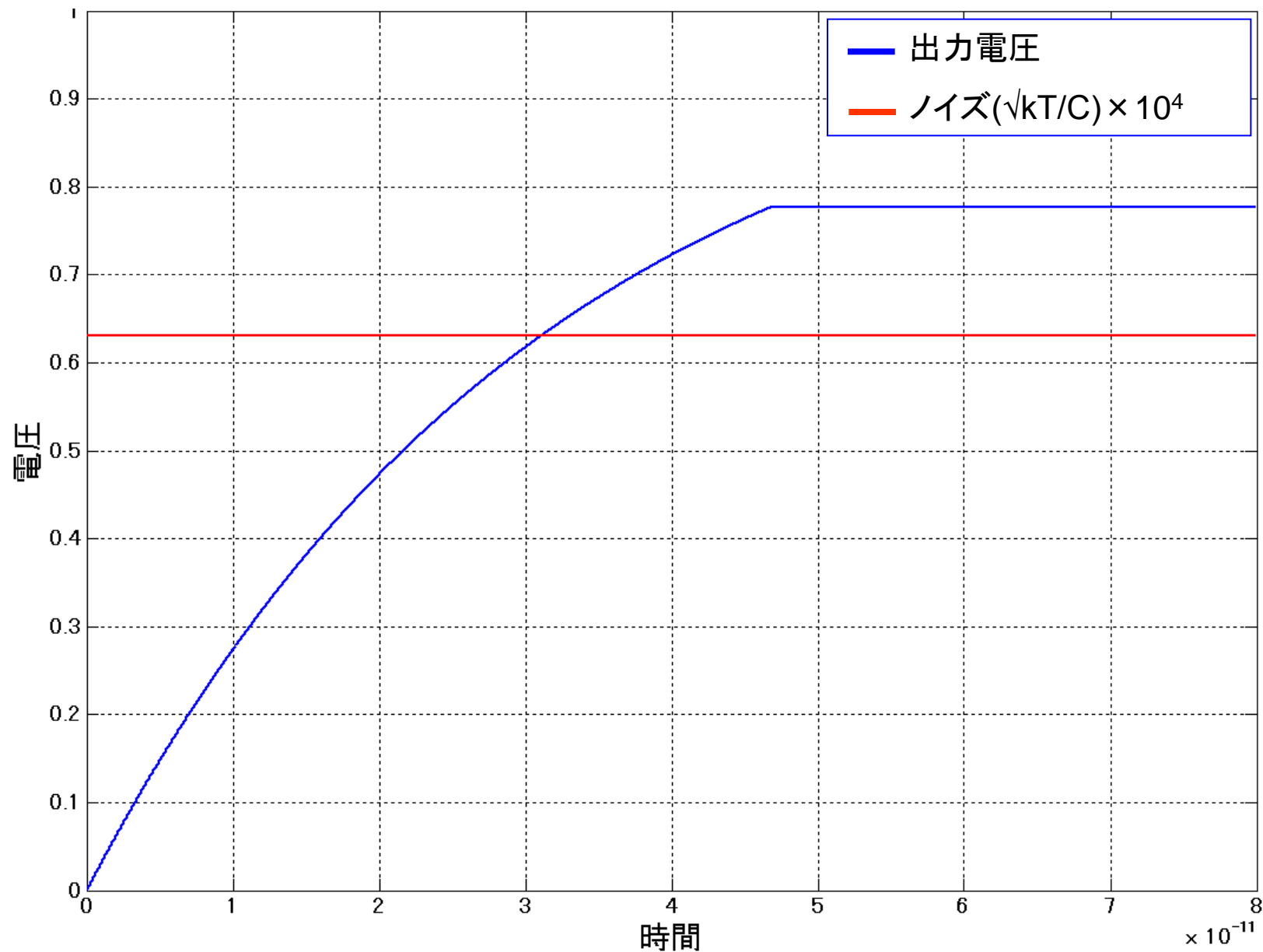
入力電圧0.1[V]、 $T=300$ [K]のときの帯域と最大SNRの関係

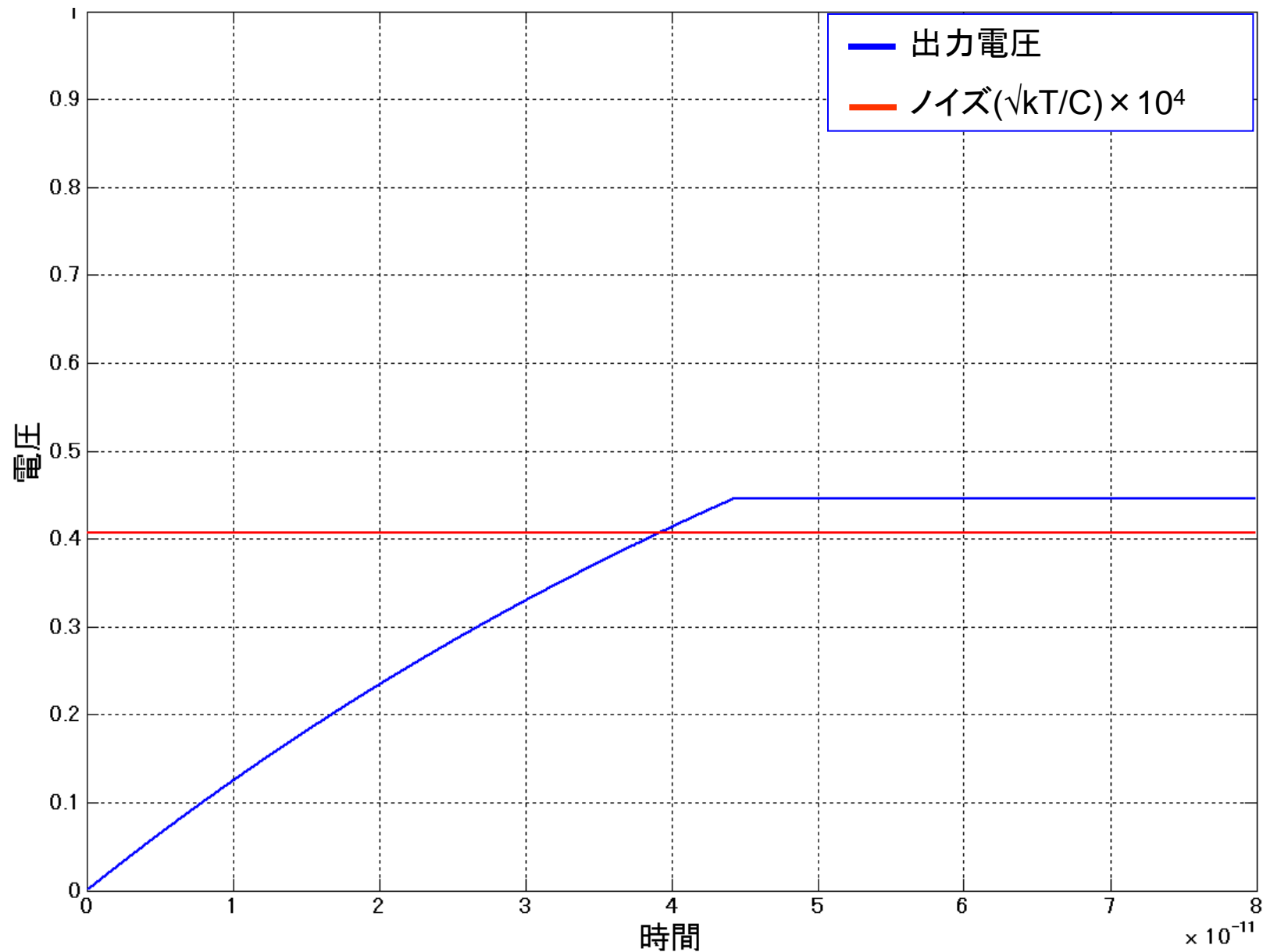
最適値の例ーストロージングー

- ある帯域の**S/H**回路を作る場合の指標
- 入力電圧**0.1[V]**、温度**T=300[K]**、 **$R_{SG} + R_{ON} = 30[\Omega]$** の時

帯域[GHz]	最大 SNR[dB]	最適な τ_1 [psec]	最適な C[pF]	最適な τ_2 [psec]
1	71.8	300	10.0	450
5	64.8	62	2.08	94
10	61.8	31	1.04	47
50	54.8	6	0.21	9
100	51.8	3	0.10	5

$f_{BW}=10[\text{GHz}], \tau_2=87.8[\text{psec}], \tau_1=16.2[\text{psec}]$ のときの出力電圧

$f_{BW}=10[\text{GHz}], \tau_2=46.8[\text{psec}], \tau_1=31.2[\text{psec}]$ のときの出力電圧

$f_{BW}=10[\text{GHz}], \tau_2=44.2[\text{psec}], \tau_1=75[\text{psec}]$ のときの出力電圧

まとめ

まとめ

- サンプリング回路の
帯域幅と最大**SNR**の関係式を導出
 - 帯域一定下で最大**SNR**を得る
新サンプリング技術
「ストローブサンプリング技術」
を提案
- ⇒トラックホールドサンプリングと
インパルスサンプリングの中間に位置する。

広帯域**S/H**回路の実現

■ 経験あるサンプリング回路技術者

T/H回路は適さない

– 歪み

インパルスサンプリング回路

– ノイズ大

中間が適すると示唆